V Bienal da SBM
Sociedade Brasileira de Matemática
UFPB - Universidade Federal da Paraíba
18 a 22 de outubro de 2010

Equações Diferenciais Parciais de Primeira Ordem

Maria Lewtchuk Espindola [*]

Sumário

[*] Universidade Federal da Paraíba, DM, PB, Brasil, mariia@mat.ufpb.br

Objetivos e conteúdo

O curso inicia pela apresentação da origem das EDPs de primeira ordem, após ter sido dada a definição geral de EDPs.

Na sequência são discutidos os diversos tipos de soluções: geral, completa, particular e envoltória.

O objetivo principal do curso é abordar certos métodos clássicos de solução de EDPS de primeira ordem lineares e não lineares, destacando o método de Charpit com diversas aplicações a diferentes tipos de equações.

- Citando referências: Sneddon [1]; Forsyth [2].

Em seguida é apresentado um método novo de obtenção de soluções gerais de determinados tipos de EDPS lineares ou não, desenvolvidos por Espindola [3,4]. É interessante ressaltar que este método fornece sempre uma solução geral, i.e., que depende de uma função arbitrária, portanto o método pode ser aplicado a qualquer problema específico, pois não existem restrições sobre as condições que este irá impor, a não ser aquelas devidas a cálculos algébricos específicos, nos quais os métodos numéricos conhecidos podem ser aplicados.

É importante ressaltar que quase todos os livros que abordam EDPs, geralmente se dedicam as de segunda ordem: equação de Laplace, equação de calor e equação de onda. No entanto, em muitas situações aparecem EDPs de primeira ordem em Fisica Matemática ou em outroa ramos da Matemática, e alguns casos seu entendimento é absolutamente fundamental. Como exemplo, cito o caso do desenvolvimento da teoria de Hamiltonização alternativa em Fundamentos da Mecânica Analítica, a qual é baseada na análise matemática dos diversos tipos de soluções de EDPS, demonstrando a inexistência da descrição de Hamilton em alguns casos, como o da Mecânica Singular, por causa do uso da solução envoltória, cuja existência está atrelada a condição de não linearidade da EDP, veja em Espindola [5,6,7]. Na Matemática temos como um dos exemplos, os sistemas dinâmicos que, na maioria dos casos, são compostos por sistemas de EDPs de primeira ordem.

1 Equações diferenciais parciais de primeira ordem

1.1 Introdução

As equações diferenciais parciais surgem em problemas de Física ou Matemática quando estão envolvidas duas ou mais variáveis independentes. Nestes casos qualquer variável dependente é uma função de mais de uma variável, e portanto possui derivadas parciais.

Equações que apresentam derivadas parciais são denominadas de *equação dife- renciais parciais*, ou *EDPs*, que podem ser escritas como

$$F\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}, ..., \frac{\partial u}{\partial x}, u, x\right) = 0, \quad u = u(x) = u(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{1.1}$$

Como, por exemplo:

$$\mathrm{div}\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad - \quad \text{equação de continuidade;}$$

$$\vec{\nabla}^2 u = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad - \quad \text{equação de Laplace bidimensional;}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \vec{\nabla}^2 u \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad - \quad \text{equação de onda unidimensional;}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \vec{\nabla}^2 u \;\Rightarrow\; \frac{\partial u}{\partial t} = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad - \quad \text{equação de calor unidimensional;}$$

$$H(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad - \quad \text{equação de Hamilton-Jacobi unidimensional.}$$

A *ordem* da derivada mais elevada é chamada de *ordem da equação diferencial parcial.* A EDP é *linear* se ela for de primeiro grau na variável dependente e suas derivadas. Se cada termo da equação diferencial parcial tiver a variável dependente ou suas derivadas é dita *homogênea*.

Para o caso de uma função de duas variáveis independentes $z = z(x, y)$ convenciona-se definir

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}\,, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}\,, \tag{1.2}$$

então a equação diferencial parcial de primeira ordem é reescrita como

$$f(p, q, x, y, z) = 0. \tag{1.3}$$

1.2 Origens

É interessante antes de discutirmos as soluções das equações do tipo de (2.3), examinar como podemos gerá-las. Considere, por exemplo, a equação que representa todo o conjunto de esferas cujos centros estão sobre o eixo z

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 = a^2, \tag{1.4}$$

onde as constantes a e c são arbitrárias. Diferenciando esta equação com relação a x e y obtemos

$$x + p(z - c) = 0, \quad y + q(z - c) = 0.$$

Eliminando a constante arbitrária c destas duas equações obtemos

$$yp - xq = 0 \tag{1.5}$$

que é de primeira ordem. Podemos então afirmar o conjunto de todas as esferas são caracterizadas pela equação (2.5). Por outro lado se agora tomamos o conjunto de cones retos circulares cujo eixo coincide com o eixo z

$$x^2 + y^2 = (z - c)^2 tg^2\alpha,$$

onde c e α são constantes arbitrárias e derivando e eliminando as constantes iremos obter a equação (2.5). [Prove!]

Se analisarmos o que estas superfícies tem em comum percebemos que ambas são superfícies de revolução cujo eixo de simetria é Oz. Como qualquer superfície de revolução em torno deste eixo é representada pela equação

$$z = f(x^2 + y^2)$$

então podemos mostrar que todas elas são caracterizadas pela mesma equação (2.5). [Demonstre!]

Com este exemplo observa-se que agora a solução geral depende de uma função arbitrária. Podemos generalizar este resultado primeiramente imaginando uma *solução completa*

$$F(x, y, z, a, b) = 0, \tag{1.6}$$

onde a e b são constantes arbitrárias. Se agora derivamos esta equação em relação a x e y obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p\,\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + q\,\frac{\partial F}{\partial z} = 0. \tag{1.7}$$

As equações (2.6) e (2.7) constituem um sistema de equações a partir do qual podemos eliminar as constantes e obter uma equação do tipo da equação (2.3). Se por outro lado generalizamos este resultado considerando que a *solução geral* como

$$F(x, y, z) = 0, \tag{1.8}$$

então suas derivadas são

$$F_x + p\,F_z = 0, \qquad F_y + q\,F_z = 0. \tag{1.9}$$

as equações (2.8) e (2.9) formam um sistema de equações a partir do qual, em princípio, podemos novamente chegar a uma EDP do tipo (2.3).

Podemos concluir que as EDPS de primeira ordem possuem soluções gerais que dependem de uma função arbitrária, da mesma forma que as EDOs de primeira ordem dependem de uma constante arbitrária. Portanto podemos concluir que as soluções completas das equações diferenciais parciais de primeira ordem representam famílias de superfícies (como no caso das EDOs as soluções representam famílias de curvas).

A análise das soluções possíveis, i.e., da existência de soluções numa determinada região R para um problema específico que obedece a determinadas condições: iniciais e de contorno (sobre ∂R) é conhecida como o problema de Cauchy [**?**].

1.3 Tipos de soluções: geral, completa, particular e envoltória

Como pudemos observar nas seções anteriores determinamos vários tipos de soluções das equações diferenciais parciais de primeira ordem, obtivemos soluções: gerais, completas, particulares e comentamos sobre a existência de soluções envoltórias.

Para a EDP de primeira ordem

$$f(p_{\,i}, x_{\,i}, u) = 0, \quad u = u(x_1, x_2, ..., x_n) = u(x), \quad i = 1, ..., n, \tag{1.10}$$

podemos obter um dos tipos de solução:

(a) *solução geral* - dependendo de uma função arbitrária;

(b) *solução completa* - dependendo de n constantes arbitrárias;

(c) *solução particular* - independente de constantes ou função arbitrárias;

(d) *solução envoltória* - independente da solução geral.

Os três primeiros tipos estão correlacionados, pois da solução geral se obtém qualquer um dos dois seguintes, i.e., a solução completa e a particular podem ser obtidas da geral. Por outro lado, quando estamos envolvido com a solução de um problema específico, com as condições iniciais e de contorno dadas, podemos obter uma solução particular única a partir da solução geral. No entanto, este não é o caso quando temos somente uma solução completa, desde que as condições dadas no problema podem não ser satisfeitas por esta solução, pois esta já é uma das possíveis soluções "particulares"obtidas da geral.

As soluções envoltórias - (d) - não estão incluídas na solução geral, desde que são as superfícies que envolvem esta, e só existe para EDPs não lineares.

1.4 Soluções Envoltórias

Como o próprio nome induz são funções que envolvem outras soluções e que satisfazem a EDP original. Se quisermos justificar de forma geométrica, podemos dizer que uma solução completa,

$$\varphi(u, x, a) = 0, \qquad x = x_1, ..., x_n, \qquad a = a_1, ..., a_n, \tag{1.11}$$

onde $a_{\,i}$ são constantes, é uma família de hipersuperfícies no conjunto das soluções completas obtidas da solução geral. Estas famílias de superfícies possuem superfícies envoltórias, que podem ser obtidas impondo que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = 0. \tag{1.12}$$

A obtenção das superfícies envoltórias é feita determinando os $a'_i s$ a partir do sistema de equações formado pelas equações (2.35) e da equação (2.34) obtém-se então a superfície envoltória dada por

$$\varphi(u(x), x, a(x)) = 0. \tag{1.13}$$

Por exemplo, considerando a EDP linear $yp - xq = 0$, temos que a sua solução geral é $z = \phi(x^2 + y^2)$. A partir desta escolhemos uma solução completa que representa uma família de esferas com o centro sobre o eixo z

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = 1. \tag{1.14}$$

A condição de envoltória (2.35) nos fornece a equação $\partial\varphi/\partial a = 2(z - a) = 0$, portanto a solução envoltória é a superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$. Facilmente se verifica que esta é solução da EDP dada, mas não está contida na solução geral.

2 Métodos clássicos de resolução de EDPS de primeira ordem

2.1 EDPs Lineares

São equações diferenciais parciais da forma

$$P\,p + Q\,q = R, \tag{2.15}$$

onde P, Q e R são função das variáveis x, y e z. Como Lagrange foi o primeiro a estudar este tipo de equação ela passou a ser chamada de *equação de Lagrange*. Podemos generalizar esta equação para n variáveis independentes como

$$\sum_{i=1}^{n} F_i\, p_i = G, \quad i = 1, ..., n \tag{2.16}$$

onde F_i e G são funções das variáveis independentes $x_1, x_2, ..., x_n$ e da variável dependente z, sendo que $p_i = \partial z/\partial x_i$. É importante ressaltar que o termo *linear* significa que as derivadas p_i aparecem em primeira ordem, mas os seus coeficientes são quaisquer funções das variáveis.

A *solução geral* da EDP linear (2.10) é

$$G(u, v) = 0, \tag{2.17}$$

onde G é uma função arbitrária de $u(x, y, z) = c_1$ e $v(x, y, z) = c_2$, que por sua vez são as *integrais intermediárias* do *sistema auxiliar* de equações

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}. \tag{2.18}$$

O que é facilmente demonstrado (Demonstre!) [**?**].

Vamos considerar como exemplo da aplicação do método a EDP

$$x^2 p + y^2 q = xz$$

O sistema auxiliar

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{xz},$$

fornece as integrais intermediárias como

$$x^{-1} - y^{-1} = c_1, \qquad z/x = c_2$$

e a solução geral pode ser dada como

$$G(x^{-1} - y^{-1}, z/x) = 0$$

ou

$$z = x\, g(x^{-1} - y^{-1}).$$

Este método pode ser generalizado para EDPs do tipo (2.11) [**?**].

Ainda podemos considerar o caso que a solução completa da EDP (2.10) é a requerida, isto é, uma solução que obedeça a determinadas condições, como, por exemplo, soluções que passem por uma determinada curva dada pelas suas equações paramétricas: $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$. Considerando a substituição destas equações nas soluções intermediárias do sistema auxiliar

$$u(x,y,z) = u(x(t),y(t),z(t)) = c_1 \quad v(x,y,z) = v(x(t),y(t),z(t)) = c_2, \tag{2.19}$$

obtemos um sistema a partir do qual eliminamos a variável t e obtemos uma solução completa para o problema como $F(x,y,z,c_1,c_2) = 0$.

2.2 EDPs Não Lineares

A obtenção de soluções gerais para equações diferenciais parciais não lineares apresenta uma grande dificuldade, existindo vários métodos particulares para determinados tipos de equação, que obtém soluções completas. Mas com frequência existem métodos que fornecem soluções completas (integrais) para as equações (2.3) como

$$F(x,y,z,a,b) = 0. \tag{2.20}$$

A partir desta podemos obter outras soluções particulares que obedeçam a determinadas condições iniciais e de contorno, ou então, aquelas obtidas através de condições de envoltória sobre as superfícies representadas por (2.15).

Existe um método de solução de EDPs não lineares, baseado principalmente em ideias geométricas, devido a Cauchy e é denominado de método das características. Neste método também obtemos soluções particulares únicas para as condições dadas de um problema específico [**?**].

A fim de apresentar o método de Charpit vamos analisar as condições em que todas as soluções de uma determinada equação diferencial parcial

$$f(p,q,x,y,z) = 0 \tag{2.21}$$

são também soluções da equação

$$g(p,q,x,y,z) = 0. \tag{2.22}$$

Neste caso as equações são denominadas de *compatíveis*.

Se

$$J \equiv \frac{\partial(f,g)}{\partial(p,q)} \neq 0 \tag{2.23}$$

então a partir do sistema de equações (2.16) e (2.17) podemos obter as seguintes expressões explícitas para p e q

$$p = \phi(x,y,z) \qquad q = \psi(x,y,z). \tag{2.24}$$

A condição para que o par de EDPs seja compatível é equivalente a condição de que o sistema (2.19) seja completamente integrável, i.e., que a equação

$$\phi\, dx + \psi\, dy = dz \tag{2.25}$$

seja integrável. A condição de integrabilidade é dada por [**?**]

$$[f,g] = 0, \tag{2.26}$$

onde

$$[f,g] \equiv \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,p)} + p\,\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,p)} + \frac{\partial(f,g)}{\partial(y,q)} + q\,\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,q)}. \tag{2.27}$$

(Prove!)

2.3 Método de Charpit

Um método para resolver a EDP

$$f(p, q, x, y, z) = 0, \tag{2.28}$$

linear ou não, foi proposto por Charpit. A ideia fundamental do método de Charpit é a introdução de uma segunda EDP de primeira ordem

$$g(p, q, x, y, z, a) = 0, \tag{2.29}$$

que contém uma constante arbitrária a e que deve satisfazer as seguintes condições:

(a) As equações (2.23) e (2.24) podem ser resolvidas fornecendo

$$p = p(x, y, z, a) \qquad q = q(x, y, z, a);$$

(b) A seguinte equação é integrável

$$dz = p(x, y, z, a)dx + q(x, y, z, a)dy. \tag{2.30}$$

Quando tal função g é encontrada a solução da equação (2.25)

$$F(x, y, z, a, b) = 0, \tag{2.31}$$

contendo duas constantes arbitrárias será uma solução completa da equação (2.23).

O principal problema a ser resolvido é a determinação da segunda equação (2.23), mas este já foi resolvido no final da seção anterior, i.e., o que precisamos determinar é uma equação $g = 0$ compatível com a equação dada $f = 0$. As condições são dadas pelas equações (2.18) e (2.21). Expandindo a última equação observamos que ela é equivalente a EDP linear

$$f_p\,\frac{\partial g}{\partial x} + f_q\,\frac{\partial g}{\partial y} + (pf_p + qf_q)\frac{\partial g}{\partial z} - (f_x + pf_z)\frac{\partial g}{\partial p} - (f_y + qf_z)\frac{\partial g}{\partial q} = 0 \tag{2.32}$$

para a determinação de g. Agora precisamos encontrar uma solução desta equação, a mais simples possível, para o que iremos usar o sistema de equações subsidiário

$$\frac{dx}{f_p} = \frac{dy}{f_q} = \frac{dz}{p\,f_p + q\,f_q} = \frac{dp}{-(f_x + p\,f_z)} = \frac{dq}{-(f_y + q\,f_z)}. \tag{2.33}$$

Estas equações são chamadas de equações de Charpit. A partir das soluções destas equações se obtém p e q as quais substituídas em (2.25) permitem que se determine a sua solução. É interessante observar que, geralmente, não é necessário resolver todas as equações de Charpit, mas somente aquelas necessárias para isolar p e q.

Como exemplo vamos considerar alguns tipos de equações que podem ser facilmente resolvidos pelo método de Charpit.

(a) *Equações envolvendo somente p e q.* Para estas equações temos

$$f(p, q) = 0. \tag{2.34}$$

As equações de Charpit são

$$\frac{dx}{f_p} = \frac{dy}{f_q} = \frac{dz}{p\,f_p + q\,f_q} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0}.$$

Uma solução direta é

$$p = a,$$

e de (2.29)

$$q = Q(a).$$

Portanto a solução desta equação é

$$z = ax + Q(a)y + b,$$

onde b é uma constante.

(b) *Equações que não envolvem as variáveis independentes.* A EDP neste caso é

$$f(p, q, z) = 0, \tag{2.35}$$

que possui o sistema subsidiário

$$\frac{dx}{f_p} = \frac{dy}{f_q} = \frac{dz}{p\, f_p + q\, f_q} = \frac{dp}{-p\, f_z} = \frac{dq}{-q\, f_z}.$$

Das duas últimas obtemos a relação

$$p = aq,$$

que substituída em (2.30) permite a determinação de p e q. O restante do proce- dimento é idêntico ao de (a).

(c) *Equações Separáveis.*Uma equação diferencial parcial é dita *separável* se puder ser escrita na forma

$$f(x, p) = g(y, q). \tag{2.36}$$

As equações de Charpit são

$$\frac{dx}{f_p} = \frac{dy}{-g_{\,q}} = \frac{dz}{p\, f_p - q\, g_{\,q}} = \frac{dp}{-f_x} = \frac{dq}{-g_{\,y}}.$$

Uma das equações que podem ser obtidas é $f_p\, dp + f_x\, dx = 0$, cuja solução é $f(x, p) = a$, e portanto $g(y, q) = a$ formam um sistema para determinar p e q, e assim se obtém uma solução completa da equação procedendo da mesma maneira que nos casos anteriores.

Como exemplo, vamos considerar a EDP $p^2 y(1 + x^2) = qx^2$. Esta pode ser reescrita na forma separável como

$$\frac{p^2(1 + x^2)}{x^2} = \frac{q}{y}.$$

Das equações de Charpit resulta que

$$p = \frac{ax}{\sqrt{1 + x^2}}, \qquad q = a^2 y$$

e portanto uma solução completa é

$$z = a\sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2}a^2 y^2 + b,$$

onde a e b são constantes. (Prove!)

(d) *Equações de Clairaut.* Uma EDP é dita de Clairaut se pode ser escrita na forma

$$z = xp + yq + g(p, q). \tag{2.37}$$

O sistema subsidiário é

$$\frac{dx}{x + g_{\,p}} = \frac{dy}{y + g_{\,q}} = \frac{dz}{px + yq + p\, g_{\,p} + q\, g_{\,q}} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0}.$$

Logo temos $p = a,\ q = b$ onde $a,\ b$ são constantes, substituindo em (2.32) obtemos a solução completa

$$z = ax + by + f(a, b).$$

3 Método de obtenção de soluções gerais para EDPS, lineares ou não, dos tipos: $\mathbf{F(u_x, u_y) = 0}$; $\mathbf{F(f(x)u_x, u_y) = 0}$ (ou $\mathbf{F(u_x, h(y)u_y) = 0}$); $\mathbf{F(f(x)u_x, u_y) = G(x)}$

.

3.1 Solução Geral das EDPs: $\mathbf{F(u_x, u_y) = 0}$; $\mathbf{F(f(x)u_x, u_y) = 0}$ (ou $\mathbf{F(u_x, h(y)u_y) = 0}$)

.

3.1.1 Introdução

Tanto o método de Charpit, como outros métodos, fornecem somente uma solução integral aplicados a EDPs, lineares ou não, dos tipos:

$$F(p, q) = 0; \qquad F(f(x)p, q) = 0 \qquad (ou \quad F(p, h(y)q) = 0)$$

onde $p = \partial u/\partial x$, $q = \partial u/\partial y$ e $u = u(x, y)$ [**?**, **?**, **?**]. No método proposto aqui obtém-se infinitas soluções integrais, i.e., a solução geral na forma implícita e em determinados casos a solução geral de forma explícita.

O procedimento desenvolvido tem como base uma transformação de Le- gendre e a utilização de um teorema para formas diferenciais Pfaffianas[**?**] que fornece a condição para que estas se tornem integráveis.

Na extensão do método podemos obter soluções para EDPs de segunda ordem de um dos tipos

$$F(r, s) = 0 \quad e \quad F(s, t) = 0, \quad r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad e \quad t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

desde que estas podem ser transformadas nas EDPs acima.

Outra extensão possível é para EDPs de primeira ordem com diversas variáveis

$$F(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) = 0, \quad p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad q_i = \frac{\partial u}{\partial y_i},$$

$$u = u(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n).$$

3.1.2 Solução Geral para a EDP $\mathbf{F(p, q) = 0}$

Considere a EDP de primeira ordem $F(p, q) = 0$, onde $p = \frac{\partial u}{\partial x}$, $q = \frac{\partial u}{\partial y}$ e $u = u(x, y)$. A forma diferencial Pfaffiana para u é

$$du = p\,dx + q\,dy. \tag{3.38}$$

Aplicando uma transformação de Legendre obtemos

$$d(xp + yq) - du - xdp - ydq = 0.$$

Desde que $dF = F_p dp + F_q dq = 0$, logo $dp = -(F_q/F_q)dq$ então

$$d(xp + yq) - du + \left(x\frac{F_q}{F_p} - y \right) dq = 0\,. \tag{3.39}$$

Sendo esta uma forma diferencial Pfaffiana pode ser aplicado o teorema[**?**]:

Teorema 3.1. *A condição necessária e suficiente para que a forma diferencial Pfaffiana* $\vec{X} \cdot \vec{dr} = 0$ *seja integrável é que* $\vec{X} \cdot rot\, \vec{X} = 0$.

Que neste caso resulta em

$$\vec{X}\cdot rot\,\vec{X} = -\left(\frac{\partial}{\partial(xp+yq)}+\frac{\partial}{\partial u}\right)\left(x\frac{F_q}{F_p}-y\right)=0,$$

que integrada fornece

$$u-xp-yq=\phi(q). \tag{3.40}$$

Substituindo na equação (2.2) obtém-se

$$\left(x\frac{F_q}{F_p}-y\right)=-\phi'(q). \tag{3.41}$$

A solução geral da equação diferencial é dada pela equação (2.3) na qual q é determinado a partir de (2.4). Esta é uma solução geral desde que ela possui uma função arbitrária $\phi(q)$, i.e., a cada forma arbitrária de $\phi(q)$ a equação (2.4) e a EDP original formam um sistema de equações algébrico que determina $q=q(x,y)$ e $p=p(x,y)$, que uma vez substituídos em (2.3) fornecem uma solução da EDP.

Em alguns casos podemos explicitar $p=f(q)$ (ou $q=g(p)$) e a solução geral da EDP a partir de (2.3) fica

$$u=x\,f(q)+yq+\phi(q), \tag{3.42}$$

com a condição que é obtida de (2.4)

$$xf_q+y=-\phi'(q). \tag{3.43}$$

Um exemplo da aplicação do método no caso em que podemos explicitar p é a equação $F(p,q)=p-Bq+A=0$, onde A,B são constantes. Portanto $p=f(q)=Bq-A$, e $f_q=B$ a solução será de (2.5)

$$u=xp+yq-\phi(q)=x(Bq-A)+yq-\phi(q),$$

onde devemos substituir $q=q(x,y)$ determinada a partir de (2.6).

Neste caso (2.6) fica $xf_q+y=Bx+y=\phi'(q)$, logo $q=\psi(Bx+y)$ e a solução geral da EDP é dada por

$$u=Ax+(Bx+y)\,\psi(Bx+y)-\phi^{-1}(\psi(Bx+y))=Ax+\Phi(Bx+y).$$

3.1.3 Solução Geral para a EDP $\mathbf{F(f(x)p,q)=0}$ (ou $\mathbf{F(p,h(y)q)=0}$)

Utilizando um procedimento idêntico ao da seção anterior, explicitamos a partir da EDP $p=G(q)/f(x)$ substituímos na forma diferencial e aplicamos uma transformação de Legendre, obtendo

$$du=d[H(x)G(q)+yq]-[H(x)G'(q)+y]dq,$$

onde $H(x)=x/f(x)$.

Esta é uma forma diferencial Pfaffiana e a sua condição de integrabilidade obtida a partir do Teorema 2.1 é

$$H(x)G'(q)+y=\phi'(q). \tag{3.44}$$

Portanto a solução geral da EDP será

$$u=H(x)G(q)+yq-\phi(q), \tag{3.45}$$

onde $\phi(q)$ é uma função arbitrária que uma vez escolhida irá determinar o valor de $q=q(x,y)$ a partir da equação (3.7).

De maneira análoga se obtém a solução geral de $F(p,h(y)q)=0$. Se $q=G(p)/h(y)$ então a solução geral é dada por

$$u=xp+G(p)H(y)-\phi(p),$$

onde $H(y)=y/h(y)$ e a condição de integrabilidade $\phi'(p)=G'(p)H(y)+x$.

3.1.4 Solução Geral para as EDPs: $\mathbf{F(r,s)=0}$ e $\mathbf{G(s,t)=0}$

Na extensão do método podemos obter soluções para EDPs de segunda ordem de um dos tipos

$$F(r,s)=0 \quad e \quad G(s,t)=0,$$

onde

$$r=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad s=\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad e \quad t=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

desde que estas podem ser transformadas nas EDPs acima.

Com esse intuito basta fazer as transformações

$$P=\frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q=\frac{\partial u}{\partial y}.$$

No caso da EDP $F(r,s)=0$ resulta em

$$F(\frac{\partial P}{\partial x},\frac{\partial P}{\partial y})=F(p,q)=0,$$

e para a EDP $G(s,t)=0$ obtemos

$$G(\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial y})=G(p,q)=0.$$

Portanto ambas recaem no caso acima descrito $f(p,q)=0$, § 4.3.

3.2 Solução Geral $F(\mathbf{f(x)u_x,u_y})=\mathbf{G(x)}$ - Equação de Hamilton Jacobi

Considere a mais geral equação de Hamilton-Jacobi para um sistema conservativo não relativístico unidimensional

$$a(x)\,\frac{\partial S}{\partial x}+V(x)-\frac{\partial S}{\partial t}=0,$$

ou equivalentemente,

$$ap^2+V-q=0, \tag{3.46}$$

onde $p=\frac{\partial S}{\partial x}$ e $q=\frac{\partial S}{\partial t}$.

Portanto

$$dS=pdx+qdt=d(px+qt)-xdp-tdq, \tag{3.47}$$

onde utilizamos uma transformação semelhante a de Legendre.

Substituindo p obtido a partir de (1) obtemos

$$dS=d\left(x\sqrt{(q-V)/a}+qt\right)-\frac{x(a'V-aV'-qa')}{2\sqrt{a(q-V)}}dx-\left(t+\frac{x}{2\sqrt{a(q-V)}}\right)dq, \tag{3.48}$$

onde $a'=da/dx$ e $V'=dv/dx$. Integrando obtemos

$$S(x,t)=x\sqrt{(q-V)/a}+qt-F(x,q), \tag{3.49}$$

sendo F tal que

$$\frac{\partial F}{\partial q} \;=\; t+\frac{x}{2\sqrt{a(q-V)}}, \tag{3.50}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \;=\; \frac{x(a'V-aV'-qa')}{2\sqrt{a(q-V)}} \;\equiv\; H(x,q). \tag{3.51}$$

A integração da Eq. (6) conduz a

$$F = \int H(x,q)dx + G(q),$$

onde G é uma função arbitrária. Usando este resultado em (5) obtemos a equação que define a variável q como uma função de x e t, para cada escolha arbitrária da função G:

$$\int \frac{\partial H}{\partial q}dx + G'(q) = y + \frac{x}{2\sqrt{a(q-V)}}. \tag{3.52}$$

Então S, fornecido por (4) é uma função de x e t. Facilmente se comprova que a solução S resolve a equação (4) e como possui uma função arbitrária é portanto a solução geral de (1).

É interessante ressaltar que no método de separação de variáveis aplicados a equação de Hamilton-Jacobi as soluções usuais são obtidas fazendo a hipótese de que $q = constante$ (i.e., $dq = 0$, $S(x,t) = W(x) + C(t)$) a qual não admite a obtenção de uma solução geral.

Como primeiro exemplo vamos considerar uma partícula livre descrita pela equação de Hamilton-Jacobi como ($a = constante$)

$$a\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial S}{\partial t} = ap^2 - q = 0,$$

A partir de (4) se obtém a solução

$$S = x\sqrt{q/a} + qt - F.$$

onde a função F é determinada a partir do sistema obtido de (5) e (6)

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial q} &= t + \frac{x}{2\sqrt{aq}},\\ \frac{\partial F}{\partial x} &= 0.\end{aligned}$$

Cuja solução é

$$\begin{aligned}F &= G(q),\\ G'(q) &= t + \frac{x}{2\sqrt{aq}}.\end{aligned}$$

Esta equação fornece a cada escolha da função arbitrária G a variável q como uma função de x e t. Por exemplo, se $G = Cq$ então

$$q = x^2/4a(C-t)^2,$$

logo

$$S(x,t) = x^2/4a(C-t). \tag{3.53}$$

Esta solução foi previamente obtida utilizando o conhecimento do movimento da partícula [**?**], o que não foi necessário no nosso método.

A solução $x\sqrt{C/a} + Ct$ obtida pelo método de separação de variáveis é obtida substituindo $dq = 0$ em (3).

Outro exemplo interessante é a equação de Hamilton-Jacobi correspondente ao problema do oscilador harmônico que (em unidades convenientes) é dada por

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + x^2 - \frac{\partial S}{\partial t} = p^2 + x^2 - q = 0.$$

Sua solução é

$$S(x,t) = qt + \frac{1}{2}x\sqrt{q-x^2} + \frac{q}{2}\, sen^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}}\right) - G(q),$$

onde $q = q(x,t)$ é obtido da equação

$$t + \frac{1}{2}x\sqrt{q - x^2} = G'(q) + \frac{q}{2}\, sen^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}}\right),$$

para cada escolha da função arbitrária G.

A solução com variáveis separáveis $(q = C)$ é

$$S(x,t) = \frac{1}{2}x\sqrt{C - x^2} + Ct - \frac{C}{2}\, sen^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{C}}\right).$$

3.3 Extensões e generalizações possíveis

Como este procedimento não apresenta quaisquer restrições quando aplicado a diferentes tipos de EDPs, então podemos concluir que de fato é um método bastante geral. Ao passo que este fornece sempre soluções dependentes de uma função arbitrária nos permite afirmar que este pode ser aplicado a qualquer problema, pois não existem restrições sobre as condições que este irá impor, a não ser aquelas devidas a cálculos algébricos específicos, nos quais os métodos numéricos conhecidos podem ser aplicados. Numa abordagem futura poderia se tentar a extensão deste método para um sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem, como por exemplo, os sistemas dinâmicos.

Referências

[1] Sneddon, I. - *Elements of partial differential equations.*, McGraw-Hill, Kogakusha, First edition, 1957.

[2] Forsyth, A. R. - *A treatise on differential equations.*, McMillan, London, First edition, 1903.

[3] Espindola, M. L. - *Método de Solução das EDPS :* $F(u_x, u_y) = 0$; $F(f(x)u_x, u_y) = 0$; $F(u_x, h(y)u_y) = 0$, **84**, Res. II ENAMA, 2008.

[4] Espindola, M. L. - *Solução Geral da Equação de Hamilton-Jacobi Unidimensional*, **64**, Res. III ENAMA, 2009.

[5] Espindola, M. L.; Espindola, O. e Teixeira, N. L. - *Hamiltonization as a two fold procedure*, Hadronic J., **9**, 121, 1986.

[6] Espindola, M. L.; Espindola, O. e Teixeira, N. L. - *Hamiltonization for singular and non singular Mechanics*, J. Math. Phys., **28**, 807, 1986.

[7] Espindola, M. L.; Espindola, O. e Teixeira, N. L. - *Linearization of the Hamilton-Jacobi equation*, J. Math. Phys., **28**, 1754, 1986.