V Bienal da SBM
Sociedade Brasileira de Matemática
UFPB - Universidade Federal da Paraíba
18 a 22 de outubro de 2010

ARITMÉTICA EM RETAS E CÔNICAS

RODRIGO GONDIM *

Muitos problemas concretos versam sobre quantidades inteiras: número de pessoas, de caixas, de latas, de objetos em geral; preços (em centavos), etc. A concepção e a solução de problemas nos quais as "quantidades" envolvidas são inteiras é bastante antiga e, há indícios, que estas ocupavam um lugar central no conhecimento matemático chinês, grego e árabe. Chamamos Equação Diofantina uma equação polinomial (em várias variáveis) com coeficientes inteiros e da qual procuramos obter soluções inteiras (ou racionais). O estudo de Equações Diofantinas é milenar e sua motivação inicial está ligada a tais problemas concretos cujas soluções são inteira. Pitágoras, Diofanto, Euclides, Fermat, Euler, Gauss dentre muitos outros, foram matemáticos intensamente preocupados com questões aritméticas e contribuíram para o desenvolvimento deste ramo da Matemática, muitas vezes chamado Teoria dos Números ou, simplesmente, Aritmética.

Uma Equação Diofantina em duas variáveis representa uma curva no plano (dada implicitamente por essa equação cartesiana). Soluções inteiras (ou racionais) da Equação Diofantina corresponde a pontos com coordenadas inteiras (ou racionais) na curva em questão. Uma solução inteira (racional) de uma Equação Diofantina em duas variáveis é um par ordenado que chamaremos ponto inteiro (racional). O casamento entre a Aritmética e a Geometria foi muito bem sucedido e Fermat foi um dos pioneiros na utilização de métodos geométricos para resolver equações diofantinas.

Muitas importantes questões aritméticas de caráter qualitativo só puderam ser resolvidas graças a utilização de métodos geométricos (cada vez mais sofisticados) e o ramo da matemática que se ocupa desta interação é hoje chamado Geometria Aritmética. As principais questões qualitativas que podem ser feitas neste contexto são:

(i) Existência de ponto(s) racional(is);

(ii) Decisão entre a finitude ou infinitude do conjunto dos pontos racionais;

(iii) Existência de ponto(s) inteiro(s);

(iv) Decisão entre a finitude ou infinitude do conjunto dos pontos inteiros.

No caso das curvas todas essas questões já foram praticamente completamente respondidas, mas a tecnicalidade necessária para o entendimento das respostas (e também dos alguns enunciados de teoremas!!!) fogem completamente aos nossos objetivos. Algumas dessas questões foram respondidas no fim do século XX e estão relacionadas com a mais sofisticada matemática até então concebida. Para citar, o Último Teorema de Fermat (demonstrado por Wiles, A.) e o teorema de Faltings (sobre a finitude do conjunto de pontos racionais para curvas de gênero maior que 1) estão relacionados diretamente com algumas das questões propostas. Ambos os trabalhos renderam medalhas Fields a seus idealizadores.
Estaremos interessados em tratar alguns problemas aritméticos clássicos com uma abordagem geométrica elementar (e veremos que isso é efetivamente possível!!!). Os problemas específicos que abordaremos versam sobre a procura de soluções inteiras e/ou racionais em equações polinomiais a duas variáveis (com coeficientes inteiros) de graus um e dois. Geometricamente essas são as Retas e as Cônicas (daí o nome do minicurso, Aritmética em Retas e Cônicas).

*UFRPE, DM, Recife-PE, Brasil, e-mail: rodrigo.gondim.neves@gmail.com

As retas, tendo sido completamente entendidas a séculos, são classicamente chamadas Equações Diofantinas Lineares. Aqui, daremos um tratamento um pouco mais geométrico ao estudo de tais equações.
No caso das cônicas, além de resultados gerais, como o Método das Tangentes e das Secantes, de Fermat, faremos um estudo detalhado de dois problemas clássicos específicos: Inteiros que são Soma de dois Quadrados e as equações de Pell-Fermat. Para tratar esses problemas introduziremos a teoria de Minkowski no plano, de maneira auto contida. Por fim enunciaremos o princípio Local-Global para as cônicas cuja demonstração pode ser obtida a partir do teorema de Minkowski no espaço (cuja demonstração é analoga àquele do plano), mas não procederemos com a mesma. Daremos referências que seguem essa linha de raciocínio para os leitores que, porventura, quiserem dar continuidade ao estudo da assim chamada Geometria Aritmética.

Referências

[1] STEWART, I. N.; TALL, D. O. - *Algebraic number theory and Fermat's last Theorem*, A K Peters, Natick MA, 3rd Edition, 2002.
[2] CASSELS, J. W. S. - *Lectures on Elliptic Curves*, London Mathematical Society Student Texts, 24, 1991.
[3] GAMZON, A. - *The Hasse-Minkowski Theorem*, Honors Scholar Theses, University of Connecticut, 2006.
[4] BOREVICH, Z. I.; SHAFAREVICH, I. R. - *Number Theory*, Academic Press INc, Orlando Fl, 1966.
[5] GARCIA, A.; LEQUAIN, I. - *Elementos de Álgebra*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1996.
[6] HEFEZ, A. - *Iniciação à Aritmética*, PIC-OBMEP, Rio de Janeiro, 2010.
[7] MIALARET, M. - *O Princípio Local-Global*, Monografia de Conclusão de Curso, UFRPE, 2008.
[8] GONDIM, R. - *A Aritmética das Curvas Algébricas Planas de Gênero Zero*, Notas de Aula, 2007.
[9] LAGES LIMA, E. - Meu Professor de Matemátrica e outras Histórias, Coleção do Professor de Matemática, IMPA, Riode Janeiro, 2006.