V Bienal da SBM
Sociedade Brasileira de Matemática
UFPB - Universidade Federal da Paraíba
18 a 22 de outubro de 2010

CLIQUES, CONJUNTOS ESTÁVEIS E MATEMÁTICA DISCRETA

KATY WELLEN LEÃO * & JALILA RIOS DOS SANTOS †

Resumo

O constante avanço da tecnologia e da acessibilidade da internet possibilitou o que antes era impossível. Atualmente, é fácil se ter contato com pessoas distantes, discutir temas que sejam de comum interesse sem a necessidade de um espaço físico. É, principalmente, por esse motivo, que as redes de relacionamento como Orkut, Twitter e Facebook vêm se tornando comum entre jovens e adultos de todo o mundo.

As ligações que existem dentro dessas interações virtuais, no entanto, vão muito além dessa mera febre. Podemos modelar tais interações por meio de estruturas que são pouco conhecidas até mesmo por alunos da graduação de matemática. Essa modelagem é um exemplo prático da teoria dos grafos, uma abordagem em matemática discreta, ou finita, que de modo geral, é o estudo das estruturas matemáticas que não requerem noção de continuidade e trata de objetos cujas representações geométricas são disjuntas e na maioria das vezes são conjuntos contáveis.

Os grafos são estruturas que se prestam a modelar ligações entre os mais variados tipos de objetos, como redes de relacionamentos. Dentro dessa teoria existe uma classe interessante chamada grafos perfeitos. Essa classe se sobressai por apresentar duas características peculiares, $\alpha-$*perfeição* e $\chi-$*perfeição*: o grafo é denominado perfeito quando possui essas duas características simultaneamente.

As propriedades de um grafo perfeito se mostram importantes nas suas aplicações práticas, que possibilitam que problemas modelados com tais grafos sejam resolvidos com maior agilidade do que com grafos quaisquer. Um exemplo desses problemas é o número cromático que, num um grafo qualquer se apresenta como um problema resolvido computacionalmente em tempo não-polinomial, enquanto que num grafo perfeito o algoritmo é executado em tempo polinomial. Esta classe especial de grafos apresenta ainda um grande número de subclasses, dentre as quais, estão os grafos bipartidos, os intervalares e os cordais, que são os mais conhecidos.

Em 1972, Lóvaz, importante estudioso do assunto, conseguiu provar que todo grafo que contém uma das perfeições, possui também a outra, sendo, dessa forma, considerado perfeito. Fulkerson e Berge, dois estudiosos deste mesmo assunto, demonstraram lemas que ajudaram Lóvaz a provar esse teorema. Neste mini-curso, temos o objetivo de apresentar e demonstrar os lemas e o referido teorema.

Há outro importante teorema sobre grafos perfeitos provado mais recentemente, em 2003 : O Teorema Forte De Grafos Perfeitos; demonstrado por M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour e R. Thomas. Contudo não é nosso objetivo demonstrá-lo aqui.

Palavras chaves

Grafos, Clique, Conjuntos estáveis, Grafos perfeitos, Indução Finita

1 Definições iniciais

Estudando Matemática discreta percebemos que podemos modelar coisas curiosas com a mesma, tão curiosas quanto a que vou lhes apresentar.

*Universidade federal de Pernambucio, UFPE, PE, Brasil, katywellen@ufpe.br
†Universidade Federal de Pernambuco, UFPE, PE, Brasil, e-mail ...

Pense numa rede de relacionamentos G, como Orkut, Facebook, Twitter, MSN; vamos definir algumas coisas sobre ela:

- *Grupo de amigos* é um conjunto de pessoas onde são duas a duas amigas na rede.
- *Grupo de não amigos* é o oposto do grupo de amigos, é um conjunto de pessoas não amigas duas a duas.

Sejam também:

- $\omega(G)$ a quantidade de pessoas do maior grupo de amigos possível dentro da rede.
- $\alpha(G)$ a quantidade de pessoas do maior grupo de não amigos na rede.
- $\kappa(G)$ o menor número de grupos de amigos tal que a união desses grupos seja toda a rede.
- $\chi(G)$ a menor quantidade de grupos de não amigos necessários para que a união desses grupos seja toda a rede.

Vamos pensar numa coloração da rede da seguinte forma: duas pessoas que são amigas não podem usar a mesma cor de camisa; então todo grupo de amigos terá todas as pessoas com camisas de cores diferentes e tomando todas as pessoas que vestem camisas de cor igual teremos um conjunto de não amigos. Tomando todos os grupos de não amigos, teremos toda a rede colorida, o $\chi(G)$ é a menor quantidade de cores necessária para cobrir toda a rede.

Para uma rede qualquer valem as desigualdades:

$$\alpha(G) \leq \kappa(G)$$

$$\omega(G) \leq \chi(G)$$

Podemos comprovar a primeira desigualdade pelo fato de que cada pessoa do grupo de não amigos tem, necessariamente, que vir de um grupo de amigos diferente.

A segunda vem do fato que em todo grupo de amigos todas as pessoas tem uma cor diferente, o maior grupo então seria a quantidade mínima de cores necessária, mas há casos onde se precisa de mais cores do que o maior grupo de amigos, mas pra entender melhor isso vejamos um exemplo: pense numa roda T de pessoas, onde cada pessoa conhece apenas seus dois vizinhos, se temos uma roda com o número de pessoas ímpar, precisamos de três cores, mas o maior $\omega(T)$ é de duas pessoas, logo $\omega(T) < \chi(T)$.

Imagine como seria calcular estes números numa grande rede de relacionamentos como alguma das que você conhece. Quais as condições necessárias para haver igualdade nas desigualdades descritas acima para uma rede e todas as suas sub-redes (a rede restrita a algumas pessoas) Isto é, termos o tamanho do maior grupo de não amigos igual ao menor número de grupos de amigos formando toda a rede; e o tamanho do maior grupo de amigos sendo o menor número de cores (ou grupos de não-amigos) para dar tal coloração da (ou formando a) rede e sub-redes.

Podemos modelar uma rede de relacionamentos de forma bem simples usando uma teoria da matemática discreta, mais especificamente a teoria dos grafos.

Um grafo G é uma estrutura matemática formada por um conjunto de vértices denotado por $V(G)$, um conjunto de arestas denotado por $E(G)$ e uma relação de incidência entre os elementos deles $I(G)$: uma aresta pode ser incidente a um vértice ou não, e no máximo incidente a dois vértices. De modo geral, os vértices representam objetos e as arestas à existência de uma dada relação entre eles; no nosso exemplo, as pessoas serão os vértices e as relações de amizade entre elas as arestas. Neste mini-curso veremos apenas Grafos Simples, que são caracterizados por todas suas arestas serem incidentes a dois vértices distintos, uma vez que a relação de amizade definida anteriormente é sempre entre duas pessoas diferentes.

Os números descritos acima também são definidos num grafo qualquer, onde a relação de amizade é substituída pela mais geral: a existência de arestas. Definindo dois conceitos importantes no nosso mini-curso: um *Clique* em G é um subconjunto$A$ de vértices em G tal que são dois a sois adjacentes; um *Conjunto Estável* ou *conjunto* *independente* de G é um subconjunto X de G tal que seus vértices são dois a dois não adjacentes. Num grafo qualquer temos que $\alpha(G)$ é a cardinalidade do maior conjunto estável de G, denotado acima como o maior grupo de não amigos na rede; o $\omega(G)$ é a cardinalidade do maior clique em G, denotado no exemplo como o maior grupo de amigos na rede; o $\kappa(G)$ é menor quantidade de cliques necessários para cobrir todo o grafo, denotado pela menos quantidade de grupos de amigos necessários pra cobrir a rede; o $\chi(G)$ é a mínima coloração de G, denotada como a menor quantidade de cores necessárias para cobrir toda a rede. Então o que desejamos é estudar uma classe especial de grafos, onde valem as igualdades nas equações acima para o grafo G e todos seus subgrafos induzidos por vértices G_A, $\forall\ A \subseteq V(G)$.

P1. $\chi(G_A) = \omega(G_A), \quad \forall A \subseteq V(G)$

P2. $\alpha(G_A) = \kappa(G_A), \quad \forall A \subseteq V(G)$

Dizemos que um grafo é *χ-perfeito* quando apresenta P1 e *α-perfeito* quando apresenta P2; quando apresenta P1 e P2 chamamos apenas de *perfeito*. Veremos mais adiante que se um grafo é α-perfeito, também é χ-perfeito.

Definimos *grafo complementar* $\overline{G}$ de um grafo G como sendo o grafo formado pelo mesmo conjunto de vértices e tendo aresta entre dois vértices se e somente se não existe esta aresta em G. Olhando para os vértices de um clique no grafo que modela nossa rede de relacionamentos (um grupo de amigos), no grafo complementar corresponderão a um conjunto estável (um grupo de não amigos) e vice-versa. Isto vale para qualquer grafo G, logo $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$ e $\chi(G) = \kappa(\overline{G})$, reciprocamente $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$ e $\kappa(G) = \chi(\overline{G})$.

Pelo que vimos até agora podemos ver a primeira proposição:

Proposição 1.1. *G é perfeito se e somente se $\overline{G}$ é perfeito.*

Prova: Temos que $\alpha(G) = \kappa(G)$ e como $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$ e $\kappa(G) = \chi(\overline{G})$ conclui-se que:

$$\chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G})$$

Temos também que $\chi(G) = \omega(G)$ e analogamente temos $(G) = \kappa(\overline{G})$ e $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$ assim concluímos que

$$\kappa(\overline{G}) = \alpha(\overline{G}). \qquad \blacksquare$$

Para auxiliar na compreensão de alguns exemplos é necessário saber algumas definições: Um λ *caminho* em G é uma seqüencia de vértices e arestas intercalados de forma que comece num vértice e termine em outro vértice e a aresta entre dois vértices é incidente aos dois. Um *ciclo* é um λ caminho tal que o vértice inicial é também o vértice final. E um *circuito* é um ciclo cujos vértices não se repetem exceto o último.

Um grafo é um importante objeto matemático pela sua estrutura simples aliada a capacidade de modelar os mais variados tipos de problemas. Existem várias classes de grafos: bipartidos, planares, triangulares, intervalares árvores, entre outros, mas nesse mini-curso nos interessa as classes que possuem perfeição, onde as mais conhecidas são os bipartidos, triangulares e intervalares.

Grafos bipartidos: Dada uma partição$\{A, B\}$ de $V(G)$, as arestas de G existem apenas entre vértice de A e vértice de B. Exemplificando de maneira interessante, pense numa quadrilha, onde ficam rapazes de um lado e moças do outro, existe uma relação entre um rapaz e uma moça se eles têm a possibilidade de fazer um casal na dança, assim não existe ligação entre dois rapazes nem duas moças, logo a partição $\{A, B\}$ refere-se ao conjunto de moças A e o conjunto dos rapazes B. Para qualquer grafo bipartido G temos que $\chi(G) = 2 = \omega(G)$.

Grafos triangulares: Podemos defini-lo de acordo com a idéia de circuito dada mais acima, um grafo é definido triangular se pra todo circuito de tamanho $t \geq 4$ possui uma aresta entre os vértices não consecutivos. No nosso exemplo podemos dizer que para todo circuito com mais de três pessoas todas elas são amigas.

Grafos completos: um grafo é completo se para todo vértice em G todos os vértices estão ligados entre si. No nosso exemplo, ele é um grupo de amigos.

Grafos intervalares: Uma definição informal seria: representando vértices como intervalos de tempo, existe aresta entre dois vértices se e somente se existe intercessão entre tais intervalos.

2 Teorema de Lóvasz para Grafos Perfeitos

Para provar o teorema principal precisamos de alguns lemas e algumas propriedades importantes, vamos vê-los então:

Dado $v \in V(G)$, $G - v$ é o grafo obtido de G retirado-se o vértice v e todas as arestas incidentes a v.

Seja $G \circ x$ obtido através de multiplicação de vértices, isto é, dado o vértice x acrescenta-se cópia x' e aresta $x'z$ se e somente se existe aresta xz, $\forall z \in V(G)$. Observe que para x e y vértices distintos de G,

$$(G \circ x) - y = (G - y) \circ x.$$

Mais geralmente, se $(x_1, x_2, ..., x_n)$ são vértices de G e $h = (h_1, h_2, ..., h_n)$ é um vetor de inteiros não-negativos, então $H = G \circ h$ é construído por substituição de cada x_i por um conjunto de h_i vértices $x_i^1, ..., x_i^h i$ e vai existir aresta entre x_i^s e x_j^t se e somente se x_i e x_j são adjacentes em G. Dizemos que H é obtido de G através de multiplicação de vértices. Tal definição permite $h_i = 0$, implicando que não há cópia de x_i, nem x_i. Então todo grafo induzido por vértices de G pode ser obtido por multiplicação de um vetor de $h \in \mathbb{Z}^n$ com $h_i \in \{0, 1\}$.

Lema 2.1. *(Claude Berge[1961]). Seja H obtido de G por multiplicação de vértices.*

$$\textit{Se } G \textit{ satisfaz P1, então } H \textit{ satisfaz P1.} \tag{2.1}$$

$$\textit{Se } G \textit{ satisfaz P2, então } H \textit{ satisfaz P2} \quad . \tag{2.2}$$

Prova: O lema é verdadeiro pro caso trivial, se G tem apenas um único vértice. Vamos assumir que (**??**) e (**??**) valem para todo subgrafo G' de G. Isto é, se H é obtido de G' e G' satisfaz P1 (respectivamente P2), então H satisfaz P1 (respectivamente P2).

Seja $H = G \circ h$. Se uma das coordenadas do vetor h for igual a zero, digamos $h_i = 0$, então H pode ser obtido de $G - x_i$ por multiplicação de vértices. Mas se G satisfaz P1, (respectivamente P2), então $G - x_i$ também satisfaz P1, (respectivamente P2). Neste caso a hipótese de indução implica para H (**??**) e (**??**).

Assim, podemos assumir que cada coordenada $h_i \geq 0$, e desde que H pode ser construído a partir de uma sequência de multiplicações menores, é suficiente provar o resultado para $H = G \circ x$. Vamos denotar x' por "cópia" de x.

Assuma que G satisfaz P1. Então, vamos colorir G usando $\omega(G)$ cores. Note que a cor que usamos em x pode ser usada em x', uma vez que não são adjacentes. Logo temos uma coloração de $G \circ x$ em $\omega(G)$ cores. Também como x e x' não são adjacentes, $\omega(G \circ x) = \omega(G)$. Sabemos que $\chi(G \circ x) \geq \omega(G \circ x)$ e temos uma coloração de $G \circ x$ com $\omega(G) = \omega(G \circ x)$ cores, daí uma coloração mínima. Portanto $H = G \circ x$ satisfaz P1 e temos (**??**).

Agora vamos assumir que G satisfaz P2, podemos mostrar que $\alpha(G \circ x) = \kappa(G \circ x)$.

Seja K uma cobertura por cliques de G com $|K| = \kappa(G) = \alpha(G)$, e seja K_x um clique de K contendo x, então temos dois casos:

Caso 1: x está contido num conjunto estável de cardinalidade máxima S de G, isto é $|S| = \omega(G)$. Neste caso $S \cup \{x'\}$ é um conjunto estável de $G \circ x$, então

$$\alpha(G \circ x) = \alpha(G) + 1.$$

Como $K \cup \{\{x'\}\}$ cobre $G \circ x$, temos que

$$\kappa(G \circ x) \leq \kappa(G) + 1 = \alpha(G) + 1 = \alpha(G \circ x) \leq \kappa(G \circ x)$$

então $\alpha(G \circ x) = \kappa(G \circ x)$.

Caso 2: Nenhum conjunto estável máximo de G contém x. Neste caso,

$$\alpha(G \circ x) = \alpha(G).$$

Em qualquer grafo temos que cada clique intercepta um conjunto estável no máximo uma vez. E como G possui P2, $\alpha(G) = \kappa(G)$, cada clique de K intercepta um conjunto estável máximo exatamente uma vez. Isto é verdade em particular para K_x. Mas x não é um membro de nenhum conjunto estável máximo, então, $D = K_x - \{x\}$ intercepta cada conjunto estável máximo de G exatamente uma vez, então

$$\alpha(G_{V-D}) = \alpha(G) - 1$$

e como G_{V-D} é subgrafo induzido por vértices de G possui P2. Isto implica que

$$\kappa(G_{V-D}) = \alpha(G_{V-D}) = \alpha(G) - 1 = \alpha(G \circ x) - 1.$$

Tomando uma cobertura por cliques de G_{V-D} de cardinalidade $\alpha(G \circ x) - 1$, junto com o clique extra $D \cup \{x'\}$, obtemos uma cobertura de $G \circ x$, então

$$\kappa(G \circ x) = \alpha(G \circ x). \quad \blacksquare$$

Lema 2.2. (*Fulkerson*[1971], *Lóvasz* [1972]). *Seja G um grafo tal que cada um dos seus subgrafos induzidos próprios satisfaz P2, e seja H obtido de G por multiplicação de vértices. Se G satisfaz P3 então H satisfaz P3, onde:*

$$\textbf{\textit{P3.}}\ \omega(G_A)\alpha(G_A) \geq |A|, \quad \forall A \subseteq V(G)$$

Prova: Seja G satisfazendo P3, escolha H um grafo com o menor número possível de vértices que pode ser obtido a partir de G por multiplicação de vértices mas não satisfaz P3, temos

$$\omega(H)\alpha(H) < |X|, \tag{2.3}$$

onde X denota um conjunto de vértices de H. Observe que P3 é válida para cada subgrafo induzido próprio de H.

Como na prova do lema anterior, podemos assumir que cada vértice de G foi multiplicado por pelo menos 1 e que algum vértice u foi multiplicado por $h \geq 2$. Seja $U = \{u^1, u^2, ..., u^h\}$ os vértices de H correspondentes a u. Tome $u' \in U$. Pela minimalidade de H, P3 é satisfeito por $H_{X-u'}$, que é

$$\begin{aligned} |X| - 1 = |X - u'| &\leq \omega(H_{X-u'})\alpha(H_{X-u'}) \\ &\leq \omega(H)\alpha(H) \\ &\leq |X - 1| \qquad \textit{por } (\textbf{??}). \end{aligned}$$

Então as desigualdades acima são igualdades e podemos definir

$$\begin{aligned} p &= \omega(H_{X-u'}) = \omega(H), \\ q &= \alpha(H_{X-u'}) = \alpha(H), \quad \text{e} \\ & pq = |X| - 1 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Daí nenhum $u' \in U$ pertence a qualquer conjunto estável máximo de H.

Desde que H_{X-U} é obtido de $G - u$ por multiplicação de vértices, $G - u$ satisfaz P2, pelo Lema **??** temos que H_{X-U} satisfaz P2. Então H_{X-U} pode ser coberto por um conjunto de q cliques, digamos $K_1, K_2, ..., K_q$. Podemos assumir que os K_i são disjuntos e que $|K_1| \geq |K_2| \geq ... \geq |K_q|$. Assim,

$$\sum_{i=1}^{q} |K_i| = |X - U| = |X| - h = pq - (h - 1) \qquad \textit{por}(\textbf{??}).$$

Desde que $|K_i| \leq p$ no máximo $h-1$ cliques não contribuí com p para a soma. Daí

$$|K_1| = |K_2| = ... = |K_{q-h+1}| = p.$$

Seja H' o subgrafo de H induzido por $X' = K_1 \cup ... \cup K_{q-h+1} \cup \{u'\}$. Então

$$|X'| = p(q-h+1) + 1 < pq + 1 = |X| \quad por(\textbf{??}) \tag{2.5}$$

Então, pela minimalidade de H,

$$\omega(H')\alpha(H') \geq |X'|. \tag{2.6}$$

Mas $p = \omega(H) \geq \omega(H')$, então

$$\alpha(H') \geq |X'|/p \quad por(\textbf{??})$$

$$\alpha(H') > q-h+1 \quad \text{pela igualdade em } (\textbf{??}).$$

Seja S' um conjunto estável de H' de cardinalidade $q-h+2$. Sabendo que os vértices de um conjunto estável devem pertencer a cliques diferentes e H' é coberto pelos cliques disjuntos $K_1, \ldots, K_{q-h+1}$ e $\{u'\}$, certamente $u' \in S'$. Caso contrário S' poderia conter dois vértices de um mesmo clique logo $S = S' \cup U$ é um conjunto estável de H com mais de q vértices, contradizendo a definição de q.

Teorema 2.1. *The Perfect graph theorem (Lóvasz [1972]) Para um Grafo $G = (V, E)$, As seguintes proposições são equivalentes:*

$$\omega(G_A) = \chi(G_A) \quad (\forall A \subseteq V), \tag{2.7}$$

$$\alpha(G_A) = \kappa(G_A) \quad (\forall A \subseteq V), \tag{2.8}$$

$$\omega(G_A)\alpha(G_A) \geq |A| \quad (\forall A \subseteq V). \tag{2.9}$$

Prova: Podemos assumir que o teorema é verdadeiro para todos os grafos G com menos vértices que G.

(**??**) $\Rightarrow$ (**??**). Podemos colorir G_A com $\omega(G_A)$ cores. Desde que existe no máximo $\alpha(G_A)$ vértices de dada cor segue que $\omega(G_A)\alpha(G_A) \geq |A|$.

(**??**) $\Rightarrow$ (**??**). Seja G satisfazendo (**??**); pela hipótese de indução os subgrafos de G induzidos por vértices satisfarão (**??**),(**??**) e (**??**), basta mostrar que $\omega(G) = \chi(G)$.

Se temos um conjunto estável S de G que intercepta cada clique máximo de G em um vértice: $\omega(G_{V-S}) = \omega(G) - 1$. Pela indução, poderíamos pintar S de vermelho e pintar G_{V-S} em $\omega(G) - 1$ outras cores, e teríamos $\omega(G) = \chi(G)$.

Suponha que G_{V-S} tem um clique $K(S)$ de tamanho $\omega(G)$ para todo conjunto estável S de G. Seja $\mathcal{S}$ a coleção de todos os conjuntos estáveis de G, lembrando que $S \cap K(S) = \emptyset$. Para cada $x_i \in V$, seja h_i o número de cliques $K(S)$ que contém x_i. Seja H o grafo obtido de G por multiplicação de cada x_i por h_i. De um lado pelo lema (**??**),

$$\omega(H)\alpha(H) \geq |X|.$$

De outro lado, temos os seguintes fatos

$$\begin{aligned}
|X| &= \sum_{x_i \in V} h_i = \sum_{S \in \mathcal{S}} |K(S)| = \omega(G)|\mathcal{S}|, \\
\omega(H) &\leq \omega(G), \\
\alpha(H) &= \max_{T \in \mathcal{S}} \sum_{x_i \in T} h_i \\
&= \max_{T \in \mathcal{S}} \left[\sum_{S \in \mathcal{S}} |T \cap K(S)| \right] \\
&\leq |\mathcal{S}| - 1,
\end{aligned}$$

que juntos implicarão numa contradição

$$\omega(H)\alpha(H) \leq \omega(G)(|\mathcal{S}| - 1) < |\mathcal{X}|.$$

(**??**)⇒(**??**). Decorre do que já foi provado que

$$\begin{aligned} G \text{ satisfaz } (\textbf{??}) &\Leftrightarrow \overline{G} \text{ satisfaz } (\textbf{??}) \\ &\Leftrightarrow \overline{G} \text{ satisfaz } (\textbf{??}) \Leftrightarrow G \text{ satisfaz } (\textbf{??}) \end{aligned}$$

Corolário 2.1. *Um grafo G é prefeito se e somente se para todo grafo H obtido de G por multiplicação de vértices é perfeito.*

Referências

[1] GOLUMBIC, M. C. - *Algorithmic graph theory and perfect graphs.*, Academic Press, New York, First edition, 1980.
[2] TUCKER, ALAN - *5.5 Perfect Graphs*, Handbook of graph theory, edited by Jonathan L. Gross and Jay Yellen, CRC Press, 2004, 431-444.