ABORDAGEM CRÍTICA SOBRE O ENSINO DE LIMITE

Limite

Este trabálho, mostra uma definição de limite mais compreensiva do que nos livros de Cálculo. Para tanto, a mesma, será dividida em partes: primeiro, uma definição intuitiva, depois, uma definição preliminar e, logo após, a definição definitiva utilizando ε e δ.

Inicialmente, vejamos intuitivamente o que é limite.

Consideremos o caso em que uma pessoa esteja a uma distância d de uma parede (Figura 1) e queira se deslocar até ela, da seguinte maneira: anda metade da distância e pára; depois metade do que faltou e pára; e assim sucessivamente.

Observemos que cada vez que a pessoa percorre metade do percusso, ela se aproxima cada vez mais da parede, podendo chegar muito perto, mas jamais chegará à parede. Neste sentido diremos que a parede é o limite do percurso dessa pessoa, para expressar que a pessoa pode se aproximar a qualquer distância da parede, mais jamais chegará a parede.

Limites Históricos

1°) Consideremos o problema de encontrar o comprimento do círculo de raio r.

Arquimedes para avaliar a razão da circunferência para o diâmetro de um círculo, calculou os perímetros dos polígonos regulares inscrito e circunscrito, começando com o hexágono regular e dobrando sucessivamente o número de lados até chegar a noventa e seis lados. Aqui, faremos uma aproximação melhor tomando um número n qualquer de lados, e depois tomaremos n ao infinito do seguinte modo: vamos calcular o perímetro do polígono regular inscrito de n lados no círculo de raio r (Figura 2).

Obsevermos que o perímetro do polígono é $P = n \cdot l_n$. Usando a lei dos senos no triângulo da figura 2, temos

$$\frac{l_n}{\text{sen}\theta_n} = \frac{r}{\text{sen}\alpha}.$$

Constatemos também, que $2\alpha = 180^o - \theta_n$, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o, o que nos dá $\alpha = 90^o - \dfrac{\theta_n}{2}$. Portanto

$$l_n = \frac{r\ \text{sen}\theta_n}{\text{sen}\alpha} = \frac{r\ \text{sen}\theta_n}{\text{sen}\left(90^o - \dfrac{\theta_n}{2}\right)} = \frac{r\ \text{sen}\theta_n}{\cos\dfrac{\theta_n}{2}}.$$

Usando o fato de que $\text{sen}\theta = 2 \cdot \text{sen}\dfrac{\theta}{2} \cdot \cos\dfrac{\theta}{2}$, que temos

$$l_n = \frac{r \cdot 2 \cdot \text{sen}\left(\dfrac{\theta_n}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{\theta_n}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\theta_n}{2}\right)}.$$

Portanto,

$$l_n = 2 \cdot r \cdot \text{sen}\frac{\theta_n}{2} \quad \text{ou} \quad l_n = 2r\text{sen}\left(\frac{180°}{n}\right),$$

pois $\theta_n = \dfrac{360°}{n}$. Logo,

$$P = n \cdot 2r \cdot \text{sen}\left(\frac{180°}{n}\right) \Rightarrow P = 2rn\ \text{sen}\left(\frac{180°}{n}\right).$$

Verificando que quanto maior for n mais o perímetro do polígono se aproxima do comprimento da circunferência, ou seja, quando $n \to +\infty$ o perímetro do polígono P_n tende ao comprimento da circunferência C, mas nunca é igual, ou seja,

$$C = \lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty} 2rn \operatorname{sen}\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = 2r \lim_{n\to+\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{180^\circ}{n}\right).$$

Sendo π a relação entre o comprimento da circunferência e o diâmetro, temos

$$\pi = \lim_{n\to+\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{C}{2\,r} = \pi \quad \text{e} \quad C = 2\pi r.$$

Agora, consideremos o problema de encontrarmos a área do círculo.

Seja o polígono regular de n lados inscrito no círculo de raio r (Figura 3).

Dividamos o polígono em n triângulos com altura H.

Observemos que a área do círculo do polígono (A_p) é

$$A_p = n \cdot \frac{H \cdot l_n}{2}.$$

Observemos que ao dividirmos o polígono em um número maior de triângulos, a área do polígono se aproxima da área de círculo (A_C), ou seja, quando $n \to +\infty$ temos que $A_P \to A_C$, obtemos

$$A_C = \lim_{n\to+\infty} A_{P_n} = \lim_{n\to+\infty} n \cdot \frac{H \cdot l_n}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{H(n) \cdot n \cdot l_n}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{H(n) \cdot P_n}{2},$$

pois $P_n = n \cdot l_n$.

Observemos que quando $n \to +\infty$, $H(n) \to r$ e $P_n \to C = 2\pi r$.

Portanto,

$$A_C = \lim_{n\to+\infty} \frac{H(n) \cdot P_n}{2} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot 2\pi r = \pi r^2.$$

2°) Problema: Velocidade Instâtanea de um corpo em queda livre

Soltemos um corpo a uma dsitância h_o do solo. Temos então que sua altura mudará em função do tempo. Tomemos $h = h(t)$, onde $h(t)$ é a distância orientada e o referencial posto no solo (Figura abaixo).

Para pequena distância h_o, temos que este movimento será retilíneo uniformemente variável. Qual então a sua velocidade média do corpo entre t_o e $t_o + \Delta t$.

A velocidade média da partícula no intervalo de tempo Δt é dada por

$$V_m = \frac{h(t_o + \Delta t) - h(t_o)}{\Delta t}.$$

Observemos que quanto menor for o intervalo de Δt menor será a diferença entre $V(t_o)$ e V_m.

Portanto, podemos escrever

$$V(t_o) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{h(t_o + \Delta t) - h(t_o)}{\Delta t}.$$

3°) Problema: Reta tangente

Vamos agora analisar o comportamento das retas secantes a uma curva $y = f(x)$ que passam pelos pontos $P(x_1, f(x_1))$ e $Q(x_2, f(x_2))$ da curva, quando Q se move em direção a P fixo ao longo da curva (Figura 4).

A diferença entre as abcissas de Q e de P é denotada por Δx (lemos:“delta x”), isto é, $\Delta x = x_2 - x_1$.

A figura 5, mostra-nos o gráfico de f, e a reta PQ secante a curva pelos pontos P e Q.

A inclinação ou coeficiente angular da reta PQ da figura 6 é dada por

$$m_{PQ} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

desde que a reta PQ não seja vertical.

Sendo $\Delta x = x_2 - x_1$, então a inclinação de PQ pode ser escrita como

$$m_{PQ} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Examinando a figura 2, vemos que quando Q tende a P ao longo da curva, Δx tende a zero. Com isso, a reta secante gira em torno do ponto fixo P (Figura 5). A tangente a curva em P é a reta que passa por P cujo coeficiente angular é o limite dos coeficientes angulares das secantes quando $Q \to P$. Assim, a inclinação da reta tangente ao gráfico em P será o limite de m_{PQ} quando Δx tende a zero, se esse limite existir, isto é,

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Continuando a definição intuitiva de limite, observemos o gráfico de uma função f representado na figura 6. Quando x se aproxima de x_o pela direita ou pela esquerda, $f(x)$ se aproxima de L por baixo ou por cima. E quanto mais x se aproximar de x_o, mais $f(x)$ se aproxima de L. Com isso, L será o limite de $f(x)$ quando x tende a x_o, isto é,

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L.$$

Analisemos o comportamento da função f em torno de x_o representada graficamente na figura 8.

Quando $x \to x_o$ pela esquerda de x_o, $f(x) \to f(x_o)$. Mas quando $x \to x_o$ pela direita, $f(x)$ não tende a $f(x_o)$. Portanto, f não tem limite.

Consideremos, também, o gráfico da função f representado na figura 9.

Observemos que a função f tem limite L, pois ao tomarmos os valores de x próximos de x_o, cada $f(x)$ aproxima-se de L.

Nas figuras 7, 8 e 9, observamos o comportamento de f quando x se aproxima de x_o, sempre com $x \neq x_o$. Com base nessas observações, antes de darmos uma definição de limite, iremos defini-lo como se segue.

Definição Preliminar

Seja f uma função real definida num intervalo aberto contendo x_o, exceto possivelmente em x_o. Se quando x se aproxima muito de x_o, pela direita ou pela esquerda, $f(x)$ se aproximar muito de L por cima ou por baixo, então dizemos que o número real L é o limite de $f(x)$. Simbolizamos por

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L.$$

Exemplo: Verifique algebricamente e geometricamente que

1. $\lim\limits_{x \to 1}(3x + 1) = 4$

2. $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 4x + 3) = -1$

Solução (1): Tomemos valores de x próximos de 1 como mostra a tabela ao lado.

Graficamente, temos

Quando x se aproxima de 1 por valores menores ou maiores que 1, ou seja, tanto pela esquerda como pela direita, a função f se aproxima de 4, embora não assuma o valor 4.

Solução (2): Os valores de x com seus respectivos valores de $f(x)$ e graficamente estão representados abaixo.

Notemos que quando x se aproxima de 2, tanto pela direita como pela esquerda, a função f aproxima-se de -1.

Observando a definição preliminar e os exemplos anteriores, temos que

i) $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = L$ se quando $|x - x_o|$ for muito pequeno, também tivermos $|f(x) - L|$ muito pequeno.

ii) Se todo intervalo aberto contendo L contiver a imagem de um intervalo aberto contendo x_o, exceto possivelmente $f(x_o)$, então $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = L$.

Vamos considerar os intervalos abertos $(x_o - \delta, x_o + \delta)$ e $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, contendo x_o e L respectivamente, onde δ e ε são números reais (Figura 10).

Podemos tornar $|f(x) - L|$ tão pequeno quanto desejarmos, tomando $|x - x_o|$ suficientemente pequeno. Mas tenhamos em mente que x nunca assume o valor x_o.

3. $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = L$ se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in (x_o - \delta, x_o + \delta)$, tivermos $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Com base no que estudamos até agora, seremos capazes de compreendermos a definição de limite que se segue.

Definição: *Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo x_o, exceto possivelmente em x_o. O limite de $f(x)$ quando x tende a x_o, será o número real L, simbolizado por $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = L$ se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - x_o| < \delta$.*

Vemos da definição que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ sempre que $x \in (x_o - \delta, x_o + \delta)$, $x \neq x_o$. Ou ainda, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que se $0 < |x - x_o| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$ ou se $x \in (x_o - \delta, x_o + \delta)$, $x \neq x_o$ então $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

A figura 11 mostra essa definição geometricamente.

Ao considerarmos o $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = L$, não exigimos que x_o pertença ao domínio da função f. Portanto, a afirmação $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = L$ nada diz a respeito do valor $f(x_o)$, ela descreve apenas o comportamento dos valores de $f(x)$ para x próximo de x_o, com $x \neq x_o$.

Observação: *Esta definição de limite foi dada por Hayne, aluno de Weierstrass, em 1872.*

Como meio para compreender a definição daremos alguns exemplos.

1. Mostre por definição que $\lim_{x \to 1} 3x + 1 = 4$.

Demonstração: Temos que

$$|f(x) - L| = |(3x+1) - 4| = |3x - 3| = 3\,|x - 1|\,.$$

Portanto,

$$|(3x+1) - 4| = 3\,|x-1| < \varepsilon$$

sempre que $|x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Logo tomando $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$, temos que

$$|(3x+1) - 4| < \varepsilon$$

sempre que $0 < |x - 1| < \delta$. O que mostra que $\lim_{x \to 1} 3x + 1 = 4$.

Observe graficamente para $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ e $\varepsilon = \dfrac{1}{5}$.

Notemos que quanto menor tomarmos o valor de ε, menor será o valor de δ. Isso significa que quanto mais próximo x estiver de $x_o = 1$, mais próximo $f(x)$ estará de 4. Em outras palavras, quanto menor for $|f(x) - 4|$ menor será $|x - 1|$.

2. Mostre por definição que $\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \left(2x^2 - 3x + 1\right) = 3$.

Demonstração:

Temos que

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &= \left|\left(2x^2 - 3x + 1\right) - 3\right| = \left|2x^2 - 3x - 2\right| \\ &= \left|2(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right)\right| = |2x - 4| \cdot \left|x + \frac{1}{2}\right|. \end{aligned}$$

Temos da definição de limite que o intervalo aberto contendo $-\dfrac{1}{2}$ pode ser qualquer.

Tomemos o intervalo $\left(-\frac{1}{2}-1, -\frac{1}{2}+1\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Portanto para x pertencer a este intervalo deve-se ter

$$-\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2} \Rightarrow -3 < 2x < 2 \Rightarrow -7 < 2x - 4 < -2 \Rightarrow |2x-4| < 7.$$

Portanto,

$$\left|\left(2x^2 - 3x + 1\right) - 3\right| = |2x-4| \cdot \left|x + \frac{1}{2}\right| < 7 \cdot \left|x + \frac{1}{2}\right|$$

sempre que $\left|x + \frac{1}{2}\right| < 1$. Então

$$\left|\left(2x^2 - 3x + 1\right) - 3\right| < 7\left|x + \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

sempre que $\left|x + \frac{1}{2}\right| < 1$ e $\left|x + \frac{1}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{7}$.

Portanto, $\forall \varepsilon > 0$, basta tormarmos $\delta = \min\left(1, \frac{1}{7}\varepsilon\right)$ (pois para satisfazer as duas condições deve satisfazer a interseção) para que $|(2x^2 - 3x + 1) - 3| < \varepsilon$ sempre que $0 < \left|x + \frac{1}{2}\right| < \delta$. O que mostra que

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \left(2x^2 - 3x + 1\right) = 3.$$

3. Mostre por definição que $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} \frac{3x+2}{2x-1} = 9$.

Demonstração:

Temos que

$$\begin{aligned}
|f(x) - L| &= \left|\frac{3x+2}{2x-1} - (-9)\right| = \left|\frac{3x+2+18x-9}{2x-1}\right| \\
&= \left|\frac{21x-7}{2x-1}\right| = \left|\frac{7(3x-1)}{2x-1}\right| \\
&= \left|\frac{7}{2x-1}\right| \cdot |3x-1| = \frac{7}{|2x-1|} \cdot \left|x - \frac{1}{3}\right|.
\end{aligned}$$

Como estamos observandoo a vizinhança de $\frac{1}{3}$, vamos supor $\left|x-\frac{1}{3}\right| < 1$ para majorar $\frac{7}{|2x-1|}$. Multiplicando por 2 e depois subtraindo $\frac{1}{3}$ chegamos a $-\frac{7}{5} < 2x-1 < \frac{5}{3}$.

Observemos que $2x-1$ pode assumir o valor "0". Então $\frac{7}{|2x-1|}$ não pode ser definido. Vamos tomar então

$$\left|x-\frac{1}{3}\right| < \frac{1}{7} \Rightarrow -\frac{1}{7} < x-\frac{1}{3} < \frac{1}{7}.$$

Somando $\frac{1}{3}$, multiplicando por 2 e depois subtraindo 1, obtemos

$$-\frac{13}{21} < 2x-1 < -\frac{1}{21} \Rightarrow \frac{13}{21} > |2x-1| > \frac{1}{21} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{21}{13} < \frac{1}{|2x-1|} < 21 \Rightarrow \frac{147}{13} < \frac{7}{|2x-1|} < 147$$

Portanto,

$$\left|\frac{3x+2}{2x-1}+9\right| = \frac{7}{|2x-1|}\cdot\left|x-\frac{1}{3}\right| < 147\cdot\left|x-\frac{1}{3}\right|$$

sempre que $\left|x-\frac{1}{3}\right| < \frac{1}{7}$. Então $\left|\frac{3x+2}{2x-1}+9\right| < 147\cdot\left|x-\frac{1}{3}\right| < \varepsilon$ sempre que $\left|x-\frac{1}{3}\right| < \frac{1}{7}$ e $\left|x-\frac{1}{3}\right| < \frac{\varepsilon}{147}$.

Portanto, $\forall\varepsilon > 0$, basta tomarmos $\delta = \min\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{147}\varepsilon\right)$ para que $\left|\frac{3x+2}{2x-1}+9\right| < \varepsilon$ sempre que $0 < \left|x-\frac{1}{3}\right| < \delta$.

4. $\lim\limits_{x\to x_o} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_o}$ se $x_o > 0$ ou se $x_o \leq 0$ e n ímpar.

Vejamos agora, alguns teoremas com suas respectivas demonstrações.

Teorema 3.1 *Se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$*, então*

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right] = L\pm M.$$

Demonstração:

A demonstração será feita para o sinal de $+$. Para o sinal de $-$, a demonstração é análoga.

Como $\lim_{x\to a} f(x) = L$, então $\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0$, $\exists \delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_1$. E como $\lim_{x\to a} g(x) = M$, então $\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0$, $\exists \delta_2 > 0$ tal que $|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_2$. Então

$$\begin{aligned} |[f(x) + g(x)] - (L - M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

sempre que $|x - a| < \delta_1$ e $|x - a| < \delta_2$.

Portanto, tomando δ o menor dos dois números δ_1 e δ_2, isto é, $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, temos que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $|[f(x) + g(x)] - (L - M)| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

$\blacksquare$

Teorema 3.2 **a)** *Se* $\lim_{x\to x_o} f(x) = L$, *então* $\forall \varepsilon > 0$ *existe* $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ *tal que* $|f(x)| < k$ *sempre que* $0 < |x - x_o| < \delta$.

b) *Se* $\lim_{x\to x_o} f(x) = L \neq 0$, *então* $\forall \varepsilon > 0$ *existe* $k \in \mathbb{R}$, *tal que* $\frac{1}{f(x)} < k$ *sempre que* $0 < |x - x_o| < \delta$.

Teorema 3.3 *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = M$, *então*

$$\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M.$$

Demonstração:

Observemos que

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) - L \cdot M &= f(x) \cdot g(x) - L \cdot g(x) + L \cdot g(x) - L \cdot M \\ &= [f(x) - L] \cdot g(x) + [g(x) - M] \cdot L. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x) - L\cdot M\right] = \lim_{x\to a}\left[(f(x)-L)\cdot g(x) + (g(x)-M)\cdot L\right].$$

Temos que $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-L) = 0$, pois $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ (Por hipótese). E que $g(x)$ é localmente limitada, pois $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ existe. Portanto,

$$\lim_{x\to a}(f(x)-L)\cdot g(x) = 0,$$

pois existe um teorema: “Se $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = 0$ e $g(x)$ é localmente limitada em x_o, então $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)\cdot g(x) = 0$”. Esse teorema será abordado mais adiante com sua respectiva demonstração. Temos também que $\lim\limits_{x\to a}(g(x)-M)\cdot L = 0$, pois

$$\lim_{x\to a}(g(x)-M)\cdot L = L\cdot \lim_{x\to a}(g(x)-M) = L\cdot 0 = 0,$$

pois por hipótese temos, que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, o que torna $\lim\limits_{x\to a}(g(x)-M) = 0$. Portanto,

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x) - L\cdot M) = \lim_{x\to a}\left[(f(x)-L)\cdot g(x) + (g(x)-M)\cdot f(x)\right] = 0.$$

Logo,

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim_{x\to a} LM = LM.$$

E portanto,

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = L\cdot M.$$

■

Teorema 3.4 *Se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, *então*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M},$$

se $M \neq 0$.

Demonstração:

Temos que

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{M} &= \frac{M \cdot f(x) - L \cdot g(x)}{g(x) \cdot M} \\ &= \frac{M \cdot f(x) - LM + LM - L \cdot g(x)}{g(x) \cdot M} \\ &= (f(x) - L) \cdot \frac{1}{g(x)} - \frac{L}{M} \cdot (g(x) - M) \cdot \frac{1}{g(x)}\end{aligned}$$

Então,

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{M} \right) = \lim_{x \to a} \left[(f(x) - L) \cdot \frac{1}{g(x)} - \frac{L}{M} \cdot (g(x) - M) \cdot \frac{1}{g(x)} \right].$$

Observemos que $\lim_{x \to a} (f(x) - L) = 0$, pois $\lim_{x \to a} f(x) = L$. E como $\frac{1}{g(x)}$ é localmente limitada, pois $\lim_{x \to a} g(x) = M \neq 0$, então $\lim_{x \to a} (f(x) - L) \cdot \frac{1}{g(x)} = 0$. Analogamente temos que $\lim_{x \to a} \left[\frac{L}{M} \cdot (g(x) - M) \cdot \frac{1}{g(x)} \right] = 0$.

Logo,

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{M} \right) = \lim_{x \to a} \left[(f(x) - L) \cdot \frac{1}{g(x)} - \frac{L}{M} \cdot (g(x) - M) \cdot \frac{1}{g(x)} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{L}{M} = \frac{L}{M}.$$

E portanto,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, M \neq 0.$$

■

Teorema 3.5 *Se* $\lim_{x \to a} g(x) = b$ *e se a função* f *for contínua em* b*, então*

$$\lim_{x \to a} (fog)(x) = f(b)$$

ou, equivalente

$$\lim_{x \to a} (f(g(x))) = f\left(\lim_{x \to a} g(x) \right).$$

Demonstração:

Como f é contínua em b, do teorema, que diz que, uma função f será contínua no número a se f estiver definida em algum intervalo aberto contendo a e se para todo $\varepsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que se $|x - a| < \delta$ então $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, temos que para todo $\varepsilon_1 > 0$ existir um $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(y) - f(b)| < \varepsilon_1 \text{ sempre que } |y - b| < \delta_1.$$

Como $\lim_{x \to a} g(x) = b$, então para todo $\delta_1 > 0$ existe um $\delta_2 > 0$ tal que

$$|g(x) - b| < \varepsilon_1 \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta_2 \qquad (1)$$

Se $0 < |x - a| < \delta_2$ e substituímos y por $g(x)$, temos que para todo $\varepsilon_1 > 0$ existe um $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon_1 \text{ sempre que } 0 < |g(x) - b| < \delta_1 \qquad (2)$$

De (1) e (2), vem que para todo $\varepsilon_1 > 0$ existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$|f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta_2.$$

Logo,

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right).$$

■

3.3 Alguns Limites Importantes

1. $\lim_{x \to x_o} \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{p(x_o)}{q(x_o)}$, com $p(x)$ e $q(x)$ polinômios, $q(x_o) \neq 0$.

Demonstração:

Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o$. Então

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_o} p(x) &= \lim_{x\to x_o} (a_n x^n) + \lim_{x\to x_o} \left(a_{n-1}x^{n-1}\right) + \ldots + \lim_{x\to x_o} (a_1 x) + \lim_{x\to x_o} a_o \\
&= a_n \left(\lim_{x\to x_o} x\right)^n + a_{n-1}\left(\lim_{x\to x_o} x\right)^{n-1} + \ldots + a_1 \lim_{x\to x_o} x + a_o \\
&= a_n x_o^n + a_{n-1}x_o^{n-1} + \ldots + a_1 x_o + a_o \\
&= p(x_o).
\end{aligned}$$

Analogamente obtemos que $\lim\limits_{x\to x_o} q(x) = q(x_o)$.

Portanto,

$$\lim_{x\to x_o} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_o} p(x)}{\lim\limits_{x\to x_o} q(x)} = \frac{p(x_o)}{q(x_o)}, q(x_o) \neq 0.$$

2. $\lim\limits_{x\to x_o} \sqrt[n]{p(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to x_o} p(x)} = \sqrt[n]{p(x_o)}$, $p(x)$ polinômios.

3. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{(x_o + \Delta x)^r - x_o^r}{\Delta x} = r \cdot x_o^{r-1}, \forall r \in \mathbb{Q}$.

Demonstração:

Vamos mostrar para os casos $r = m$, $r = \dfrac{1}{m}$, $r = \dfrac{m}{n}$ e $r = -\dfrac{m}{n}$.

1º $r = m$

$$\begin{aligned}
& \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x_o + \Delta x)^m - x_o^m}{\Delta x} \\
= & \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x_o + \Delta x - x_o)\left[(x_o+\Delta x)^{m-1} + (x_o+\Delta x)^{m-2}\cdot x_o + \right.}{\Delta x} \\
& \frac{\left. + (x_o+\Delta x)^{m-3}\cdot x_o^2 + \ldots + x_o^{n-1}\right]}{\Delta x} \\
= & \lim_{\Delta x\to 0} \left[(x_o+\Delta x)^{m-1} + (x_o+\Delta x)^{m-2}\cdot x_o + (x_o+\Delta x)^{m-3}\cdot x_o^2 + \ldots + x_o^{m-1}\right] \\
= & x_o^{m-1} + x_o^{m-2}\cdot x_o + x_o^{m-3}\cdot x_o^2 + \ldots + x_o^{m-1} \\
= & x_o^{m-1} + x_o^{m-1} + \ldots + x_o^{m-1} \quad (m \text{ vezes}) \\
= & m \cdot x_o^{m-1}
\end{aligned}$$

2º $r = \dfrac{1}{m}$

$$\frac{(x_o+\Delta x)^{\frac{1}{m}} - x_o^{\frac{1}{m}}}{\Delta x} = \frac{\sqrt[m]{x_o+\Delta x} - \sqrt[m]{x_o}}{\Delta x}.$$

Mas,

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt[m]{x_o+\Delta x}\right)^m - \left(\sqrt[m]{x_o}\right)^m \\ &= \left(\sqrt[m]{x_o+\Delta x} + \sqrt[m]{x_o}\right)\cdot\left[\left(\sqrt[m]{x_o+\Delta x}\right)^{m-1} + \left(\sqrt[m]{x_o+\Delta x}\right)^{m-2}\cdot\sqrt[m]{x_o} + \ldots + \left(\sqrt[m]{x_o}\right)^{m-1}\right].\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[m]{x_o+\Delta x} - \sqrt[m]{x_o}}{\Delta x} &= \frac{\dfrac{\Delta x}{\left(\sqrt[m]{x_o+\Delta x}\right)^{m-1} + \left(\sqrt[m]{x_o+\Delta x}\right)^{m-2}\cdot\sqrt[m]{x_o} + \ldots + \left(\sqrt[m]{x_o}\right)^{m-1}}}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt[m]{x_o+\Delta x}\right)^{m-1} + \left(\sqrt[m]{x_o+\Delta x}\right)^{m-2}\cdot\sqrt[m]{x_o} + \ldots + \left(\sqrt[m]{x_o}\right)^{m-1}}.\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[m]{x_o+\Delta x} - \sqrt[m]{x_o}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt[m]{x_o+\Delta x}\right)^{m-1} + \left(\sqrt[m]{x_o+\Delta x}\right)^{m-2}\cdot\sqrt[m]{x_o} + \ldots + \left(\sqrt[m]{x_o}\right)^{m-1}} \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt[m]{x_o}\right)^{m-1} + \left(\sqrt[m]{x_o}\right)^{m-2}\cdot\sqrt[m]{x_o} + \ldots + \left(\sqrt[m]{x_o}\right)^{m-1}} \\ &= \frac{1}{x_o^{\frac{m-1}{m}} + x_o^{\frac{m-2}{m}+\frac{1}{m}} + \ldots + x_o^{\frac{m-1}{m}}} \\ &= \frac{1}{m\cdot x_o^{1-\frac{1}{m}}} \\ &= \frac{1}{m}\cdot x_o^{\frac{1}{m}-1}.\end{aligned}$$

3º $r = \dfrac{m}{n}$

Temos que,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_o+\Delta x)^{\frac{m}{n}} - x_o^{\frac{m}{n}}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[n]{(x_o+\Delta x)^m} - \sqrt[n]{x_o^m}}{\Delta x}.$$

Mas,

$$\left(\sqrt[n]{(x_o+\Delta x)^m}\right)^n - \left(\sqrt[n]{x_o^m}\right)^n = \left(\sqrt[n]{(x_o+\Delta x)^m} - \sqrt[n]{x_o^m}\right)\cdot$$
$$\cdot\left[\left(\sqrt[n]{(x_o+\Delta x)^m}\right)^{n-1} + \left(\sqrt[n]{(x_o+\Delta x)^m}\right)^{n-2}\cdot\sqrt[n]{x_o^m} + \ldots + \left(\sqrt[n]{x_o^m}\right)^{n-1}\right]$$
$$\Rightarrow\quad (x_o+\Delta x)^m - x_o^m = \left(\sqrt[n]{(x_o+\Delta x)^m} - \sqrt[n]{x_o^m}\right)\cdot$$
$$\cdot\left[\left(\sqrt[n]{(x_o+\Delta x)^m}\right)^{n-1} + \left(\sqrt[n]{(x_o+\Delta x)^m}\right)^{n-2}\cdot\sqrt[n]{x_o^m} + \ldots + \left(\sqrt[n]{x_o^m}\right)^{n-1}\right].$$

Portanto,

$$\frac{\sqrt[n]{(x_o+\Delta x)^m} - \sqrt[n]{x_o^m}}{\Delta x} =$$
$$= \frac{(x_o+\Delta x)^m - x_o^m}{\Delta x\cdot\left[\left(\sqrt[n]{(x_o+\Delta x)^m}\right)^{n-1} + \left(\sqrt[n]{(x_o+\Delta x)^m}\right)^{m-2}\cdot\sqrt[n]{x_o^m} + \ldots + \left(\sqrt[n]{x_o^m}\right)^{m-1}\right]}$$
$$= \frac{(x_o+\Delta x - x_o)\cdot\left[(x_o+\Delta x)^{m-1} + (x_o+\Delta x)^{m-2}\cdot x_o + \ldots + x_o^{m-1}\right]}{\Delta x\cdot\left[\left(\sqrt[n]{(x_o+\Delta x)^m}\right)^{n-1} + \left(\sqrt[n]{(x_o+\Delta x)^m}\right)^{m-2}\cdot\sqrt[n]{x_o^m} + \ldots + \left(\sqrt[n]{x_o^m}\right)^{m-1}\right]}$$
$$= \frac{(x_o+\Delta x)^{m-1} + (x_o+\Delta x)^{m-2}\cdot x_o + \ldots + x_o^{m-1}}{\left(\sqrt[n]{(x_o+\Delta x)^m}\right)^{n-1} + \left(\sqrt[n]{(x_o+\Delta x)^m}\right)^{m-2}\cdot\sqrt[n]{x_o^m} + \ldots + \left(\sqrt[n]{x_o^m}\right)^{m-1}}.$$

Portanto,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[n]{(x_o+\Delta x)^m} - \sqrt[n]{x_o^m}}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_o+\Delta x)^{m-1} + (x_o+\Delta x)^{m-2}\cdot x_o + \ldots + x_o^{m-1}}{\left(\sqrt[n]{(x_o+\Delta x)^m}\right)^{n-1} + \left(\sqrt[n]{(x_o+\Delta x)^m}\right)^{m-2}\cdot\sqrt[n]{x_o^m} + \ldots + \left(\sqrt[n]{x_o^m}\right)^{m-1}}$$
$$= \frac{{x_o}^{m-1} + {x_o}^{m-2}\cdot x_o + \ldots + {x_o}^{m-1}}{\left(\sqrt[n]{{x_o}^m}\right)^{n-1} + \left(\sqrt[n]{{x_o}^m}\right)^{n-2}\cdot\sqrt[n]{{x_o}^m} + \ldots + \left(\sqrt[n]{{x_o}^m}\right)^{n-1}}$$
$$= \frac{{x_o}^{m-1} + {x_o}^{m-1} + \ldots + {x_o}^{m-1}}{{x_o}^{\frac{m}{n}(n-1)} + {x_o}^{\frac{m}{n}(n-1)} + \ldots + {x_o}^{\frac{m}{n}(n-1)}}$$
$$= \frac{m\cdot {x_o}^{m-1}}{n\cdot {x_o}^{m-\frac{m}{n}}}$$
$$= \frac{m}{n}\cdot {x_o}^{\frac{m}{n}-1}.$$

4º $r = -\dfrac{m}{n}$

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_o + \Delta x)^{-\frac{m}{n}} - x_o{}^{-\frac{m}{n}}}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{1}{(x_o + \Delta x)^{\frac{m}{n}}} - \dfrac{1}{x_o{}^{\frac{m}{n}}}}{\Delta x} \\
= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{x_o{}^{\frac{m}{n}} - (x_o + \Delta x)^{\frac{m}{n}}}{(x_o + \Delta x)^{\frac{m}{n}} \cdot x_o{}^{\frac{m}{n}}}}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_o{}^{\frac{m}{n}} - (x_o + \Delta x)^{\frac{m}{n}}}{\Delta x \cdot x_o{}^{\frac{m}{n}} \cdot (x_o + \Delta x)^{\frac{m}{n}}} \\
= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{-1}{x_o{}^{\frac{m}{n}} \cdot (x_o + \Delta x)^{\frac{m}{n}}} \cdot \frac{(x_o + \Delta x)^{\frac{m}{n}} + x_o{}^{\frac{m}{n}}}{\Delta x} \right] \\
= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x_o{}^{\frac{m}{n}} \cdot (x_o + \Delta x)^{\frac{m}{n}}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_o + \Delta x)^{\frac{m}{n}} + x_o{}^{\frac{m}{n}}}{\Delta x} \\
= \frac{-1}{x_o{}^{\frac{m}{n}} \cdot x_o{}^{\frac{m}{n}}} \cdot \frac{m}{n} \cdot x_o{}^{\frac{m}{n}-1} = -\frac{m}{n} \cdot x_o{}^{\frac{m}{n}-1-2\cdot\frac{m}{n}} \\
= -\frac{m}{n} \cdot x_o{}^{-\frac{m}{n}-1}
\end{aligned}$$

4 $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{180^{\circ}}{n}\right) = \pi.$

A demostração já foi feita.

5 $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1,$ t em radianos.

Demonstração:

Sendo $\dfrac{180^{\circ}}{n} = \dfrac{\pi}{n}\mathrm{rad}$, temos de 3 que

$$\pi = \lim_{n \to +\infty} n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Seja $t = \dfrac{\pi}{n}$. Então, quando $n \to +\infty$ implica $t \to 0^{+}$. Portanto,

$$\pi = \lim_{t \to 0^{+}} \frac{\pi}{t} \cdot \operatorname{sen} t \Rightarrow \pi = \pi \cdot \lim_{t \to 0^{+}} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \Rightarrow \lim_{t \to 0^{+}} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1.$$

Calculemos $\displaystyle\lim_{t \to 0^{-}} \frac{\operatorname{sen} t}{t}$.

Seja $u = -t$. Se $t \to 0^-$ implica $u \to 0^+$. Portanto,

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{\mathrm{sen} t}{t} = \lim_{u\to 0^+} \frac{\mathrm{sen}(-u)}{(-u)} = \lim_{u\to 0^+} \frac{-\mathrm{sen} u}{-u} = 1.$$

Como $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\mathrm{sen} t}{t} = \lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{\mathrm{sen} t}{t} = 1$, então

$$\lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{sen} t}{t} = 1.$$

6 $\lim\limits_{n\to\pm\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$, onde

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right).$$

Demonstração:

Primeiro demonstraremos para $n \to +\infty$.

Sejam as sequências $a_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$ e

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n\cdot(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 2\cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}$$

ou

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots \\ &\quad + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

Observemos que $b_n < a_n$ para todo n, e que b_n e a_n são convergentes, pois são limitadas

$$\begin{aligned}
a_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 1 + \frac{1\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\
&< 3 \\
b_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \\
&< e,
\end{aligned}$$

$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e $a_{n+1} > a_n$. Logo, obtemos que $\lim b_n \leq \lim a_n$ (pois se x_n e y_n forem sequências convergentes, com $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim x_n \leq \lim y_n$). Para mostrar que estes limites são iguais mostraremos que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n \geq \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Fixando arbitrariamente $p \in \mathbb{N}$, temos que para todo $n > p$,

$$\begin{aligned}
b_n \geq\ & 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots \\
& + \frac{1}{p!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{p-1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$ (e mantendo p fixo), na desigualdade acima, obtemos que o segundo membro tende para o limite

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{p!} = a_p,$$

Então, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n > a_p$ para todo $p \in \mathbb{N}$. Seja $L = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$. Como $a_p < L$ $\forall p \in \mathbb{N}$, então $\lim\limits_{p\to+\infty} a_p \leq L$. Portanto, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n \geq \lim\limits_{n\to+\infty} a_p$.

Como $\lim b_n \leq \lim a_n$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n \geq \lim\limits_{n\to+\infty} a_p$, obtemos

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right).$$

Por hipótese, temos que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right) = e.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Agora, observemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right) \\
&= e\cdot 1 \\
&= e
\end{aligned}$$

7 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}} = e.$

Demonstração:

No limite 6, provamos que $\lim\limits_{n\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Observemos que nesse limite n tende para infinito tomando valores inteiros. Vamos trocar o n pelo x e supor agora que $x \to \pm\infty$ assumindo um valor real qualquer. Mostraremos que este limite é o mesmo.

Suponhamos que $x \to +\infty$. Então, cada valor de x está compreendido entre dois números naturais, ou seja,

$$n \leq x < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1}.$$

Somando 1, temos

$$1 + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Como $n \leq x < n+1$, temos da desigualdade anterior que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n}.$$

Se $x \to \infty$, temos também que $n \to \infty$. Com isso calculemos o limite dos termos entre os quais está compreendido o termo $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 \\
&= e
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} \\
&= \frac{\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} \\
&= e
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema do “Confronto”, temos que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

Semelhantemente, temos que

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

Do limite anterior, vamos supor $\dfrac{1}{x} = \Delta x \Rightarrow x = \dfrac{1}{\Delta x}$. Notemos que quando $x \to \pm\infty$, temos que $\Delta x \to 0$. Portanto, podemos escrever

$$e = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\Delta x \to 0} (1 + \Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}.$$

Logo,

$$\lim_{\Delta x \to 0} (1 + \Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}} = e.$$