V Bienal da SBM

João Pessoa – 18 a 22 de outubro de 2010

Alguns Belos Problemas de Matemática Discreta

Algumas partes do texto ainda não estão finalizadas
e outros problemas serão acrescentados

Rogério Ricardo Steffenon¹

UNISINOS – Universidade do Vale do Rio dos Sinos

Avenida Unisinos, 950, São Leopoldo – RS

CEP 93.022-000 - Brasil

⁰¹ Doutor em Matemática – UFRGS. Professor da UNISINOS. e-mail: rogerios@unisinos.br

Apresentação

Neste minicurso serão apresentados e resolvidos alguns belos problemas, cuja solução utiliza argumentos elementares e relativamente simples de Matemática Discreta. Entre os tópicos abordados podemos citar os seguintes: Indução Matemática, Sequência de Fibonacci, Recorrência, Combinatória, Divisibilidade, Sistemas de Numeração, Princípio da Casa dos Pombos e Probabilidade. A ideia deste minicurso se assemelha com aquele ministrado na III Bienal da SBM em Goiânia, no ano de 2006. Muitos dos problemas abordados surgem em olimpíadas de matemática e podem ser uma boa fonte para os professores incentivarem os alunos em aprender Matemática.

A distribuição das aulas será a seguinte:

1ª Aula: Nesta aula serão abordados problemas que envolvem a Indução Matemática e Sistema Binário: Torres de Hanói, Pesagem de Moedas numa balança de dois pratos, quantidade de jogos necessários para definir um vencedor num torneio do tipo mata-mata. A partir dos problemas resolvidos vamos deduzir que todo número natural pode ser escrito de modo único como soma de potências de 2 e também apresentar os cartões binários mágicos.

2ª Aula: Apresentaremos vários problemas cuja solução envolve o Princípio da Casa dos Pombos. Também abordaremos o Paradoxo Gêmeo (problema dos aniversários) e o problema dos Dois Bodes.

3ª Aula: Nesta aula abordaremos problemas que envolvem a sequência de Fibonacci e divisibilidade. Vamos provar que todo número natural pode ser escrito de modo único como soma de termos não consecutivos da sequência de Fibonacci e com isso apresentamos uma mágica com “cartões de Fibonacci”.

4ª Aula: Apresentaremos os conceitos básicos de contagem, utilizando permutações (simples e circulares) e combinações (simples e completas). Algumas fórmulas interessantes de Combinatória envolvendo somas serão deduzidas nesta aula.

5ª Aula: Serão resolvidos problemas diversos envolvendo alguns tópicos das aulas anteriores.

Pré-requisito: nenhum.

Bibliografia

1. ANDREESCU, T. et. al. 102 Combinatorial Problems. Birkhäuser Boston, 2002.
2. COUTINHO, S. C. Números Inteiros e Criptografia RSA. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.
3. GRIMALDI, R. P. Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction. Addison Wesley, 2004.
4. HEFEZ, A. Elementos de Aritmética. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
5. HOLANDA, B. et al. Treinamento Cone Sul 2007. Fortaleza: Realce, 2007.
6. KOSHY, T. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. John Wiley Sons, 2001.
7. LIMA, E. L. A Matemática do Ensino Médio Volume 2. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
8. LOVÁSZ, L. et. al. Matemática Discreta. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
9. MOREIRA, C. G. T. de A. et al. Olimpíadas Brasileiras de Matemática • 9^a a 16^a, Problemas e Soluções. Rio de Janeiro: SBM/OBM, 2003.
10. MORGADO, A. C. et. al. Análise Combinatória e Probabilidade. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
11. ROSEN, K. Elementary Number Theory and its applications. Addison Wesley, 2005.
12. ROSEN, K. Matemática Discreta e Suas Aplicações. São Paulo: McGraw-Hill, 2009.
13. SANTOS, A. L. Problemas Seleccionados de Matemática. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2006.
14. SANTOS, J. P. O. et. al. Introdução à Análise Combinatória. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.
15. <http://www.mat.ufg.br/bienal/2006/mini/misturini.steffenon.pdf>
Uma Grosa de Problemas de Matemática – III Bienal da SBM

Problema 1.

Os objetivos deste exercício são:

- (i) Provar o resultado $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, para todo $n \geq 1$.
- (ii) Fazer a mágica com os Cartões Mágicos Binários.
- (iii) Deduzir o seguinte resultado: Todo número inteiro positivo pode ser escrito de modo único como a soma de diferentes potências de 2.
- (a) Num torneio de tênis individual há 2^{n+1} participantes. Sabendo que a disputa é do tipo *mata-mata**, quantos jogos são realizados para se definir o vencedor?

*Os jogadores são divididos em grupos de 2, ao acaso, e jogadores de um mesmo grupo jogam entre si. Os perdedores são eliminados e os vencedores são divididos novamente em grupos de 2 e assim por diante até restar um jogador, que é proclamado campeão.

- (b) Em um programa de televisão, um candidato deve responder 21 perguntas. A primeira pergunta vale 1 ponto, a segunda 2 pontos, a terceira 4 pontos, e, assim, sucessivamente, dobrando sempre. O candidato responde a todas as perguntas e ganha os pontos correspondentes às respostas que acertou, mesmo que erre algumas.
 - (b.1) Qual o número de pontos que o candidato fará se acertar todas as perguntas?
 - (b.2) Quantas e quais as perguntas o candidato acertou se o número de pontos obtidos for igual a 571113?

Problema 2.

Numa biblioteca há dez estantes com muitos livros em cada uma delas. Além disso, dispomos de uma balança eletrônica (como as que existem em farmácias). Resolva cada uma das situações abaixo:

- (a) Sabemos que, em nove delas, cada livro pesa 1 kg e que, em uma delas, cada livro pesa 1,01 kg. Como descobrir, com uma pesagem apenas, qual a estante dos livros de 1,01 kg e, em consequência, quais são as estantes com os livros de 1kg?

- (b) Sabemos que, em algumas estantes, cada livro pesa 1 kg e nas outras, cada livro pesa 1,01 kg, podendo inclusive haver apenas livros de um dos tipos. Como descobrir, com uma pesagem apenas, quais as estantes dos livros de 1kg?
- (c) Sabemos que, em algumas estantes, cada livro pesa 1 kg, em outras cada livro pesa 1,01 kg e nas outras cada livro pesa 1,02 kg, podendo inclusive haver apenas livros de um dos tipos. Como descobrir, com uma pesagem, quais as estantes dos livros de 1kg, de 1,01 kg ?

Princípio Fundamental da Enumeração ou Princípio Multiplicativo

Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x_1 maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1 , a decisão d_2 puder ser tomada de x_2 maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é $x_1 \cdot x_2$. Mais geralmente, suponha que tenhamos que tomar n decisões sucessivas $d_1, d_2, \dots, d_n$ e se a decisão d_i puder ser tomada de x_i maneiras, então o número de maneiras de tomarmos as decisões $d_1, d_2, \dots, d_n$ é $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$.

Teorema Fundamental da Aritmética – TFA

Todo número natural $n \geq 2$ pode ser escrito de modo único na forma $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \dots \cdot p_t^{e_t}$, onde $p_1 < p_2 < \dots < p_t$ são números primos e os expoentes e_i são inteiros positivos.

Uma forma alternativa para o TFA:

Todo número natural $n \geq 1$ pode ser escrito de modo único na forma $n = 2^k(2m + 1)$, onde k, m são inteiros não negativos.

Uma consequência importante do TFA e do Princípio Multiplicativo:

Se $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \dots \cdot p_t^{e_t}$, então n possui $(e_1 + 1) \cdot (e_2 + 1) \cdot \dots \cdot (e_t + 1)$ divisores positivos.

Problema 3.

Numa escola há um corredor com 2010 armários numerados de 1 a 2010, inicialmente todos fechados. 2010 alunos numerados de 1 a 2010, passam pelo corredor. O aluno de número k reverte o estado de todos os armários cujos números são múltiplos de k . Por exemplo, o aluno de número 4 mexe nos armários de números 4, 8, 12, ..., abrindo os que encontra fechados e

fechando os que encontra abertos. Ao final, depois da passagem do 2010º aluno, quais armários ficarão abertos?

Princípio de Indução Matemática

Um conjunto A de números inteiros que contém o inteiro 1, e tem a propriedade que $k \in A$, implica que $k + 1 \in A$, então $A = \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.

Problema 4. (As Torres de Hanói)

O jogo consiste em uma base onde estão firmadas três hastes verticais que denominamos **A**, **B** e **C** e um certo número de discos, de diâmetros diferentes, furados no centro. No começo do jogo os discos estão todos enfiados na haste **A**, em ordem decrescente de tamanho, com o disco menor acima dos demais.

O objetivo é mover todos os discos, de **A** para **C**, obedecendo às seguintes regras:

- (1) Só é permitido mover um disco de cada vez.
- (2) Um disco maior nunca pode ser posto sobre um disco menor.

É fácil ver que é necessário usar a haste **B** como intermediária. O problema consiste no seguinte:

Qual o número mínimo de movimentos que precisaremos fazer para alcançar o objetivo?

Sugestão: Verifique quantos movimentos são necessários quando temos 1 disco, 2, 3, 4 discos e tente encontrar alguma regularidade. Existem vários sites que tratam do assunto.

Para jogar veja, por exemplo: http://www.prof2000.pt/users/pjca/Jogos_ficheiros/hanoi/Torre

Observação: *The Reve's Puzzle:* Uma questão interessante é considerar o mesmo problema com 4 hastes **A**, **B**, **C** e **D**. Inicialmente há n discos de diâmetros diferentes, fincados inicialmente na haste **A**, nas condições acima. O objetivo, seguindo as duas regras acima, é passá-las para a haste **D**. Nesse caso as hastes **B** e **C** funcionam como intermediárias. Até o momento não se conhece o número mínimo de movimentos para resolver o problema com n discos. Há uma conjectura, com cerca de 70 anos, de que o número mínimo de movimentos necessários é igual ao número de movimentos usados por um algoritmo criado por Frame e Stewart (Conjectura de Frame-Stewart).

Problema 5.

Seja $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Suponha que você possua k moedas de um real, uma das quais é falsa e pesa menos do que uma verdadeira. Você tem uma balança de dois pratos mas não tem pesos. A única forma de pesagem consiste em por algumas moedas em cada prato e verificar se a balança está equilibrada.

- (a) Faça uma tabela com duas colunas. Na primeira coluna escreva valores de k ($k = 2, 3, 4, \dots$) e na segunda coloque a quantidade mínima de pesagens para descobrir a moeda falsa.
- (b) O que acontece para os seguintes valores de k : 3, 4, 9, 10, 27, 28?
- (c) Mostre, por indução em n , que se $k = 3^n$, então n pesagens são suficientes para achar a moeda adulterada.

Problema 6.

Suponha que você possua 12 moedas de um real, uma das quais é falsa e tem peso diferente de uma verdadeira (não sabemos se a falsa pesa mais ou menos que uma verdadeira). Você tem uma balança de dois pratos mas não tem pesos. A única forma de pesagem consiste em pôr algumas moedas em cada prato e verificar se a balança está equilibrada.

- (a) Mostre que 3 pesagens são suficientes para achar a moeda adulterada.
- (b) Consegues resolver o mesmo problema com 13 moedas? E com 14 moedas?

Princípio das Gavetas de Dirichlet ou Princípio da Casa dos Pombos (PCP)

Se $n + 1$ pombos são colocados em n casas, então pelo menos uma casa conterá dois ou mais pombos.

Problema 7.

Em João Pessoa há pelo menos duas pessoas com a mesma quantidade de fios de cabelo na cabeça.

Solução: Observações científicas indicam que ninguém tem mais de 500.000 fios de cabelo na cabeça. Com isso a quantidade de cabelos que uma pessoa pode ter é $0, 1, \dots, 500.000$ (essas

são as casas!). A população de João Pessoa é superior a 700.000 (esses são os pombos!). O resultado segue pelo PCP.

Problema 8. Prove que se escolhermos mais do que n números do conjunto $\{1, 2, \dots, 2n\}$, então dois desses números são primos entre si.

Solução: Considere os n pares de números: 1 e 2, 3 e 4, ..., $2n - 1$ e $2n$. Como são escolhidos mais do que n números, pelo PCP, há pelo menos dois pertencentes ao mesmo par. Como dois números do mesmo par são consecutivos, eles são primos entre si.

Problema 9.

Seja $a \neq 0$ um algarismo no sistema decimal. Prove que todo número natural n tem um múltiplo que se escreve apenas com os algarismos 0 e a .

Solução: Consideramos os $n + 1$ números $a, aa, aaa, aaaa, \dots, \underbrace{aa\dots aa}_{n+1}$ (esses são os pombos!). Sabemos que os possíveis restos na divisão por $0, 1, 2, \dots, n - 1$ (essas são as casas!). Pelo PCP segue que pelo menos dois dos $n + 1$ números acima devem ter o mesmo resto na divisão por n , digamos que $M = aa\dots aa$ (p algarismos) e $N = aa\dots aa$ (q algarismos), com $p > q$. Então $M - N$ é um número formado apenas por ZEROS e a 'S.

Problema 10. (Primeira Questão da Terceira Fase da OBM de 2008)

Vamos chamar de *garboso* o número que possui um múltiplo cujas quatro primeiras casas de sua representação decimal são 2008. Por exemplo, 7 é garboso pois 200858 é múltiplo de 7 e começa com 2008. Observe que $200858 = 28694 \times 7$.

Mostre que todos os inteiros positivos são garbosos.

Problema 11.

Sejam $A = \{n \in \mathbb{N} : \text{mdc}(n, 10) = 1\}$ e $a_1 a_2 \dots a_k$ um número com k algarismos. Agora considere o conjunto $B = \{a_1 a_2 \dots a_k, a_1 a_2 \dots a_k a_1 a_2 \dots a_k, a_1 a_2 \dots a_k a_1 a_2 \dots a_k a_1 a_2 \dots a_k, \dots\}$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $M(n)$ o conjunto dos múltiplos de n .

Mostre que se $x \in A$, então $M(x) \cap B$ é infinito.

Problema 12.

De 1º de janeiro até 31 de outubro de 2009, uma pequena livraria de João Pessoa, que abre todos os dias, vendeu no mínimo um livro por dia e um total de 463 livros. Mostre que existiu um período de dias consecutivos em que foram vendidos exatamente 144 livros.

Solução: Seja a_i a quantidade de livros vendidos até o dia i , para $1 \leq i \leq 304$. Então $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{304} = 463$. Considere a sequência $b_i = a_i + 144$. Assim segue que $145 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_{304} = 607$. Logo $a_i, b_j \in \{1, \dots, 607\}$, para todo $i, j \in \{1, \dots, 304\}$. Pelo Princípio da Casa dos Pombos, existem i, j tais que $a_i = b_j$. Portanto $a_i - a_j = 144$.

Problema 13.

Dados CINCO números reais arbitrários, mostre que existem dois deles, digamos x e y , tais que $0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq 1$.

Solução: Observe que a expressão $\frac{x-y}{1+xy}$ nos faz lembrar da fórmula $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.

Sejam x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 os CINCO números reais arbitrários.

Como a função tangente é uma bijeção do intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $\mathbb{R}$, logo para cada x_i , existe um $a_i \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, tal que $\tan a_i = x_i$.

Dividimos o intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ em quatro subintervalos de comprimento $\frac{\pi}{4}$. Pelo PCP, que existem a_i, a_j tais que $0 \leq a_i - a_j \leq \frac{\pi}{4}$.

Usando o fato de que a função tangente é crescente em $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, e a fórmula acima temos que:

$$\tan 0 \leq \tan(a_i - a_j) \leq \tan \frac{\pi}{4} \quad \text{e} \quad 0 \leq \frac{\tan a_i - \tan a_j}{1 + \tan a_i \tan a_j} \leq 1, \quad \text{ou seja,} \quad 0 \leq \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} \leq 1.$$

Problema 14.

Guilherme teve os olhos vendados e com uma caneta fez 50 pontos numa cartolina quadrada com lado igual a 70 cm. Mostre que existem dois pontos cuja distância é inferior a 15 cm.

Problema 15. Prove que se escolhermos mais do que n números do conjunto $\{1, 2, \dots, 2n\}$, então um deles será múltiplo do outro.

Solução: Dado m um inteiro positivo, vimos que uma consequência do TFA nos diz que ele pode ser escrito de modo único na forma $m = 2^k b$, onde $k \geq 0$ e b é ímpar. Denominamos b a parte ímpar de m .

No conjunto $\{1, 2, \dots, 2n\}$ só podem existir n possíveis partes ímpares diferentes: $1, 3, \dots, 2n - 1$. Se escolhermos mais do que n números nesse conjunto segue, pelo PCP, que existem dois números $r, s \in \{1, 2, \dots, 2n\}$ que têm a mesma parte ímpar, ou seja, $r = 2^k b$ e $s = 2^t b$. O maior desses números será múltiplo do menor.

Problema 16. Paradoxo Gêmeo ou Problema dos Aniversários

Você está assistindo um jogo de futebol e lá pelas tantas surge a seguinte questão:

- “Qual é a probabilidade de que pelo menos dois dos 22 jogadores em campo façam aniversário no mesmo dia (dia e mês)?” (*)

* É muito provável que você nunca tenha pensado nisso durante uma partida de futebol...

Problema 17. Problema dos Dois Bodes

Este problema é inspirado num programa de TV americano conhecido como *Let's make a deal* (Vamos fazer um negócio). Nesse show, dá-se ao concorrente finalista a chance de escolher uma entre três portas. Atrás de exatamente uma das portas, está um prêmio interessante (um carro, por exemplo); as outras duas portas ocultam prêmios de valor bem inferior (um bode atrás de cada porta, por exemplo). Pede-se ao concorrente que escolha uma porta. A esta altura, o apresentador do show, Monty Hall, que sabe o que tem atrás de cada porta, mostra ao concorrente um dos prêmios de menor valor atrás de uma das portas não escolhidas. Além disso, oferece ao concorrente a oportunidade de optar pela outra porta fechada. A questão é a seguinte: é vantajoso optar pela outra porta ou tanto faz?

Problema 18. Problema dos Dois Bodes com apresentador Preguiçoso

Uma variante do problema anterior é o caso em que o concorrente escolhe inicialmente a porta em que está o prêmio maior. Nesse caso o apresentador, que sabe o que tem por trás das portas e que sempre mostra um bode, pode escolher uma entre duas portas para abrir. Nesse caso

como ficam as chances do candidato, sabendo que o apresentador é preguiçoso, ou seja, que ele abrirá a porta que estiver mais próxima dele?

Problema 19.

Imagine que um prédio de quatro andares deva ser pintado usando-se uma cor para cada andar. Sabendo que as cores utilizadas podem ser verde e amarelo e que andares consecutivos não poderão ser pintados de amarelo, de quantas maneiras é possível fazer a pintura deste prédio? E se o prédio tiver n andares?

Problema 20.

Uma escada tem 5 degraus. De quantas maneiras podemos chegar ao topo, subindo um ou dois degraus de cada vez? E se a escada tiver n degraus?

Consideremos a seguinte variação da sequência de Fibonacci $F_1 = 1, F_2 = 2$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para $n \geq 3$.

Problema 21. Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro

Os objetivos deste exercício são:

(i) Provar os seguintes resultados para a sequência definida acima:

$$F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n} - 1.$$

$$F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1.$$

(ii) Deduzir o seguinte resultado: Mostre que todo número inteiro positivo pode ser escrito de modo único como soma de termos não consecutivos da sequência F_n .

(iii) Fazer a mágica com os Cartões Mágicos de Fibonacci.

Problema 22.

Um conjunto de números positivos tem a propriedade do triângulo, se tiver três elementos distintos que são os comprimentos dos lados de um triângulo cuja área é positiva. Considere conjuntos $\{4, 5, 6, \dots, n\}$ de inteiros positivos consecutivos, em que todos os subgrupos de dez

elementos têm a propriedade de triângulo. Qual é o maior valor possível de n ?

Problema 23. Sequência de Padovan-Perrin e o Número de Plástico

Um carteiro entrega cartas para dezenove casas, numeradas de 1 a 19, numa certa rua de Campina Grande. Até hoje em nenhum dia ele entregou cartas para casas consecutivas, mas dadas duas casas consecutivas, sempre havia carta para uma delas. De quantas maneiras diferentes isso pode ocorrer?

Problema das permutações simples: De quantos modos podemos ordenar em fila n objetos?

Resposta: O número de permutações simples de n objetos distintos, ou seja, o número de ordens em que podemos colocar n objetos é $P_n = n!$.

Problema das combinações simples: De quantos modos podemos selecionar k objetos distintos entre n objetos distintos dados?

Resposta: O número de combinações simples de n tomados k a k , ou seja, o número de subconjuntos com k elementos de um conjunto de n elementos é igual a

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Observação: Seja $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ um conjunto com n elementos. É fácil ver que a cada subconjunto de A com k elementos, ($0 \leq k \leq n$), corresponde um subconjunto com $n - k$ elementos. Portanto segue que:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \text{para todo } 0 \leq k \leq n.$$

Combinações Completas: O número de soluções inteiras não negativas da equação

$x_1 + x_2 + \dots + x_n = p$ é dado por $CR_n^p = C_{n+p-1}^{n-1} = C_{n+p-1}^p$.

Definição:(segundo dicionário Aurélio) **Anagrama** é uma palavra ou frase formada pela transposição das letras de outra palavra ou frase.

Anagrama: do grego ana = "voltar" ou "repetir" + graphein = "escrever".

Um exemplo conhecido é o nome da personagem Iracema, anagrama de América, no romance de José de Alencar.

Problema 24.

Um número é dito *peroba* se possui pelo menos dois dígitos vizinhos com a mesma paridade.

Quantos números *perobas* de cinco dígitos existem?

Problema 25.

Dizemos que uma palavra Q é *quase-anagrama* de outra palavra P quando Q pode ser obtida retirando-se uma letra de P e trocando a ordem das letras restantes, resultando em uma palavra com uma letra a menos do que P . Um quase-anagrama pode ter sentido em algum idioma ou não. Por exemplo, RARO, RACR e ARCO são quase-anagramas de CARRO. Quantos são os quase-anagramas da palavra PALAVRA que começam com A?

Problema 26.

De quantas maneiras podemos colocar, em cada espaço abaixo, um entre os algarismos 4, 5, 6, 7, 8, 9, de modo que todos os seis algarismos apareçam e formem, em cada membro, números de dois algarismos que satisfazem a dupla desigualdade?

$$_ _ > _ _ > _ _ .$$

Problema 27.

No campeonato interplanetário de futebol, cada vitória vale três pontos, cada empate vale um ponto e cada derrota vale zero ponto. Um *resultado* é uma vitória, empate ou derrota. Sabe-se que o Lanoicanretni não sofreu nenhuma derrota e tem 16 pontos, mas não se sabe quantas partidas esse time jogou.

Quantas sequências ordenadas de resultados o Lanoicanretni poderia ter obtido? Representando vitória por V, empate por E e derrota por D, duas possibilidades por exemplo, são (V,E,E,V,E,V,V,E) e (E,V,V,V,V,V).

Problema 28.

Esmeralda, a digitadora, tentou digitar um número de seis algarismos, mas os dois algarismos não apareceram (a tecla devia estar com defeito). O que apareceu foi 20046.

Quantos são os números de sete algarismos que ela pode ter tentado digitar?

Problema 29.

Quantos são os anagramas da palavra PERIGOSA em que as quatro vogais aparecem em ordem alfabética?

(Obs.: As quatro vogais não precisam ficar em posições consecutivas.)

Problema 30.

Cinco amigos, Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo, Dernaldo e Ernaldo, devem formar uma fila com outras 30 pessoas.

De quantas maneiras podemos formar esta fila de modo que Arnaldo fique na frente de seus 4 amigos? (Os amigos não precisam ficar em posições consecutivas.)

Problema 31.

A fábrica *Sehr Gut* produz 5 tipos de trufas: Avelã (A), Brigadeiro (B), Chocolate(C), Morango(M) e Passas (P). Essas trufas são vendidas em caixas com 12 unidades.

- (a) Sabendo que seja possível encontrar caixas com um único sabor ou sortido, quantas caixas diferentes existem?
- (b) Sabendo que em cada caixa haja pelo menos uma trufa de cada tipo, quantas caixas diferentes existem?
- (c) Sabendo que em cada caixa haja pelo menos três trufas de chocolate, quantas caixas diferentes existem? (Não é necessário que haja todos os tipos nas caixas)
- (d) Sabendo que em cada caixa haja pelo menos três e no máximo cinco trufas de chocolate, quantas caixas diferentes existem? (Não é necessário que haja todos os tipos nas caixas)

Problema 32. (Oitava Questão da OBM Sênior de 1992)

Em um torneio de xadrez cada jogador disputou uma partida com cada um dos demais participantes. A cada partida, havendo o empate, cada jogador ganhou $1/2$ ponto; caso contrário, o vencedor ganhou 1 ponto e o perdedor 0 pontos. Participaram homens e mulheres e cada participante conquistou o mesmo número de pontos contra homens que contra mulheres. Mostre que o número total de participantes é um quadrado perfeito.

Solução: Seja h o número de homens e m o número de mulheres no torneio. Como em cada jogo é disputado 1 ponto, nos jogos entre h homens foram disputados $\binom{h}{2}$ pontos e nos jogos entre mulheres foram disputados $\binom{m}{2}$ pontos. Sejam a e b os pontos conquistados por homens e mulheres, respectivamente.

Das condições do enunciado, $a = \binom{h}{2}$ e $b = \binom{m}{2}$. Como o total de jogos do torneio é $\binom{h+m}{2}$, temos $2\left(\binom{h}{2} + \binom{m}{2}\right) = \binom{h+m}{2} \iff h + m = (h - m)^2$, ou seja, o total de participantes, $h + m$, é quadrado perfeito.

Problema 33.

O objetivo desta questão é provar de duas maneiras diferentes a identidade

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n. \quad (1)$$

(a) Aplique o Binômio de Newton para a expressão $(1 + x)^n$. Faça $x = 1$.

(b) Considere...

Problema 34.

O objetivo desta questão é provar a identidade de Lagrange

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}. \quad (2)$$

(a) Basta mostrar que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{n}{0} \binom{n}{n} + \binom{n}{1} \binom{n}{n-1} + \binom{n}{2} \binom{n}{n-2} + \cdots + \binom{n}{n} \binom{n}{0} = \binom{2n}{n}. \quad (3)$$

(b) Considere o problema de formar comissões de n pessoas a partir de um grupo de n homens e n mulheres. Conte essas comissões de duas maneiras diferentes: a diretamente, 2^a dividindo em casos, conforme o número de mulheres que a comissão contém. Comparando os resultados, obtenha nova demonstração de (3).

(c) Aplique o Binômio de Newton a ambos os lados da igualdade $(1+x)^{2n} = (1+x)^n (1+x)^n$. Comparando a expressão do coeficiente de x^n de ambos os lados, obtenha a identidade (3). (usar diagramas de ruas?)

Problema 35.

O objetivo deste exercício é dar duas demonstrações diferentes para a identidade

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

(a) *Demonstração combinatória:* Considere o conjunto de todas as possíveis comissões tendo uma pessoa designada para presidente, que se pode formar a partir de um conjunto de n pessoas (uma comissão pode ter um número qualquer de pessoas, de 1 a n). Conte este conjunto de comissões de duas maneiras diferentes e compare os resultados.

Sugestão: Um método é, depois de escolhida a comissão, escolher o presidente entre seus membros. Outro método é escolher primeiro uma pessoa para ser o presidente e depois escolher o restante da comissão. Use o fato acima: se $|B| = m$, então B possui $\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} = 2^m$ subconjuntos.

(b) Tome a expressão

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

que se obtém aplicando o binômio de Newton, derive em relação a x e substitua $x = 1$.

Problema 36.

O objetivo deste exercício é dar duas demonstrações diferentes para a identidade

$$\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

(a) *Demonstração combinatória:* Considere o conjunto de todas as possíveis comissões tendo uma pessoa designada para presidente e uma para secretário, podendo a mesma pessoa acumular os dois cargos, que se pode formar a partir de um conjunto de n pessoas (uma comissão pode ter um número qualquer de pessoas, de 1 a n). Conte este conjunto de comissões de duas maneiras diferentes e compare os resultados.

Sugestão: Um método é, depois de escolhida a comissão, escolher o presidente e o secretário entre seus membros. Outro método é escolher primeiro uma pessoa para ser o presidente, uma pessoa para secretário e depois escolher o restante da comissão. Use o fato acima: se $|B| = m$, então B possui $\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} = 2^m$ subconjuntos.

(b) Tome a expressão

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

que se obtém aplicando o binômio de Newton, derive em relação a x , depois multiplique a expressão obtida por x , derive mais uma vez em relação a x e substitua $x = 1$.

Problema 37.

O objetivo deste exercício é dar duas demonstrações diferentes para a identidade

$$\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}.$$

(a) *Demonstração combinatória:* Considere o conjunto de todas as possíveis comissões tendo uma pessoa designada para presidente e outra para vice-presidente, que se pode formar a partir de n pessoas (portanto as comissões vão conter ao menos 2 pessoas). Conte essas comissões de 2 maneiras diferentes e compare os resultados.

Sugestão: Um método é, depois de escolhida a comissão, escolher o presidente e o vice-presidente entre seus membros. Outro método é escolher primeiro uma pessoa para ser o

presidente e outra para vice-presidente e escolher depois o restante da comissão. Use o fato acima: se $|B| = m$, então B possui $\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} = 2^m$ subconjuntos e a mesma ideia da questão anterior.

(b) Tome a expressão

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

que se obtém aplicando o binômio de Newton, derive duas vezes em relação a x e depois faça a substituição $x = 1$.

Problema 38.

Prove a identidade

$$n \binom{2n-1}{n-1} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}^2.$$

(a) *Demonstração combinatória:* Dados um conjunto de n homens e n mulheres conte de duas maneiras diferentes todas as comissões de n pessoas com um homem escolhido para ser o líder dos homens.

(b) *Demonstração utilizando o binômio de Newton:* Considere

$$(1+x)^n(1+y)^n = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} y^j \right)$$

derive em relação a x , substitua $y = x$ e finalmente identifique o coeficiente de x^{n-1} dos dois lados da igualdade.

Problema 39. (Olimpíada Chinesa – 1994)

O objetivo desta questão é provar a identidade

$$\binom{2n+1}{n} = \sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor (n-k)/2 \rfloor}. \quad (4)$$

Demonstração combinatória: Consideremos uma turma com $2n$ alunos, n meninos e n meninas, e sua professora T . Denotemos as meninas por $a_1, a_2, \dots, a_n$ e os meninos por $b_1, b_2, \dots, b_n$. Para $1 \leq i \leq n$, consideremos os pares de alunos (a_i, b_i) . A turma tem n ingressos para um jogo de

futebol entre Brasil e Argentina. Consideremos o número de maneiras de encontrar n pessoas entre as $2n + 1$ da classe para ir para o jogo. A resposta óbvia é $\binom{2n+1}{n}$. Por outro lado, nós também podemos calcular esse número da seguinte maneira...

Problema 40.

O objetivo desta questão é dar três demonstrações diferentes para o fato de que sempre que $n \geq r$ e $m \geq r$, vale a seguinte identidade (Convolução de Vandermonde) .

$$\binom{n+m}{r} = \binom{n}{0} \binom{m}{r} + \binom{n}{1} \binom{m}{r-1} + \binom{n}{2} \binom{m}{r-2} + \dots + \binom{n}{r} \binom{m}{0}$$

(a) *Demonstração combinatória:* Sejam A e B dois conjuntos disjuntos com $|A| = n$ e $|B| = m$. Considere a coleção

$$\mathcal{F} = \{C \subseteq A \cup B \mid |C| = r\}$$

Conte os elementos de $\mathcal{F}$ dividindo em casos, de acordo com quantos elementos eles têm em comum com A .

(b) *Demonstração utilizando o Binômio de Newton:* Considere

$$(1+x)^{n+m} = (1+x)^n (1+x)^m,$$

expanda os 3 binômios, e compare o coeficiente de x^r nos dois lados da igualdade.

(c) O objetivo deste item é mostrar uma maneira diferente de provar a mesma identidade acima: *usando um diagrama de ruas e quadras*. Para simplificar, só se pede que você faça um caso particular.

No diagrama de quadras e ruas abaixo, considere todos os caminhos (de mínima distância) de O para A (na figura, caminhos indo sempre para cima e para a direita) e conte-os dividindo em casos, de acordo com o ponto onde cruzam a diagonal com os pontos marcados com quadrados, correspondendo às esquinas cuja distância de O é 8 quadras. Considerando todos os casos possíveis, obtenha um caso particular da identidade da questão anterior.

(d) Novamente, dividindo todos os caminhos (de mínima distância) de O para A em casos, de acordo com o ponto em que cruzam a diagonal de pontos circulados, obtenha uma igualdade

(a) Conte desta maneira o número de diferentes soluções da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \text{ onde cada } x_i \text{ é inteiro com } x_i \geq 0?$$

(b) Quantas diferentes combinações de moedas de 1, 5, 10, 25 e 50 centavos pode um cofrinho conter, sabendo que ao todo ele contém 20 moedas?

Problema 42.

Considere o lançamento de um dado n vezes e seja S a soma dos valores obtidos nos lançamentos. Seja x_i o resultado obtido no i -ésimo lançamento. Então o número de soluções da equação

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = S, \text{ com } 1 \leq x_i \leq 6, \text{ é igual a } \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{S-n}{6} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{S-6k-1}{n-1}.$$

Problema 43.

Um fazendeiro que dispõe de R\$ 60.000,00 pretende gastar essa importância na compra de cavalos e bois. Sabendo cada cavalo custa R\$ 700,00 e cada boi R\$ 650,00, obtenha uma equação diofantina que modele este problema.

- (a) Quantas e quais são as soluções desse problema?
- (b) Qual o número de bois e cavalos que ele deve comprar se quiser comprar a maior quantidade de animais?

Problema 44.

Sejam a e b inteiros positivos relativamente primos. Mostre que a equação $ax + by = c$ tem soluções inteiras não negativas para todo $c > ab - a - b$. E se $c = ab - a - b$?

Problema 45.

- (a) Um dado perfeito tem as faces marcadas com 1,1,2,2,3,3. O dado vai ser lançado duas vezes. Qual a probabilidade de que a soma dos resultados seja par?
- (b) E se o dado for lançado n vezes e n começar a crescer, o que acontece com esta probabilidade?

Sugestão: começar a calcular a probabilidade nos casos $n = 3, 4, 5$ e fazer uma conjectura.