**V Bienal da SBM**
**Sociedade Brasileira de Matemática**
**UFPB - Universidade Federal da Paraíba**
**18 a 22 de outubro de 2010**

# TÓPICOS SOBRE O "PI" E OS NÚMEROS REAIS

Kelly Roberta Mazzutti Lübeck* & Marcos Lübeck †

Este trabalho pretende fazer uma singela análise acerca da natureza dos números reais, levantando alguns questionamentos sobre noções que muitas vezes julgamos ser de senso comum. Para tanto, faremos uma abordagem histórica sintetizada sobre o número Pi, mostrando a sua configuração ao longo da história da matemática e sua importância para os delineamentos tomados por esta ciência ao longo dos tempos. Com isso, visamos mostrar uma parcela, pequena que seja, para alunos de graduação - especialmente de matemática - da "evolução" das idéias matemáticas acerca da estrutura dos números reais e da dinamicidade destes pensamentos até se tornarem, por hora, estanques.

## 1 Motivação

Num curso de Licenciatura em Matemática muitos são os desafios que os acadêmicos precisam sobrepor para obter o grau de licenciados em matemática. Durante o período de quatro anos (em geral o tempo mínimo necessário para a integralização do curso) é apresentado a estes alunos diferentes teorias matemáticas e métodos de ensino variados para que eles tenham plenas condições de exercer os ofícios de sua profissão de modo eficiente, oferecendo-lhes suporte para as eventuais dificuldades que venham encontrar em seus ambientes de trabalho.

Por isso, um dos objetivos dos cursos de formação de professores de matemática é mostrar a matemática como uma ciência viva, dinâmica, passível de experimentação. O grande desafio é desmistificar que a matemática é uma ciência pronta, estática, onde para todo problema é possível apresentar uma fórmula ou, o que é muito mais preocupante, uma ciência em que se dão as fórmulas para depois se resolver os problemas.

Refletindo a respeito destas "experimentações" nos deparamos com o número Pi ($\pi$) e, um questionamento surgiu: O que é o número Pi? Ou melhor: Quem é o número Pi? Bom, independentemente de cursarem matemática, acreditamos que muitas pessoas responderiam que é o número (constante) dado pela razão do comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro e muitos ainda acrescentariam que Pi é um número irracional.

De fato, mesmo concordando com eles - até porque isto nos é ensinado no ensino fundamental - surgiu-nos outra questão: Será, realmente, que a razão do comprimento de qualquer circunferência pelo seu diâmetro é constante, e a esta constante chamamos de Pi? Quantos acadêmicos (e porque não mencionarmos cidadãos) já tiveram a possibilidade e/ou curiosidade de experimentar se a razão mencionada acima é constante? De fato, esta razão é constante e isto já foi apresentado, inclusive, no Livro XII dos Elementos, de Euclides, onde a proposição 2 já trazia *"Os círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros"* e a proposição 18 dizia que *"As esferas estão entre si em uma razão tripla da dos próprios diâmetros."* Para maiores detalhes veja Euclides [4], páginas 528 e 561, respectivamente.

Ainda, as seguintes inquietações a respeito do número Pi do tipo: Quando o descobriram? Quais foram as melhores aproximações que lhe foram atribuídas? Ele é ou não um irracional?, motivaram investigações não só a seu respeito mas, também, a respeito da essência dos números reais, procurando esclarecer quais os números que compreendem o conjunto dos reais e o que se pode explorar sobre a"reta real".

Deste modo, no decorrer deste trabalho, procuramos esclarecer de maneira simples e objetiva a alguns destes questionamentos.

*Universidade Estadual do Oeste do Paraná , UNIOESTE, PR, Brasil, kellyrobertaml@gmail.com
†Universidade Estadual do Oeste do Paraná, UNIOESTE, PR, Brasil, marcoslubeck@gmail.com. Doutorando UNESP/Rio Claro, bolsista CNPq.

## 2 Um número chamado Pi

Assim como não podemos afirmar com precisão qual foi o primeiro povo que "fez" matemática, ou equivalentemente, quando surgiu a matemática, também não podemos apontar uma única civilização que descobriu que para qualquer circunferência a razão de seu comprimento (perímetro) por seu diâmetro é constante. Talvez uns dos primeiros registros de que se tem conhecimento e que traz uma aproximação para o número Pi seja o Papiro de Ahmes (ou Papiro de Rhind). Este papiro[1], que data de aproximadamente de 1600 a. C., apresenta "receitas" para alguns problemas (matemáticos) do povo egípcio e o problema 48 sugere que o número Pi seja aproximado por $4(8/9)^2$. Este valor era obtido comparando-se a área de um círculo de diâmetro 9 com a área de um quadrado de lado 8. Outro valor que os egípcios adotavam era $3\frac{1}{6}$ (ou aproximadamente 3,16), conforme (CONTADOR, 2006, Vol. I, p. 253). Esta "problemática" do número Pi é tão antiga que até mesmo a Bíblia faz referência ao que hoje chamamos de Pi no livro dos Reis, I, 7:23 e em Crônicas, II, 4:2. A seguir descrevemos o trecho do livro dos Reis: *"Hiram fez ainda o Mar*[2]*, todo de metal fundido, com cinco metros de diâmetro. Era redondo, tinha dois metros e meio de altura, e sua circunferência tinha quinze metros"* (BÍBLIA SAGRADA, 1998, p. 374).

Já os babilônicos (1800 a 1600 a. C.) aproximavam o valor[3] de Pi por $3\frac{1}{8}$ e existem registros que no vale mesopotâmico o valor de Pi era 3 (Conf. CONTADOR, 2006, Vol. I, p. 253).

Os chineses aproximavam o número Pi, quando observado no cálculo da área do círculo, pelo número 3. Porém, outras estimativas são apresentadas na obra Chui-Chang Suan-Shu (Nove Capítulos sobre a Arte Matemática), composto por volta de 250 a. C. Nela Pi é aproximado por *"$3,14$ usando um polígono regular de 96 lados e a aproximação de $3,14159$ considerando um polígono de $3.072$ lados"* (BOYER, 1996, p. 138). Outra aproximação de Pi (historicamente relevante) dada por chineses é $\frac{355}{113}$, que é correta até a sexta casa decimal. Segundo Eves (2004, p. 142) este valor foi encontrado pelo chinês Tsu Ch'ung-chih.

Quando nos reportamos à história do Pi não podemos deixar de mencionar o nome de Arquimedes. Ele é considerado um dos maiores pensadores de todos os tempos, com grandes contribuições tanto na matemática quanto na física. Em um dos seus trabalhos apresentou um método, o Princípio da Alavanca (ou Lei da Alavanca), que possibilitou avançar significativamente no cálculo de áreas e volumes (quadratura da parábola, volume da esfera). Ele também abordou diversos problemas como por exemplo a trissecção do ângulo, o estudo da esfera e do cilindro, os problemas astronômicos e hidrostáticos e a medida do círculo e, conseqüentemente, uma aproximação para o número Pi.

Para calcular uma aproximação para o número Pi ele trabalhou com polígonos inscritos em uma circunferência. *"Começando com o hexágono regular inscrito, ele calculou os perímetros dos polígonos obtidos dobrando-se sucessivamente o número de lados até chegar a noventa e seis lados."* (BOYER, 1996, p. 86).

O grande mérito no trabalho de Arquimedes reside no fato de ele não tentar apresentar o valor exato de Pi, mas simplesmente um limite inferior e um superior para esta constante. Segundo Contador (2006, p. 265) *"o método de Arquimedes é o único matematicamente correto e foi com certeza a primeira tentativa científica de buscar um valor para Pi"*. Através de seu método Arquimedes encontrou a aproximação $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

O livro de Contador (2006, p. 256) traz os cálculos que motivaram as fórmulas recorrentes abaixo e, segundo o autor, estes cálculos fazem referência ao método utilizado por Arquimedes.

Identificando $l_n$ como o lado do polígono regular inscrito num círculo de raio $r$, $p_n$ o perímetro do polígono inscrito, $L_n$ o lado do polígono circunscrito no círculo de raio $r$, e $P_n$ o seu perímetro, temos as seguintes relações,

$$P_{2n} = \frac{2P_n p_n}{P_n + p_n}, \tag{2.1}$$

[1] Para maiores detalhes veja (BOYER, 1996, p. 12).

[2] "O Mar de Bronze era um grande reservatório de água, necessária para as purificações rituais e a limpeza do templo" (BÍBLIA SAGRADA, 1998, p. 374).

[3] Valor encontrado em problemas registrados em tabelas de argila.

e

$$p_{2n} = \sqrt{p_n P_{2n}}, \tag{2.2}$$

onde (**??**) representa o perímetro do polígono circunscrito de $2n$ lados ($P_{2n}$) como uma "média harmônica" e (**??**) representa o polígono inscrito de $2n$ lados ($p_{2n}$) como uma média geométrica. Além disso, da Figura 1 abaixo é fácil concluir que $l_n = 2r \operatorname{sen} \theta$, $p_n = 2.n.r. \operatorname{sen} \theta$ e $L_n = 2r \tan \theta, P_n = 2.n.r. \tan \theta$.

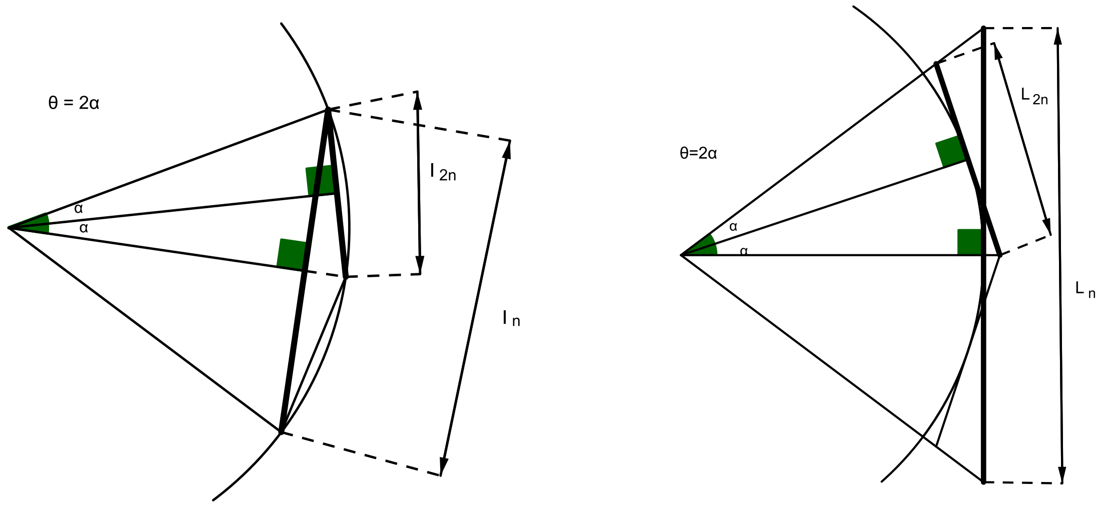


**Figura 1: Polígonos inscrito e circunscrito.**

Hoje, com a representação numérica indo-arábica, com o desenvolvimento de vários algoritmos para cálculos básicos (divisão, multiplicação, radiciação) e, por fim, com o auxílio de uma calculadora, facilmente chegamos aos valores estabelecidos por Arquimedes. Tomando um círculo de raio 1, com polígonos de seis lados inscrito e circunscrito, obtemos $n = 6$ e $\theta = 30°$. Assim, com as fórmulas recorrentes dadas acima obtemos:

- Polígono com 6 lados.
$L_6 = 2.1. \tan 30^0 = 1,1547$ e $l_6 = 2.1.\operatorname{sen} 30^0 = 1$.
$P_6 = 2.6.1. \tan 30^0 = 6,9282$ e $p_6 = 2.6.1.\operatorname{sen} 30^0 = 6$.

- Polígono com 12 lados.
$P_{12} = \frac{2.p_6.P_6}{p_6+P_6} = 6,4307$ e $p_{12} = \sqrt{p_6.P_{12}} = 6,2116$

- Polígono com 24 lados.
$P_{24} = \frac{2.p_{12}.P_{12}}{p_{12}+P_{12}} = 6,3192$ e $p_{24} = \sqrt{p_{12}.P_{24}} = 6,2651$

- Polígono com 48 lados.
$P_{48} = \frac{2.p_{24}.P_{24}}{p_{24}+P_{24}} = 6,2930$ e $p_{48} = \sqrt{p_{24}.P_{48}} = 6,2790$

- Polígono com 96 lados.
$P_{96} = \frac{2.p_{48}.P_{48}}{p_{48}+P_{48}} = 6,2859$ e $p_{96} = \sqrt{p_{48}.P_{96}} = 6,2824$.

Dessa forma é fácil concluir que o valor de $\pi$ está entre os valores $3,1412$ e $3,14295$.

O livro de Garbi (2007, p. 210) apresenta um método que segundo o autor é "*de mais fácil compreensão*" e também estabelece as fórmulas (**??**) e (**??**)[4].

Arquimedes também utilizou, conforme Garbi (2009, p. 81), o método da *dupla redução ao absurdo* para calcular a área do círculo, que provou ser igual a área do triângulo retângulo tendo como base o comprimento da circunferência e como altura o raio do círculo[5]. Com isto Arquimedes pode inferir que se *"o comprimento da circunferência é $2\pi r$, sua área é $\pi r^2$".*

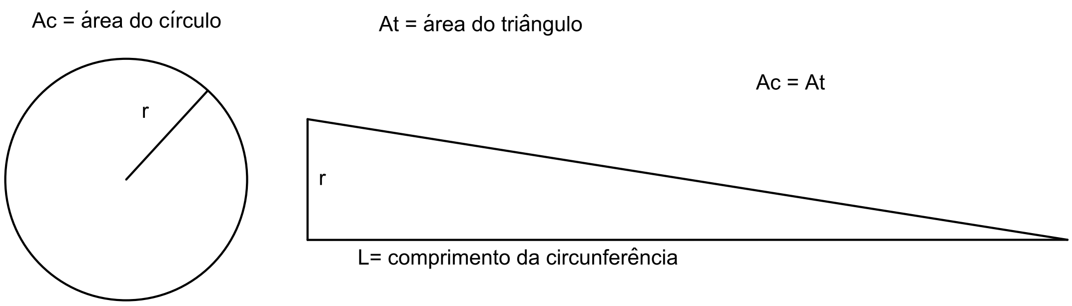


**Figura 2: Áreas da circunferência e do triângulo explorados por Arquimedes.**

Especula-se, também, que uma das melhores aproximações para o número Pi foi dada por Apolônio de Perga ($\pm$ 262 a 190 a. C.) o qual atribuiu $3,1416$ como valor de Pi, mas não existem explicações de como ele chegou a este fato. No Almagesto de Ptolomeu a aproximação dita ser de Apolônio também foi utilizada (BOYER, 1996, p. 96).

Outros povos e outro estudiosos também possuíam suas aproximações para o valor de Pi, mas conforme Boyer (1996, p. 167) foi o matemático árabe Al-Kashi (? - 1436) que melhor se aproximou do valor de Pi, estabelecendo o valor $6,2831853011795865$ para estimar $2\pi$. Esta aproximação só foi superada ao final do século XVI [6].

Esta constante, que foi por muitos e diferentes povos investigada, só se consagrou com o símbolo da letra grega $\pi$ quando Euler (1734 - 1800) a publicou em seus livros. (Ela foi usada pela primeira vez pelo inglês William Jones, conforme Garbi (2009, p. 102)).

A primeira expressão analítica envolvendo o número $\pi$ foi apresentada pelo francês François Viète (1540 - 1603) e é dada por:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots \tag{2.3}$$

Mais do que uma forma de representar $\pi$ esta expressão reforça o surgimento de uma nova técnica na matemática, onde noções aritméticas, algébricas e trigonométricas se fundem, cada vez mais, em expressões analíticas. Segundo (GARBI, 2007, p. 57) *"O uso esporádico de letras para representar números era prática muito antiga, mas até o surgimento de Viète não se costumava fazer manipulações algébricas de símbolos nem eram empregados coeficientes literais para representar classes genéricas."*

Abaixo apresentamos, baseados na obra de Garbi (2007), o procedimento que Viète utilizou para deduzir a fórmula (**??**).

Da clássica fórmula

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$$

é fácil deduzir que

$$\operatorname{sen}\theta = 2 \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2},$$

[4]O método referenciado não é o apresentado por Arquimedes.

[5]Os cálculos encontram-se na bibliografia citada.

[6]Cronologias para o número Pi são apresentadas nas obras (CONTADOR, 2006, p. 265) e (EVES, 2004, p. 143).

donde

$$\operatorname{sen}\theta = 2\cdot 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{4}\cos\theta.$$

Repetindo-se este processo $n$ vezes temos que

$$\operatorname{sen}\theta = 2^n\operatorname{sen}\frac{\theta}{2^n}\cos\frac{\theta}{2^n}\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdots\cos\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{2}.$$

Analisando o termo $2^n\operatorname{sen}\frac{\theta}{2^n}$, percebemos que ele pode ser re-escrito como

$$2^n\cdot\frac{\theta}{\theta}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2^n} = \frac{\theta}{\frac{\theta}{2^n}}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2^n} = \theta\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}}\right).$$

Mas, é possível provarmos que para valores cada vez maiores de $n$ o quociente acima se aproxima de 1, ou seja, se $n\to\infty$ então $\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}}\right)\to 1$.

Assim, Viète fez a identificação

$$\operatorname{sen}\theta = \theta\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{8}\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cos\frac{\theta}{2^n}\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}\cdots$$

Para $\theta = \pi/2$ temos $\operatorname{sen}\theta = 1$ e, portanto,

$$1 = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cdots\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}\cos\frac{\pi}{2^n}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\cdots \tag{2.4}$$

Novamente, das clássicas fórmulas $\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta = 1$ e $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \operatorname{sen} a\operatorname{sen} b$ temos que $\cos\theta = -1+2\cos^2\frac{\theta}{2}$, donde $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta}$.

Dessa forma, como $\cos\pi/2 = 0$ temos que,

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}},$$

$$\cos\frac{\pi}{16} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}},\ \textit{etc.}$$

Substituindo na equação (**??**) obtemos

$$1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots \tag{2.5}$$

Que, por fim, é equivalente à

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots} \tag{2.6}$$

Apesar de toda a sofisticação que a matemática já possuía, ainda necessitou-se mais de um século para que um contemporâneo de Viète, o francês J. H. Lambert (1728 - 1777) em 1761 provasse que $\pi$ é realmente um número irracional. Lambert se apoiou na teoria das funções contínuas para obter a sua demonstração. Outras demonstrações em linguagem mais "moderna" foram apresentadas e, uma razoavelmente simples (se é que estas palavras podem ser utilizadas em matemática) pode ser obtida na obra de Figueiredo (2002, p. 9). A prova que ali se encontra, a qual discutiremos abaixo, é devida a I. Niven e foi publicada no Bulletin of the American Mathematical Society, 53 (1947), p. 509.

**Teorema 2.1.** *$\pi$ é um número irracional.*

Para provarmos que $\pi$ é um número irracional, vamos supor que $\pi^2$ seja uma fração irredutível e chegar a algum absurdo, logo $\pi^2$ só pode ser irracional e, consequentemente, $\pi$ também o é. Para tanto, faremos uso das idéias dos lemas descritos abaixo.

**Lema 2.1.** *Dada a função $f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$, com $n$ inteiro positivo, então $D^k f(0)$ é um número inteiro para qualquer $k = 0, 1, 2, \cdots$, onde $D^k f$ representa a $k-$ésima derivada de $f$ e $D^0 f = f$.*

**Prova:** A fórmula de Leibnitz para as derivadas de um produto de funções $g$ e $h$ é dada por

$$D^k(gh) = \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} D^j g \cdot D^{k-j} h,$$

onde $\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$ representam os coeficientes do Binômio de Newton.

Aplicando a fórmula de Leibnitz para a função $f$ obtemos

$$D^k f = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} D^j x^n \cdot D^{k-j} (1-x)^n \qquad (2.7)$$

Por outro lado, um cálculo simples mostra que:

- Se $j < n$ então $D^j x^n|_{x=0} = n(n-1)\cdots(n-j)x^{n-j}|_{x=0} = 0$;
- Se $j = n$ então $D^j x^n|_{x=0} = n(n-1)\cdots 3.2.1|_{x=0} = n!$;
- Se $j > n$ então $D^j x^n|_{x=0} = 0|_{x=0} = 0$.

Substituindo estes valores na (**??**) concluímos que

$$D^k f(0) = 0 \text{ se } k < n \qquad (2.8)$$

e

$$D^k f(0) = \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} n! D^{k-n} (1-x)^n|_{x=0} \text{ se } k \geq n \qquad (2.9)$$

Sendo os coeficientes binomiais inteiros, temos que a expressão do lado esquerdo de (**??**) é um inteiro, donde está provado o resultado. ∎

**Lema 2.2.** *$D^k f(1)$ é um número inteiro para qualquer $k = 0, 1, 2, 3, \cdots$*

**Prova:** Basta observar que $f(1-x) = f(x)$, ou seja, $f(1) = f(0)$, e que pelo lema anterior foi provado que $D^k f(0)$ sempre é um inteiro, logo $D^k f(1)$ será um inteiro. ∎

Assumindo agora que $\pi^2 = \frac{p}{q}$ fração irredutível, definimos a seguinte função

$$F(x) = q^n\{\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} D^2 f(x) + \cdots + (-1)^n D^{2n} f(x)\}.$$

Dos lemas e com a hipótese de que $\pi^2 = p/q$ temos que $F(0)$ e $F(1)$ são números inteiros.

Considerando que $a'$ representa a derivada de uma função, temos as relações

$$
\begin{aligned}
\{F'(x)\text{sen}\,\pi x - \pi F(x)\cos\pi x\}' &= F''(x)\text{sen}\,\pi x + \pi F'(x)\cos\pi x - \pi F'(x)\cos\pi x + \pi F(x)\text{sen}\,\pi x\\
&= F''(x)\text{sen}\,\pi x + \pi F(x)\text{sen}\,\pi x\\
&= (F''(x) + \pi^2 F(x))\text{sen}\,\pi x\\
&= (q^n(-1)^n D^{2n+2} f(x) + q^n \pi^{2n+2} f(x))\text{sen}\,\pi x,\ \text{ como } D^{2n+2}f(x) = 0\\
&= p^n \pi^2 f(x)\text{sen}\,\pi x,
\end{aligned}
$$

observe que $q^n \pi^{2n+2} = q^n \pi^{2n}\pi^2 = q^n \frac{p^n}{q^n}\pi^2 = p^n\pi^2$.

Do Teorema Fundamental do Cálculo[7] aplicado a relação acima, segue-se que

$$
\begin{aligned}
p^n\pi^2 \int_0^1 f(x)\text{sen}\,\pi x\ dx &= F'(x)\text{sen}\,\pi x - \pi F(x)\cos\pi x|_0^1\\
&= (F'(1)\text{sen}\,\pi - \pi F(1)\cos\pi) - (F'(0)\text{sen}\,0 - \pi F(0)\cos 0)\\
&= \pi F(1) + \pi F(0)
\end{aligned}
$$

Com isto chegamos a equação

$$
p^n\pi \int_0^1 f(x)\text{sen}\,\pi x\ dx = F(1) + F(0) \tag{2.10}
$$

que por um lado já verificamos que é inteiro. Já o lado esquerdo de (**??**) é um número positivo e menor do que 1, pois para todo $0 < x < 1$ temos que $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$. Além disso

$$
0 < \pi p^n \int_0^1 f(x)\text{sen}\,\pi x\ dx < \pi\frac{p^n}{n!}\int_0^1 \text{sen}\,\pi x\ dx = \frac{2p^n}{n!} \tag{2.11}
$$

Como $\lim_{n\to\infty}\frac{p^n}{n!} = 0$ temos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $2p^n/n! < 1$, portanto chegamos a um absurdo. ∎

Provando-se, por fim, a irracionalidade do número $\pi$ e observando que mesmo nos registros mais antigos, nos mais diferentes povos, o $\pi$ já era investigado, surge-nos um novo questionamento: Por que a demora em se provar que o número $\pi$ é um número irracional? Ao contrário, por exemplo, do número $\sqrt{2}$, que já no tempo de Pitágoras se conhecia a sua incomensurabilidade com uma unidade pré-fixada. Esta questão está intimamente relacionada com a "natureza" dos números reais e será abordada, juntamente com outros tópicos, na próxima seção.

# 3 Explorando a reta real

Algumas das primeiras noções sobre conjuntos numéricos que nos são apresentadas fazem referência ao conjunto dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais e aprendemos, ainda, que o conjunto dos números reais engloba (de forma não disjunta) todos estes conjuntos, ou seja, o conjunto dos reais é formado pelos racionais e irracionais. Podemos observar, também, que quando solicitado exemplos de números racionais e irracionais provavelmente para 100% das solicitações surgem respostas como

$$
\frac{1}{2}, \frac{-3}{4}, \frac{5}{7}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{7}, \pi.
$$

É claro que estes valores surgem, pois eles são muito mais representativos que vários outros racionais e irracionais, como por exemplo a fração $\frac{2507}{4562}$ e o número de Euler $e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Esta noção (elementar) que foi apresentada já começa a estabelecer diferentes "categorias" nos conjuntos numéricos pois o quê, além da periodicidade, diferencia o conjunto dos racionais dos irracionais?

Quem contribuiu imensamente para a compreensão desta questão foi o matemático G. Cantor (1845 - 1918) com sua teoria sobre os diferentes tipos de infinito. Cantor provou que apesar de ambos os conjuntos dos naturais e dos reais serem infinitos, a potência de seus infinitos é distinta.

[7] Se $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável em [0,1], então $\int_0^1 g'(x)dx = g(1) - g(0)$.

Segundo Vilela (2005), *"George Cantor, com sua teoria dos números transfinitos, não apenas mostrou que era possível analisar sem nenhuma contradição este conceito, mas ainda provou que existem vários tipos de infinito diferentes - alguns maiores, outros menores"* (p. 75).

E, também,

> Cantor estendeu aos conjuntos infinitos a idéia de que eles são numericamente iguais se for possível estabelecer uma relação biunívoca entre os seus elementos. Se isso for impossível, então um deles é maior do que o outro. Ele conseguiu provar que é possível associar cada número racional a um número natural e que, portanto, os dois conjuntos são numericamente iguais. (p. 77).

Dizemos, de fato, que um conjunto é enumerável se possui uma correspondência biunívoca com o conjunto dos naturais ou for finito. Caso contrário, ele é dito não enumerável.

Como os naturais são enumeráveis e os reais são não enumeráveis [8] temos, consequentemente, que a não enumerabilidade é uma característica/propriedade dos números irracionais. Portanto, sob a reta real existem significativamente mais números irracionais que racionais. Grosseiramente falando, quem dá o "preenchimento", o "peso", da reta real são os irracionais.

Estas observações nos auxiliam a compreender os reais, mas não nos ajudam a responder a questão anteriormente formulada: Por que a demora em se provar que Pi é um número irracional?

A resposta mais óbvia é porque necessitou-se de mais ferramentas matemáticas para realizar tal feito e, também, necessitou-se conhecer melhor o conjunto dos reais.

Colocamos isto porque apesar de "conhecermos" os números reais, concordarmos que os irracionais são não enumeráveis e, portanto, representam a grande maioria dos reais, ainda é possível mostrar que todos os números irracionais da forma $p = \pm a \pm \sqrt{b}, a, b \in \mathbb{N}$, e similares[9] formam um conjunto enumerável. Assim, quase todos os números irracionais que conhecemos (lembramos) representam a ínfima parte dos reais, uma vez que também são enumeráveis.

Bom! Neste caso quem são os irracionais que "sobraram" para compor o conjunto dos reais e que representam (em potência de infinito) uma quantidade significativamente superior? Os números $\pi$ e $e$ fazem parte deste conjunto?

Euler já havia demonstrado que $e$ e $e^2$ são irracionais e, segundo Garbi (2007) ele percebeu um fato curioso.

> Enquanto a $\sqrt{2}$ elevada a qualquer expoente par torna-se um número racional, as potências racionais de $e$ continuam a ser irracionais. Parecia que a irracionalidade de $e$ era mais "profunda" do que a de $\sqrt{2}$. [...] Estes indícios sugeriam, portanto, que os números chamados reais poderiam estar divididos em duas categorias: os que são e os que não são raízes de equações polinomiais de coeficientes inteiros. ( p. 193).

Para responder a pergunta acima e, consequentemente, conhecer melhor a natureza dos reais necessitamos de mais um conceito matemático, o dos *números algébricos e transcendentes.*

Qualquer solução de uma equação polinomial da forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

onde os coeficientes $a_i's$ são inteiros, é chamado de um número algébrico. Assim, um número $\alpha$ é algébrico se existe uma equação polinomial com coeficientes inteiros da qual $\alpha$ seja raiz. (Da definição observamos que todo número racional $\frac{p}{q}$ é algébrico, já que é raiz da equação $qx - p = 0$). E, um número é dito transcendente quando ele não é algébrico.

Vamos mostrar, abaixo, que o conjunto dos números algébricos é enumerável[10] e, consequentemente, além dos

[8] Para maiores detalhes veja a bibliografia (LIMA, 2000).

[9] Entendemos por similares o conjunto dos números da forma $q = a + \sqrt{p}$, com $p$ descrito anteriormente.

[10] Veja Figueiredo (2002, p. 16). A demonstração apresentada ali, a qual servirá de base para nossos cálculos, é devida a Cantor.

racionais, todos os irracionais da forma $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[7]{1+\sqrt{2}}$, etc. também são enumeráveis, já que são algébricos. Segue disto que o conjunto dos números transcendentes é não vazio e não enumerável[11].

**Teorema 3.1.** *O conjunto dos números algébricos é enumerável.*

**Prova:** Considere o polinômio com coeficientes inteiros

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0. \tag{3.12}$$

Definimos a *altura* do polinômio $p$, e denotamos por $|p|$, ao número natural

$$|p| = |a_n| + \cdots + |a_1| + |a_0| + n. \tag{3.13}$$

Os números algébricos são raízes de polinômios, com coeficientes inteiros, logo $p(x) = 0$. Mas, o teorema fundamental da álgebra garante que $p(x) = 0$ tem exatamente $n$ raízes complexas (e, portanto, não mais do que $n$ raízes reais).

O número de polinômios do tipo (**??**) com uma altura determinada é um número finito. Logo, o conjunto de todas as raízes dos polinômios de uma determinada altura é finito. Como união enumerável de conjuntos finitos é enumerável segue-se que todas as raízes (conjuntos finitos) de todos os polinômios de todas as alturas (conjunto enumerável) formam um conjunto enumerável. ■

A natureza distinta do número $\pi$ e do número $e$ nos indica que eles são números transcendentes, mas somente em 1873 o matemático francês C. Hermite (1822 - 1901) demonstrou que $e$ é transcendente. *"Mais ainda, provou que e elevado a qualquer número algébrico continua a ser transcendente"* (GARBI, 2007, p. 194). Em 1882, F. Lindemann (1852 - 1939) provou que $\pi$ também é um número transcendente. Lindemann, em seu trabalho, estendeu o método usado por Hermite.

Considerando-se que o produto de números algébricos é algébrico e o produto de um número algébrico por um transcendente é transcendente e, com o auxílio da fórmula de Euler ($e^{i\pi} = -1$), Lindemann usou o seguinte raciocínio,

> $e^{i\pi}$ é algébrico, pois -1, obviamente, o é. Portanto $\pi i$ é transcendente pois $e$ elevado a um número algébrico continuaria a ser transcendente. Se $\pi i$ é transcendente, sendo $i$ algébrico (é solução da equação $x^2 + 1 = 0$), então $\pi$ só pode ser transcendente (GARBI, 2007, p. 194).

Com esta certeza, fica também provado que o clássico problema da quadratura do círculo não tem resposta positiva[12], pois se fosse possível teríamos que $\sqrt{\pi}$ é um número algébrico e, consequentemente, $\pi$ também é algébrico, o que é uma contradição.

Por fim, nos resta aceitar que o conjunto de "peso" da reta real é formado pelo conjunto dos números transcendentes, números da forma $\pi, e, 2^{\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}}, e^{\pi}, \pi^{e}, \pi^{\pi}, \cdots$.

A importância de se conhecer mais exemplos de números transcendentes (além de $e$ e de $\pi$) foi tal, que D. Hilbert (1862 - 1943) na sua famosa lista[13] dos vinte e três problemas apresentada no 2° Congresso Internacional de Matemática em Paris, no ano de 1900, colocou como o 7° problema determinar se $2^{\sqrt{2}}$ era transcendente ou algébrico.

---

[11] O conjunto dos reais é não enumerável e, é composto pelos números algébricos e transcendentes. Como os algébricos são enumeráveis, temos que o conjunto dos transcendentes é não vazio e não enumerável.

[12] Assumimos, para tanto, que todo número construtível é algébrico. Maiores detalhes consulte o livro de L. H. Jacy Monteiro, "A Teoria de Galois", conforme a referência (FIGUEIREDO, 2002, p. 33).

[13] Esta lista ajudou a delinear o rumo para as novas pesquisas em matemática.

Em 1929, Siegel provou que $2^{\sqrt{2}}$ é trascendente, mas foi Gelfond (1934) e Schneider (1935), independentemente, que generalizaram a questão, ou seja, provaram que: "Sejam $\alpha$ e $\beta$ números algébricos (reais ou complexos). Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$ e $\beta$ não for um número racional (real), então $\alpha^{\beta}$ é transcendente."

Com isso, podemos dizer que a natureza dos reais foi vastamente apresentada.

## 4 Conclusão

O trabalho aqui exposto teve a intenção de instigar a curiosidade sobre questões matemáticas que aparentemente nos são banais e mostrar que para fazer ciência, a investigação, a quebra de tabus, são fundamentais, principalmente quando associadas a pré-concepções sobre a facilidade ou dificuldade de se compreender determinados conceitos.

Assim, desejamos que a matemática seja apresentada como uma ciência em construção, onde para cada descoberta, cada número real, cada fórmula, necessitou-se de tempo para amadurecer estas idéias.

Queremos, por fim, mostrar que mesmos conceitos aparentemente simples podem conter uma implicância de significados complexos e que a beleza da matemática está na curiosidade de buscar mais esclarecimentos, mais compreensão. Este também é um dos papéis desta ciência: o de aguçar os sentidos, fazer querer saber mais, olhar além.

## Referências


[1] *Bíblia Sagrada*, Paulus, São Paulo, $26^a$ edição, 1998.

[2] BOYER, C.B. - *História da Matemática*, Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, $2^a$ edição, 2006.

[3] CONTADOR, P. R. - *Matemática, uma breve história*, vol. 1, Editora Livraria da Física, São Paulo, $2^a$ edição, 2006.

[4] EUCLIDES - *Os Elementos / Euclides*, Editora Unesp, São Paulo, 2009.

[5] EVES, H. - *Introdução à História da Matemática*, Editora Unicamp, Campinas, 2004.

[6] FIGUEIREDO, D. G. - *Números Irracionais e Transcendentes*, SBM, Rio de Janeiro, 2002.

[7] GARBI, G. G. - *A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática*, Editora Livraria da Física, São Paulo, $3^a$ edição, 2009.

[8] GARBI, G. G. - *O Romance das Equações Algébricas*, Editora Livraria da Física, São Paulo, $2^a$ edição, 2007.

[9] LIMA, E. L. - *Curso de Análise*, vol. I, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), $10^a$ edição, 2000.

[10] VILELA, D. S. - *Dos Gregos à Modernidade, o Medo do Infinito*, in *SCIAM, Espcial História - Os Grandes Erros da Ciência*, $n^o$6, 2005, p. 74-79.