

UM CONVITE AO ESTUDO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

FERNANDO DE ÁVILA SILVA^{*} & RICARDO PALEARI DA SILVA[†]

Faremos neste mini-curso uma apresentação da função exponencial em alguns contextos diferentes em que ela aparece, e para isso usaremos alguns conceitos, idéias e teorema básicos da análise real e da álgebra em um nível elementar.

Começaremos o estudo da função exponencial definida na reta real, motivada pelo problema de definir potências de números reais positivos:

Dados $x \in \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ e $r = m/n$ com $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{Z}$, definimos

$$x^r = \sqrt[n]{x^m}$$

E com esta definição podemos mostrar as seguintes propriedades:

1. $x^{r+s} = x^r \cdot x^s$.
2. $(x^r)^s = x^{r \cdot s}$.

Mas como podemos definir potências com expoentes quaisquer, como por exemplo $2^{\sqrt{3}}$, $\pi^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{5}^{\sqrt{6}}$, etc, de modo que a definição seja boa o suficiente para recuperar as definições de potências com expoente racional e que ainda tenha as mesmas propriedades 1. e 2.?

Para fazer isso, a idéia principal é aproximação. De fato, poderíamos tentar aproximar 2^π por uma potência do tipo 2^r , em que $r \in \mathbb{Q}$ é um número racional suficientemente próximo de π . Ou seja, a tentativa é calcular 2^π como um limite de potências racionais, em que as potências tem limite igual a π . Precisamos no entanto que este processo esteja bem definido, no sentido de não depender da escolha da sequência que aproxima π . Traduzindo este problema da potência para a linguagem de funções, queremos saber se é possível definir funções contínuas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (uma condição topológica) tais que $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para todos os $x, y \in \mathbb{R}$ (uma condição algébrica, de morfismos entre certos grupos). Assumiremos por um momento que tais funções existem e estudaremos o comportamento algébrico e o comportamento contínuo que elas devem ter. Concluindo o estudo com o seguinte teorema (que inclui também a diferenciabilidade de tais funções):

Teorema 0.1. *Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ um homomorfismo do grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$ no grupo multiplicativo $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ que é diferenciável em $x_0 = 0$ e seja $a := f(1)$. Valem as seguintes afirmações:*

1. *Se $a = 1$ então f é constante igual a 1.*
2. *Se $a \neq 1$ então f é bijetiva. Além disso, ela é estritamente crescente se $a > 1$ e estritamente decrescente se $0 < a < 1$.*
3. *$f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e vale $f^{(n)}(x) = f'(0)^n \cdot f(x)$ para todos $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.*

^{*}Universidade Federal do Paraná, PPGMA, PR, Brasil, favilasi@gmail.com

[†]Universidade Federal do Paraná, PPGMA, PR, Brasil, ricardopaleari@gmail.com

Em particular, podemos perguntar se dentre estas funções, existe uma para a qual vale $f'(0) = 1$. Faremos uma primeira estimativa de qual deveria ser o valor de a para que isso aconteça e a seguir faremos de fato a demonstração da existência de tal função usando o Teorema de Existência e Unicidade de equações diferenciais ordinárias, interpretando este problema como a procura de uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que seja solução do seguinte problema:

$$\begin{cases} f'(x) &= f(x) \\ f(0) &= 1 \end{cases}$$

Este problema está dentro das hipóteses do teorema de existência e unicidade que usaremos, e ele ainda nos fornece uma expressão em série de potências (Método de Picard):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

A qual define a função exponencial de base $e = f(1)$, o chamado Número de Euler, que daí pode ser estimado o quanto for necessário.

Em seguida, usando o Teorema da Função Inversa da Reta, faremos um breve estudo da sua função inversa, a função logaritmo na base e , mostrando um teorema análogo ao primeiro que foi mencionado sobre a função exponencial.

A seguir faremos uma demonstração clássica e elementar de que o número e é transcendente, provando em particular que é irracional.

A seguir definiremos, motivada pela expansão em séries de potências, a exponencial de matrizes, provando propriedades importantes, mostrando que algumas propriedades da exponencial da reta tem análogas para exponencial de matrizes e que algumas não tem. Pretendemos falar um pouco da teoria de espaços normados anteriormente. Comentaremos também sobre a importância da exponencial de matrizes na teoria de sistemas de EDO e um pouco da sua importância na teoria de operadores lineares em geral. Calcularemos a exponencial de matrizes em alguns exemplos interessantes. Um dos exemplos é o seguinte, se

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

então

$$\exp(tX) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) & 0 \\ -\sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Terminaremos comentando que esse exemplo acima (e mais outros dois que pretendemos fazer) é interessante em geometria clássica (euclidiana, esférica e hiperbólica) e que esta exponencial está nos fornecendo uma reta na geometria esférica (um círculo máximo).

Referências

- [1] BARTLE, R. G. - *Elementos de Análise Real.*, Editora Campus. Rio de Janeiro , 1983.
- [2] DOERING, C. I., LOPES, A. O . - *Equações Diferenciais Ordinárias*, Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro, 2007.
- [3] FIGUEIREDO, D. G. - *Números Irracionais e Transcendentes.*, Coleção Iniciação Científica, Editora SBM. Rio de Janeiro, 2002.