____________. **Matemática Recreativa: fatos e fantasias**. vol. I. São Paulo: Saraiva, 1965.

____________. **Matemática Recreativa: fatos e fantasias**. vol. II. São Paulo: Saraiva, 1965.

____________. **O mundo precisa de ti, professor**. Rio de Janeiro: Vecchi, 1966.

____________. **O problema das definições em matemática: erros, dúvidas e curiosidades**. São Paulo: Saraiva, 1965.

____________. **O professor e a vida moderna**. Rio de Janeiro: Vecchi, 1966.

____________. **Os números governam o mundo: o folclore da matemática**. São Paulo: Tecnoprint, 1984.

____________. **Páginas do bom professor**. Rio de Janeiro: Vecchi, 1969.

____________. **Roteiro do bom professor**. Rio de Janeiro; Vecchi,

_____________. **Matemática divertida e curiosa** (8ª ed). Rio de Janeiro: Record, 1974.

_____________. **Matemática Recreativa: fatos e fantasias**. vol. I. São Paulo: Saraiva, 1965.

_____________. **Matemática Recreativa: fatos e fantasias**. vol. II. São Paulo: Saraiva, 1965.

_____________. **Meu anel de sete pedras**. Rio de Janeiro: Record,1995.

_____________. **Numerologia**. Rio de Janeiro: Cia. Editora Americana, 1971.

_____________. **O jogo do bicho à luz da matemática**. Curitiba: Grafipar, obra póstuma, sem data.

_____________. **O homem que calculava**. Rio de Janeiro: Record, 1995.

THEBAULT, Victor. **Les récrèations mathématiques** (parmi les nombres curieux). Paris: Gauthier-Villars, 1952.

TORANZAS, Fausto. **ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA** Biblioteca de Ciencias de la Educación, Vo.l 7. Buenos Aires: Editorial Kapelwzsmoreno 372 –, 1959.

__________________. **Álgebra Recreativa**. São Paulo: Fulgor, 1966.

__________________. **Aprenda matemática brincando**. Rio de Janeiro: Hemus, 1970. Tradução de Marina de Camargo.

RICHARD. T. **Nouveau manuel complet des jeux enseigant la science**. Paris: A la Librairie Encyclopèdique de Roret, 1837, Tome I.

RIOLLOT, J. **Les Carrés Magiques: contribuition a leur etude.** Paris: Gauthier-Villars, 1907.

SALOMON, C. **L'Étoiles magique à 8 branches et les étoiles hypermagiques impaires**. Paris: Gauthier-Villars, 1912.

TAHAN, Malba. **A antologia do bom professor**. Rio de Janeiro: Vecchi, 1969.

____________. **A arte de ler e contar histórias**. São Paulo: Saraiva, 1962.

____________. **A arte de ser um perfeito mau professor.** Rio de aneiro: Vecchi, 1969.

____________. **A matemática na lenda e na história**. Rio de Janeiro: Block, 1974.

____________. **Antologia da matemática.** vol. I São Paulo: Saraiva, 1967.

____________. **Antologia da matemática**. vol. II. São Paulo: Saraiva, 1967.

____________. **As maravilhas da matemática**. 5ª edição. Rio de Janeiro: Bloch, 1983.

____________. **Diabruras da matemática: problemas curiosos e fantasias aritméticas**. São Paulo: Saraiva, 1966.

____________. **Didática da matemática.** São Paulo: Saraiva, 1962, vol. I.

____________. **Didática da matemática.** São Paulo: Saraiva, 1962, vol. II.

____________. **Histórias e fantasias da matemática**. Rio de Janeiro: Editora Getúlio Costa, 1939.

____________. **Matemática divertida e curiosa**. Rio de Janeiro: Record, 1995.

____________. **Matemática divertida e curiosa**. Rio de Janeiro: Record, 1997, 8ª ed.

____________. **Matemática divertida e delirante**. São Paulo: Saraiva, 1967.

____________. **Matemática divertida e diferente**. São Paulo: Editora Getúlio costa, 1943.

KRAITCHIK, Maurice. **Le Mathematique des Jeux et récréations mathématiques**. Bruxelles: Imprimerie Stevenns Fréres, 1930.

LACROIX, S. E. Essais sur l'enseignement em général, et sur celui des mathématiques em particular**. Paris: Chez Mme. Vê. Courcier, 1816.**

LUCAS, E. M. **Récréations Mathématiques**. Paris; Gauthier Villars, 1886, vol II.

____________. **Récréations mathématiques**. Paris: Gauthier-Vilars, 1882 vol I.

____________. **L'arithmétique amusante**. Paris: Gauthier-Villars et fils, 1895.

____________. **Récréations Mathématiques**, vol. IV. Paris: Albert Blanchard, 1960.

____________. **Récréations Mathématiques.** Vol III. Paris, Albert Blanchard, 1892. Tiragem de 1979.

MELLO, Lydio Machado Bandeira de. **A matemática do universo e a matemática dos homens**. Belo Horizonte: 1978, edição manuscrita, vol II.

_____________. **Quadrados mágicos**. Belo Horizonte: UFMG, 1957.

_____________. **II Livro dos quadrados mágicos**. Belo Horizonte: Tipografia da Faculdade de Direito da UFMG, 1959.

MENEZES, Josinalva Estacio. **Travessias difíceis, divisões divertidas e quadrados mágicos**: evolução histórica de três recreações matemáticas. Série Contexto Matemático, Vol II. Recife: UFRPE, 2004.

MÉZIRIAC, Gaspar Bachet de. **Problémes plaisant et délictables qui si font par les nombres**. Paris: 1612.

OZANAM, Jacques. **Récréations Mathématiques et Phisiques**. Pariz: Chez Cl. Ant. Jombert, 1778, 8ª edição. Aumentada e revisada por Jean-Etienne Montucla.

PERELLMAN, Iakov. **Problemas y experimentos recreativos**. URSS-Moscou: 1975.

__________________. **Brincando de matemática**. Rio de Janeiro: Vitória, 1960.

__________________. **Algebra recreativa**. Espanha: Editorial Mir. Miscú, 1978.

__________________. **Matemáticas recreativas**, 4ª ed., 1979. Espanha: Editorial Mir. Miscú, 1979. Edições anteriores: 1965, 1971, 1973.

satisfação. Contudo, mesmo hoje o debate continua sobre a validade de ambos os paradoxos e as racionalizações.

Em suma, as recreações matemáticas, os jogos matemáticos foram feitos por matemáticos – ou estudiosos da matemática – discutidos por matemáticos e para matemáticos ou não matemáticos.

Ao mesmo tempo, sempre houve uma preocupação por parte de alguns matemáticos em tornar a matemática acessível ao maior número possível de pessoas.

O rigor da solução apresentada e os princípios de resolução seguem os princípios vigentes no contexto matemático, no que concerne à demonstração matemática. Assim, é no âmbito da matemática que têm lugar as recreações, e defendidas por tantos, matemáticos ou não, sempre positivamente, tudo leva a um avanço de que é legítima, oportuna e concernente o uso de jogos e recreações no ensino de matemática. Mais ainda, com os trabalhos já existentes a respeito, o professor de matemática já dispõe de elementos para começar a desfrutar das diversas vantagens da utilização do jogo no seu dia a dia.

Para concluir, observamos que, há algumas décadas, as recreações matemáticas têm sido transportadas para o computador, portanto passado à versão virtual contando, para isso, com o auxílio tanto de teorias científicas mais atuais, quanto equipamentos tecnológicos mais sofisticados. Estas são encontradas em forma de softwares e presentes, tanto na *Internet*, quanto em *CDROM* de revistas especializadas. Longe de distanciar, estes adventos aproximam ainda mais as três categorias que foram enfocadas: recreações matemáticas, conhecimento matemático e ensino de matemática.

Referências Bibliográficas

Annales du 5º. Deuxième Congrès International de Récréation Mathématique. Bruxellas, 1937.

BOYER, Carl. **História da Matemática**. São Paulo: Edgar Klucher, 1968.

CHAVIGNAUD, L. **Nouvelle Arithmétique appliquée au commerce et a la marine mis en vers.** Lyon: Chez la veuve et les fils de l'auteur, 1848, 7ª ed. 1ª ed. Em 1484.

DELESALLE, A . **Carrés Magiques.** Paris: Gauthier-Villars, 1956.

ETTEN, Henry Van. **Mathematicall Recreations**: or a collecton of sundrie Problems extracted out of the Ancient and Moderne Philosophers, as secrets in nature, and experiments in Arithmeticke, Geometrie, Cosmographie, Horologographie, Astronomie, Navigation, Musique, Opticks, Architeture, Staticke, Mechanicks, Chemistrie, Waterworkes, Fireworkes, etc. Printed in London by T. Cotes for Richard Hawkins, in Chancery Lane, neere the Rowles, 1633.

HUIZINGA, J. **Homo Ludens: o jogo como elemento de cultura**. São Paulo: Perspectiva, 1980.

tempo precedente, iria decrescendo dessa maneira, 10, 1, 1/10, 1/100, 1/1000, etc., o que forma uma progressão geométrica sub-décupla, cuja soma é igual a 11 1/9. É o intervalo de tempo após o qual Aquiles teria atingido a tartaruga ?

A Seta: O tempo é formado por instantes, que são as medidas menores e indivisíveis. Então ou uma seta está em movimento ou em repouso. Uma seta não pode se mover, porque para que o movimento ocorra, a seta deveria estar numa posição no começo de um instante e num outro no fim do instante. Contudo, isto significa que o instante é divisível o que é impossível porque pela definição, instantes são indivisíveis. Daí, a seta está sempre em repouso.

O Estádio: A metade do tempo é igual a duas vezes o tempo. Tome as três colunas abaixo.

Eles começam na primeira posição. A coluna A começa estacionária enquanto as colunas B e C se movem em igual velocidade em direções opostas. Quando elas buscaram a segunda posição, cada B passou duas vezes na de C e na de A. Portanto toma-se a coluna B duas vezes para passar a coluna A como se faz para passar a coluna C. Contudo, o tempo para as colunas B e C alcançarem a posição da coluna A é o mesmo. Assim a metade do tempo é igual a duas vezes o tempo.

Embora todos os quatro argumentos pareçam ilógicos, não mencionam confusão, eles não são simples de explicar e levam a alguns sérios problemas em matemática. Para os matemáticos gregos, que não tinham conceito real de convergência para o infinito, os raciocínios eram incompreensíveis.

Figura 24. Georg Cantor.

Aristóteles descartou-os como “falácias” sem realmente mostrar porque e os paradoxos de Zeno ficaram escondidos no armário matemático pelos próximos 2500 anos. Por esse tempo, eles foram reduzidos principalmente às novidades da Filosofia. Contudo, eles foram revividos matematicamente no século XX pelos esforços de pessoas como Bertrand Russel e Lewis Carroll. Hoje, armado com as ferramentas das séries convergentes e das teorias de Cantor sobre conjuntos infinitos, esses paradoxos podem ser explicados com alguma antes correr 25 metros. Mas para fazer isso, primeiramente precisa correr os 12,5 metros.

Como o espaço é infinitamente divisível, nós podemos repetir esses “requisitos” infinitamente. Portanto o corredor tem que correr um número infinito de ‘pontos médios’ num tempo finito. Isso é impossível, assim o corredor nunca alcançaria sua meta. Em geral, quem quer que queira se mover de um ponto para outro precisa encontrar esses requisitos, a assim o movimento é impossível, e o que nós percebemos é que o movimento é meramente uma ilusão.

Onde o argumento falha? Por que?

O corredor fica claramente desapontado por não poder ir a lugar nenhum.

Zeno de Elea foi o grande questionador em matemática. Seus paradoxos confundiram matemáticos por milênios e proveram certos agravantes que levaram a numerosas descobertas nas tentativas de resolve-los.

Os quarto famosos paradoxos são a *Dicotomia, o Aquiles, a Seta e o Estádio.*

A Dicotomia: o movimento não pode existir porque antes de o movimento poder buscar seu destino, ele precisa primeiro alcançar o ponto médio, mas antes do ponto médio, precisa alcançar o ponto correspondente ao quarto da distância, mas antes disso, precisa achar o oitavo da distância, etc. Daí, o movimento nunca poderá começar.

O Aquiles: O corredor Aquiles nunca pode agarrar uma tartaruga em fuga à frente dele porque ele precisa primeiro chegar onde a tartaruga começou. Contudo, quando ele chegar lá, a tartaruga se moveu à sua frente, e agora Aquiles precisa correr para a nova posição, a qual por sua vez a tartaruga já se moveu na sua frente, etc. Daí a tartaruga sempre estará na sua frente. Esse problema é discutido em Ozanam (1799):

ATIVIDADE: Aquiles vai dez vezes mais rápido que uma tartaruga que tem um estádio de dianteira. Pergunta-se a que distância ele a alcançará?
DISCUSSÃO DE OZANAM: Essa questão não tem a celebridade que, parece, Zenon, Chefe dos Estóicos, pretendia, por um sofisma, provar que Aquiles não alcançaria a tartaruga: pois, dizia ele, enquanto Aquiles fazia uma etapa, a tartaruga teria feito um décimo; e enquanto ele fizesse um décimo, a tartaruga faria um centésimo, que ele ainda teria que avançar; e assim até o infinito; por conseqüência ela se afastaria um número infinito de instantes antes que o herói tivesse alcançado o réptil; portanto ele não o alcançaria jamais.

Deve-se entretanto ter o senso comum para ver que Aquiles atingiria sim a tartaruga, já que a ultrapassaria. Donde vem portanto o sofisma ? Ei-lo.

Aquiles, com efeito, não atingiria jamais a tartaruga, se os intervalos de tempo durante os quais se supõe que ele teria feito a primeira etapa, e em seguida os décimos, centésimos, milésimos, de etapas que a tartaruga faria sucessivamente à frente dele, sendo igual; mas supondo-se que ele tivesse feito a primeira etapa nos 10 minutos de tempo, ele colocaria apenas um minuto para percorrer uma centena, etc ; e assim os intervalos de tempo que Aquiles empregara para percorrer o avanço que a tartaruga ganhou durante o

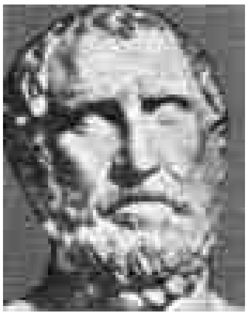


Figura 23. Zeno de Elea.[31]

Os primeiros paradoxos da história da matemática: Zeno de Elea

Aparentemente, os paradoxos estão imbuídos de uma lógica irrefutável. Haveremos de nos lembrar, no entanto, que estes podem deixar de ser paradoxos quando surge uma teoria que os explica, como os paradoxos de Zenão, os primeiros de que se tem conhecimento, e até hoje constam nos textos sobre o assunto.

A matemática transcende as civilizações individuais e as linguagens específicas. É um largo sistema de lógica – um tipo de linguagem universal. Como tal, certos paradoxos e contradições têm surgido e têm posto em dificuldades matemáticos desde os tempos antigos até o presente. Alguns são falsos paradoxos: eles não apresentam contradições atuais, e são meramente truques astutamente lógicos. Outros têm abalados os verdadeiros fundamentos da matemática, requerendo um raciocínio brilhante e criativo para resolver. Outros permanecem sem resolução até hoje. Comentaremos brevemente dois paradoxos: O paradoxo do movimento de Zeno e o paradoxo dos conjuntos infinitos, resolvido por Cantor.

O grande filósofo Zeno de Elea (nascido em algum tempo entre 495 e 480 aC) propôs quatro paradoxos num esforço de desafiar as noções aceitas de tempo e espaço que ele encontrou em vários círculos filosóficos. Seus paradoxos confundiu matemáticos durante séculos, e não foi senão até o desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos Infinitos de Cantor (nos anos de 1860 e 1870) que os paradoxos puderam ser completamente resolvidos.

Os paradoxos de Zeno focaram a relação do discreto para o contínuo, um assunto que está no verdadeiro âmago da matemática. Aqui serão apresentado o primeiro de seus famosos quatros paradoxos. O primeiro paradoxos de Zeno ataca a noção apoiada por muitos filósofos de seus dias que o espaço era infinitamente divisível, e que o movimento era portanto contínuo.

Paradoxo 1: O corredor sem movimento.

Um corredor quer correr uma certa distância – digamos 100 metros – num tempo finito. Mas para alcançar a marca dos 100 metros, primeiro o corredor precisa alcançar a marca dos 50 metros, e para alcança-la, precisa

[31] Zeno de Elea criou os quatro famosos paradoxos, resolvidos após a Teoria dos Conjuntos Infinitos de Cantor. Do site http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians. Acessado em 2008.

ATIVIDADE: Seguia Beremiz, "o homem que calculava" com o narrador da história, montados no camelo deste o último, quando encontraram três irmãos discutindo no caminho. Os três irmãos discutiam sobre uma herança correspondente a 35 camelos. Ao primeiro coube a metade, ao segundo, a terça parte e ao terceiro, o mais moço, coube a nona parte. Como fazer a partilha se a metade, a terça parte e a nona parte de 35 não são inteiras?
" _ é muito simples _ atalho Beremiz, "o homem que calculava". Encarreguem-me de fazer, com justiça, essa divisão, se permitirem que eu junte aos 35 camelos da herança, este belo animal que, em boa hora, aqui nos trouxe!" O narrador da história tentou impedir aquele, ao que falou Beremiz:
"_ Não se preocupe com o resultado, o Bagdali!" _ replicou me em voz baixa Beremiz. _ sei muito bem o que estou fazendo. Cede me o teu camelo e verás a que conclusão quero chegar."
E Beremiz entregou ao primeiro filho não a metade de 35, mais a metade de 36, portanto 18 camelos. Ao segundo entregou não a terça parte de 35, mas de 36, correspondendo a 12 camelos. E ao mais moço entregou a nona parte de 36, ou seja, 4. Desse modo, os três irmãos saíram com uma parte maior da herança, portanto como lucros. Ocorre que o total de camelos da distribuição correspondia a 34, sobrando 2. Assim, foi devolvido o camelo do narrador e o outro coube a Beremiz, por ter resolvido o problema da herança.
Pergunta: Como foi possível cada irmão receber mais do que foi destinado pela herança, e ainda sobrar camelos?
Resposta: A metade mais a terça parte mais a nona parte de um inteiro não somam o inteiro.

Figura 22. Júlio César de Melo e Souza.[30]

A busca de solução para várias das recreações propostas levou ao surgimento e desenvolvimento de novas teorias matemáticas e novos ramos, como a Topologia, a Teoria dos Grafos e a Criptografia. Neste contexto, alguns problemas insolúveis em determinadas épocas, passaram a ter solução ou ser comprovadamente insolúveis (como os três clássicos da Antiguidade), alguns paradoxos levaram a outras teorias ou vice-versa, e os padrões de rigor gerados no contexto foram-se modificando até o estágio atual.

[30] Disponível em www.bn.com.br. Acessada em agosto de 2004.

elementares, têm levado a estudos que concorreram para o desenvolvimento da matemática.

Embora não vislumbrasse utilidade da matemática do ponto de vista puramente matemático, Kraitchik mostrava uma preocupação em tornar a matemática conhecida e compreendida pelo maior número de pessoas, principalmente através das recreações matemáticas, o que está sendo feito com mais intensidade nos dias atuais.

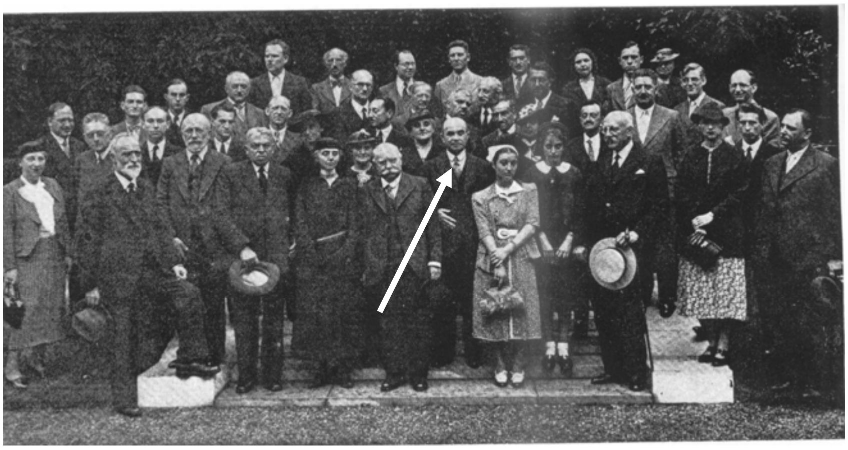


Figura 20. Participantes do Deuxième Congrès International de Récréation Mathématique. Em destaque, Maurice Kraitchik.[29]

Ainda em meados deste século, destacamos Toranzas, com sua obra intitulada "*Enseñanza de la Matemática"* o qual contém um capítulo chamado "*DICÁCTICA DE LA EJERCITACIÓN Y APLICATIONS"* (cap. XI), o qual trata da matemática recreativa no ensino. No referido capítulo, o autor recomenda o uso das recreações matemáticas, apresentando, inclusive, alguns exemplos. Assim argumenta o autor na sua defesa (p. 190):

> A importância pode ser apreciada sob três pontos de vista.
> 1. Se aprende melhor o que se estuda de forma amena - por que assim logra despertar maior interesse nas mentes adolescentes, conseguindo-se assim um esforço voluntário intenso, que é o melhor caminho para alcançar o objetivo educacional.
> 2. As curiosidades matemáticas convenientemente selecionadas e dadas na hora certa são uma ginástica mental muito apreciada, se exercita a imaginação e o raciocínio, obrigando o aluno a intensificar o esforço de análise para encontrar a causa do paradoxo ou a chave do jogo.
> 3. A solução dos problemas recreativos dá motivos para exercitar trabalhos heurísticos.

Nos século XX, destacamos no Brasil o grande precursor da Educação Matemática, Júlio César de Mello e Souza. O autor escreveu várias obras sobre matemática e recreações matemáticas, cuja resolução seguia, também, as mesmas metodologias do ponto de vista matemático. Destacamos as obras "O problema das definições em matemática" (1965), "O homem que calculava" (de 1937 até hoje, 54 edições) e Didática da matemática em dois volumes (1961 e 1962), uma destas últimas incluindo método para usar jogos em aulas de matemática. Um de seus problemas mais famosos é o dos 35 camelos:

[29] A foto foi escaneada dos anais do Deuxième Congrès International de Récréation Mathématique.

Figura 19. Capa da Revista Sphinx.[26]

Figura 20. Yakov Perelmann.[27]

Do referido campeonato, participaram matemáticos de renome, entre eles Iakov Perellman, H. Vuibert e Victor Thebault. Suas palavras constantes no prefácio da referida obra, reforçam nossa idéia:

Na verdade, grandes matemáticos como Newton e Euler não desdenharam abordar temas desta natureza e os seus nomes ficaram ligados a problemas do gênero que vieram enriquecer as coleções que nos tinham legado Gregos, Hindus, Árabes, Chineses, e os matemáticos da idade média. Alguns desses problemas que requerem para a sua resolução simples conhecimentos de aritmética elementar; outros, pela sua dificuldade, deram lugar a estudos aprofundados de certos capítulos da matemática superior. Apresentamos um problema desta época:

ATIVIDADE: (O problema do bambu quebrado)[28] Há um bambu com 1 *zhang* de altura, partiu-se e a parte de cima toca o chão a 3 *chih* da base do bambu. Qual é a altura da quebra? (1 *zhang* = 10 *chih)*
DISCUSSÃO: O problema pode ser resolvido usando o Teorema de Pitágoras.

ATIVIDADE: (Do livro Matemática Recreativa, de Yakov Perelman) Três prados cobertos de erva de igual espessura e do mesmo grau de crescimento têm uma superfície de 3 1/3 há, 10 ha e 24 há. A erva do primeiro foi comida por 12 bois durante quatro semanas, e a do segundo por dois bois em nove semanas. Quantos bois comerão a erva do terceiro prado em dezoito semanas?
DISCUSSÃO: Pode-se observar que este problema remete ao contexto da regra de três composta. Convidamos o leitor a resolver o problema.

Destes problemas, aparentemente recreativos para muitos conduzem à fronteira do conhecimento em alguns ramos da aritmética superior e da antropologia. Outros, se bem que se apresentem com o aspecto de problemas

---

[26] http://www.geocities.com/criptaritmetica/Sphinx.jpg.
[27] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/9/97/Yakov_Perelman.jpg/180px-Yakov_Perelman.jpg.
[28] O problema pode ser visto em Boyer (1972). O enunciado está disponivel em http://construtor.aprendebrasil.com.br/up/50540001/1778120/t133.asp.

ATIVIDADE: Transportar, no menor número de movimentos possível, a torre de "n" peças de um pino para outro de modo que movimente uma peça de cada vez e uma peça maior não possa ficar sobre uma menor.

Os trabalhos matemáticos de Lucas versaram sobre a Geometria Euclidiana não elementar (a das transformações, em particular a Geometria Projetiva vista através de suas homografias), e, sobretudo, a Teoria os Números. Sua principal contribuição é a do Teste de Primalidade.

Lucas provou em particular que o número de Mersenne $2^{127} - 1$ é primo, o que significa um número muito grande descoberto sem a ajuda de um ordenador. Lucas foi o criador do conhecido jogo *Torre de Hanói,* muito popular na sua época e hoje muito utilizado nos laboratórios de matemática. Ainda nesse século, destacamos Lacroix (1816) e Richard (1837), com obras que, segundo os autores, usavam as recreações para ensinar as ciências.

Lembramos que o Padre Marin Mersenne foi um grande difundidor da matemática em sua época, através de cartas que ele recebia de estudiosos da Europa contado suas últimas descobertas matemáticas e re-enviava aos outros, promovendo uma excelente difusão do que se produzia.

Figura 18. Marin Mersenne.[25]

Kraitchik, matemático belga do início do século XX, escreveu também uma obra sobre recreações matemáticas. O matemático também criou os campeonatos mundiais de jogos matemáticos e a revista Sphinx, que durou cerca de cinco anos. Este matemático foi um dos divulgadores mais conhecidos da matemática lúdica, apesar de não acreditar na utilidade das recreações matemáticas, conforme o prefácio de seu livro:

> Na verdade, grandes matemáticos como Newton e Euler não desdenharam abordar temas desta natureza e os seus nomes ficaram ligados a problemas do gênero que vieram enriquecer as coleções que nos tinham legado Gregos, Hindus, Árabes, Chineses, e os matemáticos da idade média. Alguns desses problemas que requerem para a sua resolução simples conhecimentos de aritmética elementar; outros, pela sua dificuldade, deram lugar a estudos aprofundados de certos capítulos da matemática superior.
> Destes problemas, aparentemente recreativos para muitos conduzem à fronteira do conhecimento em alguns ramos da aritmética superior e da antropologia. Outros, se bem que se apresentem com o aspecto de problemas elementares, têm levado a estudos que concorreram para o desenvolvimento da matemática (KRAITCHIK, 1930, prefácio).

[25] Do site http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians. Acessado em 2008.

nos quatro vértices de um quadrado. Entre cada dois cogumelos vizinhos havia um outro cogumelo, totalizando oito cogumelos ocupando oito casas de um quadrado de três casas em linha e três em coluna, ficando vazia a casa central (como o tabuleiro do jogo da velha). Cada par de sapos é de uma cor e dois sapos de mesma cor devem ficar juntos. O problema consiste em fazer os dois sapos de mesma cor trocar de lugar com os outros dois podendo pular segundo o movimento do cavalo de xadrez, no menor número de pulos possível (Ibid.).



Figura 10. Chrystian Huyghens **Figura 11**. Pierre de Fermat. **Figura 12**. Leonhard Euler



Figura 13. Johann C. F. Gauss. **Figura 14**. Gottfried W. von Leibniz **Figura 15.** François Viète.

No século XIX, destaca-se o *Récréations Mathématiques*, de Edouard Lucas. Como sabemos, Lucas havia recebido uma bolsa de estudos e prestado concurso para entrar na École Normale Supérieure em 1861. Entrando na Escola, ele tornou-se astrônomo adjunto no Observatório de Paris, mesmo depois da guerra franco-prussiana, ele obteve uma cadeira de Mathématiques Spéciales em Moulins, de 1872 a 1876. Depois ocupou uma cadeira em Paris, inicialmente no Liceu Charlemagne em Paris, depois no já muito prestigiado Liceu Saint-Louis. Embora seja bastante difundida no contexto do ensino de matemática, é pertinente apresentar aqui a Torre de Hanói:

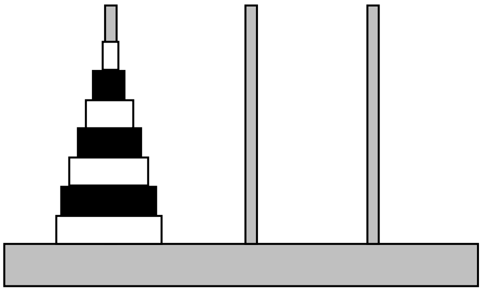



Figura 16. Torre de Hanói. **Figura 17**. François Edouard Anatole Lucas[24]

[24] Capturado em maio de 2002 no site http://mathweb.free.fr/bios/lucas.html.

cavalo. Cada movimento é feito considerando o fato de não gerar movimentos repetitivos.

Com isso, vemos que o total de movimentos necessário para que os cavalos de uma cor troquem de posição com os cavalos de outra cor, é dezesseis. A tabela pode ser vista a seguir.

Cavalo	C1	C2	K1	K2
Casa inicial de cada cavalo	**1**	**7**	**3**	**5**
Casa ocupada após o primeiro movimento	**4**	**2**	**6**	**8**
Casa ocupada após o segundo movimento	**7**	**5**	**1**	**3**
Casa ocupada após o terceiro movimento	**2**	**8**	**4**	**6**
Casa ocupada após o quarto movimento, correspondendo à configuração final	**5**	**3**	**7**	**1**

Agora, mostraremos a segunda tabela. Nela, consideramos a situação em que o cavalo C1 vai para a casa 6, em vez da casa 4. Assim, o jogo atinge o seu objetivo também em 16 movimentos, conforme podemos ver a seguir:

Cavalo	C1	C2	K1	K2
Casa inicial de cada cavalo	**1**	**7**	**3**	**5**
Casa ocupada após o primeiro movimento	**6**	**4**	**8**	**2**
Casa ocupada após o segundo movimento	**3**	**1**	**5**	**7**
Casa ocupada após o terceiro movimento	**8**	**6**	**2**	**4**
Casa ocupada após o quarto movimento, correspondendo à configuração final	**5**	**3**	**7**	**1**

(MENEZES et al, 2008, 97-99)“

Destacamos os problemas propostos sobre um tabuleiro de jogo de xadrez que foram discutidos na época, tais como o *Knight, que* é um jogo proposto numa parte do tabuleiro de xadrez correspondendo ao jogo da velha. Outros jogos nesta situação são: o jogo das “*oito rainhas”,* já citado, e o ”*Knight’s tour”*, segundo o qual, o cavalo, colocado em uma casa qualquer do jogo de xadrez e usando o mesmo movimento do jogo, deve saltar sobre todas as casas apenas uma vez cada, retornando ao ponto de partida (MENEZES et all, 2008). Estes e outros jogos foram discutidos por Euller (1707-1783) e Gauss (1777-1855).

Um fragmento histórico relativo a estes jogos, devido a Dudeney (1970) narra que Abnit Vandermonde, que era um matemático muito esperto (1736-1793), dedicou-se intensamente a estudar a questão do passeio do cavalo. Um dos problemas que ele chamou de “*os quatro sapos*” ou “the four froggs”, consistia em dispor dois pares de sapos, sobre quatro cogumelos dispostos

C1: 1 – 4 – 7 – 2 – 5 – 8 – 3 – 6 – 1 ou
1 – 6 – 3 – 8 – 5 – 2 – 7 - 4 – 1;

C2: 7 – 2 – 5 – 8 – 3 – 6 – 1 – 4 - 7 ou
7 – 4 – 1 – 6 – 3 – 8 – 5 – 2 – 7
K1: 3 -6 – 1 – 4 – 7 – 2 – 5 – 8 – 3 ou
3 – 8 – 5 – 2 – 7 – 4 – 1 – 6 – 3;

K2: 5 – 8 – 3 – 6 – 1 – 4 – 7 - 2 – 5 ou
5 – 2 – 7 – 4 – 1 – 6 – 3 - 8 – 5.

Uma vez que cada cavalo tem uma trajetória que retorna ao ponto de partida, para representar o referido grafo, podemos traçar um polígono, mais especificamente um octógono, cujos vértices são enumerados da mesma maneira, de acordo com a movimentação de cada cavalo.

Para não sermos repetitivos, mostramos a seguir o grafo da movimentação do cavalo K1, e podemos observar que o mesmo pode percorrer todas as casas permitidas, voltando ao ponto inicial.

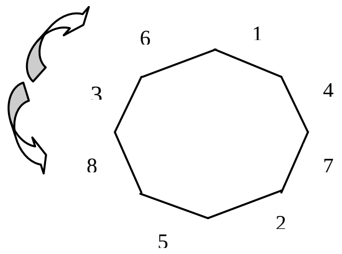


Figura 45. Grafo de um dos cavalos do *knight*.

Vamos iniciar movimentando C1.

O cavalo C1 pode tem duas opções: ir para a casa 4 ou para a casa 6; o cavalo C2 pode ir para a casa 2 ou para a casa 4; o cavalo K1 pode ir para a casa 8 ou 5 e o cavalo K2 pode ir para a casa 8 ou para a casa 2.

Observemos que cada dois cavalos têm a possibilidade de ir para uma casa em comum, sendo uma para onde pode ir o outro cavalo de mesma cor e outra para onde pode ir um cavalo de cor diferente. Assim sendo, a escolha de movimento do primeiro cavalo vai influir nas possibilidades dos outros cavalos.

Abaixo, apresentamos duas tabelas. Na primeira, consideramos a situação em que o cavalo C1 vai para a casa 4 e, na segunda, a situação em que o mesmo cavalo vai para a casa 6. Vamos descrever cada uma delas.

A primeira tabela apresenta na primeira linha os cavalos. A segunda linha, a posição inicial de cada cavalo; a terceira linha apresenta o primeiro movimento de cada cavalo, na seqüência; a quarta, o segundo movimento; a quinta, o terceiro movimento e, na sexta e última, o quarto e último movimento de cada interessante história desse problema[19]. Ele desenvolveu um método para resolver o problema num tabuleiro de qualquer com um número qualquer de casas em cada lado e fez a aplicação à tabuleiros de 16 e 25 casas. O prof. J. W. L. Glaisher, da Universidade de Cambridge utilizou esse método em um trabalho publicado no Philosophical Magazine para o problema de 6, 7 e 8 rainhas em, respectivamente, 36, 49 e 64 casas [20]. Um tratado posterior publicado por G Bellavitis dá as 92 soluções[21] e, mais tarde, o problema foi proposto como questão a resolver por M. Lionnet[22].

ATIVIDADE: (Knight): Dispor os quatro cavalos do jogo de xadrez em um tabuleiro de jogo da velha. Usando os mesmos movimentos do cavalo no jogo de xadrez, trocar de lugar os dois cavalos de mesma cor com outros dois da outra cor, no menor número de saltos possível.

DISCUSSAO:

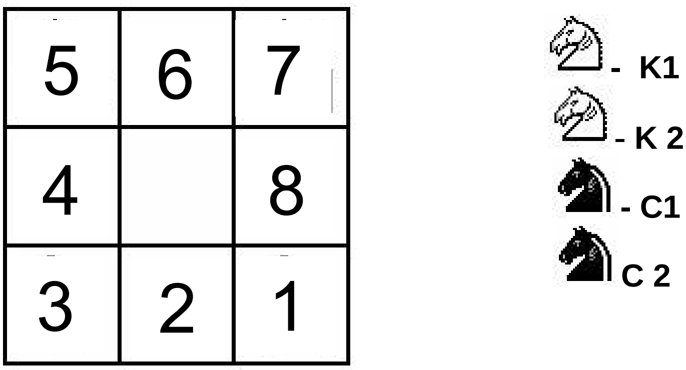


Figura 44. Esquema do *knight*.

Assim sendo, para facilitar a discussão, vamos deixar a casa central sem numeração e representar as outras oito casas pelos números de 1 a 8; os cavalos de mesma cor representamos por uma letra e os números 1 e 2 e os outros dois semelhantemente por outra, como mostra a ilustração:

Formamos então a configuração inicial:

Cavalo	C1	C2	K1	K2
Casa	1	7	3	5

Podemos, usando um *grafo*[23], observar as opções de movimento de cada cavalo. Uma vez que existem oito casas que podemos enumerar de 1 até 8, correspondendo às casas possíveis aos cavalos do jogo, e observar sua movimentação.

---

19 Archiv der Mathematik und Physik, de Grunet, vol.LVI,parte 3, p.291-292- Zur mathematischen Theorie des Schachbretts. Leipzig, 1874.

20 On the problem of the eight queens.(extraído do Philosophical Magazine).dez 1874.

21 Atti del Instituto Veneto, t.VI,p.134.Venise,mars,1861.

22 Nouvelles Annales de Mathématiques, 2 .série, t. III, p. 560, nov. 1869.

23 De acordo com a Teoria dos Grafos, que tem poucos séculos de existência formal, um grafo corresponde a um mapeamento dos possíveis movimentos de um jogador, em um jogo ou todas as configurações possíveis do jogo após cada movimento, desde a configuração inicial.

DISCUSSÃO: Presentemente, somai os dedos elevados, que aqui fazem 7; esse será o número de dezenas do produto. Multiplicai o número dos dedos abaixados de uma mão pelos dedos abaixados da outra; esse produto, que é 2, será o número das unidades do produto. Assim, encontrar-se-á que 9 vezes 8 fazem 72.

Vê-se por aí que se deve tomar a diferença de 10 a cada um dos números dados; que o produto dessas diferenças designadas pelos dedos abaixados de cada mão, dá as unidades do produto; e que a soma dos dedos que restam elevados, é a das dezenas desse mesmo produto.

É fácil ver que isso é mais curioso que útil; pois só se pode multiplicar dessa maneira os números menores que 10; e todo o mundo tem na memória esses primeiros produtos, sem os quais não se chegaria à multiplicação complexa. (OZANAM, 1779, p. 10)

Matemáticos famosos a partir do século XV, e posteriormente as criações das universidades e das sociedades matemáticas, produziram vários e fecundos trabalhos foram Gauss, Leibniz, Leonhard Euler, Pierre de Fermat, Chrystian Huygens, Christopher Clavius, entre outros. Esses estudiosos têm sido citados em textos de História da Matemática, com dedicados ao estudo de alguns problemas recreativos como o problema das pontes de Köenigsberg, as oito rainhas, a equação de grau 45 resolvida por Viète, entre outros[18].

ATIVIDADE: Em 1593, Adriaen van Roomen (1561-1615) ou Romanus, havia feito um desafio público para resolver a equação

$$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - ... - 3795x^{3} + 45x = k.$$

DISCUSSÃO (desafio): Viète a resolveu exprimindo k = sen 45θ em termos de x = 2 sen θ e achou as raízes positivas. Convidamos o leitor à reconstrução.

ATIVIDADE: (O problema das oito rainhas) Determinar todas as maneiras de colocar oito rainhas em um tabuleiro de xadrez de 64 casas de modo que nenhuma delas seja capturada por outra; noutros termos, dispor oito rainhas no tabuleiro de modo que duas não estejam ligadas por uma mesma reta horizontal, vertical ou diagonal no tabuleiro.

DISCUSSÃO: Deixamos para o leitor a busca da solução. Um encaminhamento dado a este problema é que uma maneira de distribuir as rainhas de forma mais rápida é colocar uma após outra segundo o movimento do cavalo, o único vedado à rainha. Observamos que este trabalho foi discutido por Gauss, de acordo com Lucas (1882), citado por Menezes (1996):

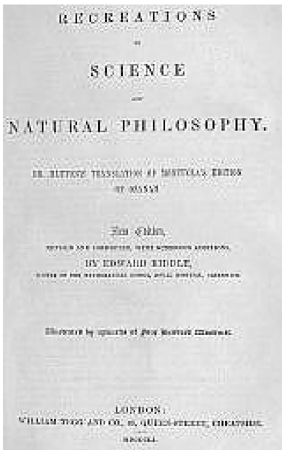
> Esse problema foi proposto pela primeira vez por Nauck a Gauss, chamado pelos alemães de "Princepis Mathematicorum", e foi objeto de correspondência entre Gauss e o astrônomo Schumacher. Gradativamente, Gauss chegou a 92 soluções, cujo número foi posteriormente reconhecido como o exato. O Dr. S. Gunther, citado por Lucas, membro do Parlamento de Berlim escreveu no século passado uma

[18] As fotos das figuras 10 a 15 foram encontradas em maio de 2008 no site http://etsiit.ugr.es/web/jmaroza/images/Fermat.jpg.

Ainda, nesta época, eram consideradas recreações matemáticas: cálculo digital (contar nos dedos, problemas de adivinhação (que hoje são propostos em livros do sétimo ano do nível fundamental no contexto das equações) e problemas de crescimento exponencial, hoje resolvidos no contexto das progressões). Sua coletânea mais ampliada, já sob a responsabilidade de Montucla, incluía a pirotecnia (arte de produzir fogos de artifício), a mecânica, a ótica, a acústica e o magnetismo (hoje no contexto da Física), a química, a navegação, a astronomia, a música, a geografia, o calendário, suplementos sobre os fósforos e as lâmpadas perpétuas.

Os problemas recreativos discutidos nesta obra eram apresentados algumas vezes com mais de uma solução, comentada pelo autor como sendo a última delas a "mais elegante", ou a "melhor para compreensão", e assim por diante. Algumas vezes, observamos também comentários acerca de soluções a problemas que, segundo Montucla, o autor teria se equivocado, apresentando então, a solução correta.

Figura 09. Jean Etiénne Montucla[16]



RECREATIONS

SCIENCE

NATURAL PHILOSOPHY.

BY EDWARD RIDDLE,

LONDON:

Figura 10. Página de livro de Ozanam[17]

Notamos aqui uma preocupação por parte dos autores em levar a matemática contida nestes problemas ao alcance de todos, o que expressaram também no prefácio.

Além disso, podemos observar na resolução dos problemas que, além de utilizarem conhecimento matemático na sua discussão, o rigor empregado era o mesmo que para as teorias matemáticas produzidas.

Apresentaremos um exemplo de problema discutido por Ozanam:

ATIVIDADE: [*Multiplicação pelos dedos*] Para multiplicar, por exemplo, 9 por 8, tomai de início a diferença de 9 a 10, que é 1; e, elevados os 10 dedos das duas mãos, abaixai um dedo de uma mão, por exemplo, a direita. Tomai também a diferença de 8 a 10, que é 2, e abaixo 2 dedos da mão direita.

---

15 Disponível em http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/ Mathematicians/Montucla.html Acessado em maio de 2008.

16 Do site http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians. Acessado em 2008.

17 http://ciencianet.com/imagenes/riddlep.jpg.

Figura 07. Albert Dürer [13]

Figura 08. Melancholia[14]

Posteriormente, destaca-se a obra de Ozanam (1779), “Récréations Mathématiques et Phisiques”, ampliada por Montucla, correspondendo a uma compilação do que havia sido feito até então sobre recreações matemáticas e científicas em geral, com diferentes versões e comentários. Montucla havia escrito sua Histoire des Mathématiques que foi referência entre os séculos XVIII e XIX.

Um comentário que cabe aqui, é que na época do lançamento da coletânea de Ozanam, a matemática mais conhecida e difundida restringia-se à Aritmética e à Geometria Euclidiana. Ainda nesta época, Jean Leurechon, ou Henry Van Etten, havia publicado seu Mathematicall Recreations, com mais de vinte edições, embora tenha sido duramente criticada por Ozanam no prefácio de sua obra. Ao trabalho de Leurechon credita-se ter ocorrido pela primeira vez uma menção aos termômetros.

Ozanam, procedido por Montucla, discutiu sobre a maior parte dos conhecimentos científicos da época. Com relação à matemática, dividiu o primeiro volume da coleção, a ela dedicada, em Aritmética e Geometria. A obra era todas descrita em forma de problemas propostos seguidos das respectivas soluções (às vezes apresentando alguns fatos históricos relevantes a eles referentes), incluindo as que ele considerava mais elegantes, ou interessantes, ou ainda que corrigiam possíveis equívocos dos que haviam discutido anteriormente.

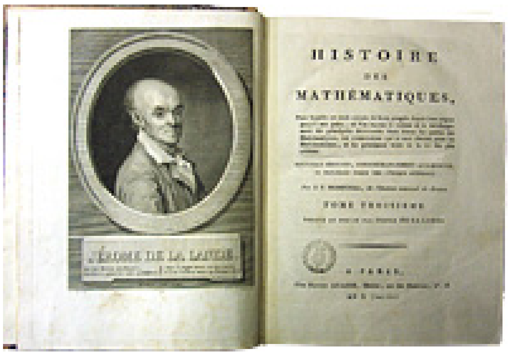


Figura 09. Página do Históire des Mathématiques, de Montucla.[15]

---

[13] Do site: www.jim3dlong.com. Acessado em julho de 2002.
[14] Ibid.

toma a metade de tudo, triplica novamente essa metade, e pergunta quantas vezes tem nove nesse último triplo. Então, para cada nove, tome 2, e tu terás o número pensado. Cuida somente que se falhar juntar 1 para tomar a metade, precisas também juntar 1 ao número que tu encontrarás tomando 2 para cada 9.

Por exemplo, se alguém tiver pensado 6; triplicando, viria 18; tomando a metade, será 9; de novo triplicando, teremos 27, que contém 9 três vezes; portanto, tu tomarás 3 vezes 2, a saber 6, para o número pensado.

Porém suponhamos ter-se pensado 5; triplicando teremos 1, que precisamos somar 1 para ter a metade, e no lugar de 1, será 16, cuja metade será 8, que triplicado dará 24, que contém 9 duas vezes; portanto, tomando dois, teremos o dobro quatro, ao qual, se juntares 1, por causa do 1 que juntaste para tomar a metade, tu encontrarás 5, o número pensado.

DEMONSTRAÇÃO

Se foi pensado um número par $2n$, faz-se as operações seguintes:

$$2n \times 3 = 6n;\ 6n : 2 = 3n;\ 3n \times 3\ \ 9n;\ 9n\ .\ 9 = n;\ 2 \times n = 2n.$$

Se foi pensado um número par $2n$, faz-se as operações seguintes:

$$(2n + 1) \times 3 = 6n + 3;\ 6n + 3 + 1 = 6n + 4;\ (6n + 4) : 2 = 3n + 2;\ (3n + 2) \times 3 = 9n + 6;$$

$(9n + 6): 9 = n;\ 2 \times n + 1 = 2n + 1.$

Daí, seguindo a regra, encontra-se o número pensado. (BACHET, 1612, p.1)

Os problemas e respectiva discussão propostos na obra de Bachet apresentam discussões detalhadas, que sugerem a preocupação de serem compreendidas por todos os que lessem. Isso sugere mais uma vez a interligação referida.

São famosos os problemas dos pesos de Bachet. Apresentaremos o enunciado de um deles.

ATIVIDADE: Qual é o menor número de pesos que podem ser usados em uma panela de balança para pesar qualquer número integrante de libras inclusive de 1 a 40, se os pesos podem ser colocados em qualquer um das panelas de balança?

DISCUSSÃO: O que se quer saber é qual é a menor partição de 40 que permite escrever qualquer número menor ou igual a ele.

Os quadrados mágicos, estudados por Moschopoulos, têm despertado o interesse de estudiosos por séculos. Matemáticos como Riollot, Delesalle e Salomon têm estudado quadrados mágicos á luz de teorias matemáticas. Vale destacar que, no último século, Bandeira de Mello (1958) apresentou um método geral de construção de quadrados mágicos, o método das matrizes. Destacamos ainda uma xilogravura datada de 1514, da autoria de Albert Dürer, que representa um símbolo das recreações matemáticas no que concerne aos quadrados mágicos.

1 $\frac{1}{2}$ E $\frac{1}{2}$ = 1 3ª

Outro problema que aparece no livro de Chavignaud, e que hoje consta em livros didáticos em outras versões, é o problema envolvendo Progressões geométricas (que ele ensina no livro)

ATIVIDADE: Resolver o problema das terras usando os conhecimentos sobre P. G.:
“Uma senhora econômica tem trinta terras bonitas,
Que tenta colocar em mãos estrangeiras;
E para se livrar de seus credores,
E não assustar os ávidos herdeiros,
Ela expõe de cada vez o menos considerável,
À condição que parecia tolerável,
Requerer primeiro uma moeda do primeiro bem,
Então duas pelo segundo, até o trigésimo em resumo,
E sempre dobrando isto, de acordo com a oferta que encanta.
Que soma aqui volta à senhora?
É necessário adquirir o preço em questão,
R. Procurar o último termo, e a abreviação
Diz para determinar, de acordo com nossa certeza,
A vigésima nona aquisição tomando a potência
De nosso expositor dois, e o multiplicando
Por dois, termo segundo: o número resultante,
Se eliminando um, o quadrado do primeiro termo,
Dividindo-se enfim o total que elimina
Pelo excedente procurado, do primeiro ao segundo,
Quem no caso citado não muda nada ao fundo,
Considerando que é a unidade, mostra para nós que a soma
Que nossa dama requer, subjugaria seu homem.
2 multiplicado 29 vezes por ele mesmo, dá 268,435,456,
268,435,456 X 2 = 536,870,912 - 1 = 536,870,912 X. ou 26,843,545 fs. 60 cs.”

Depois vem o trabalho puramente sobre recreações matemáticas de Gaspar Bachet de Méziriac, o *Problèmes plaisants qui si font sur les nombres*, cuja resolução segue os procedimentos matemáticos da época, alguns dos problemas aparecendo hoje em livros didáticos. A discussão já contempla alguns encaminhamentos algébricos e algoritmo. Vejamos a discussão de um deles:

ATIVIDADE: (PROBLEMA 1) ***Adivinhar o número que alguém teria pensado.***

Primeiramente, faz triplicar o número pensado, e depois toma a metade do produto, se puderes fazer a fração; e se não puderes fazê-la, junta 1, depois

Fixam o julgamento dos comerciantes úteis
A adição imediatamente se grava em seu espírito
Eles estão felizes de ver aumentar seu crédito
Da subtração a doce e certa chance.
Das mãos da justiça fixa-se a balança
Multiplicação, de um não nobre e certo
Tu vens a enriquecer de uma preciosa pilhagem
Divisão, tua fazes com a societária
Obténs, graças à tua arte, sem haver salutar

Chavignaud incluiu, em seu trabalho, cinco problemas recreativos, dos quais apresentaremos a tradução da discussão de dois:

ATIVIDADE: "Um dia, o cozinheiro de um caráter poderoso,
Para satisfazer três meninas da aldeia,
Que pediram ovos, disse-lhes enquanto as via:
Eu vou dar todos esses que eu tenho no momento.
Ele dá à primeira a metade,
Mais a metade de um ovo através de favor singular;
Para a segunda ele também oferece o melhor do coração,
A metade que lhe resta, com mesmo favor,
Da metade de um ovo o qual a menina toma;
Enfim, continuando compartilhando sua partilha bizzarra,
Ele dá à terceira, com a mesma amizade,
À terceira restante novamente a humilde metade,
Mais a metade de um ovo; ele teve a vantagem então,
Tudo para distribuir. Este compartilhando feliz,
Que parece singular, quantos ele tinha,
E como teve ele a mente sutil o bastante
Para dar meio ovo a cada menina
Sem quebrar um só, nem esquentar a bílis?"

RESOLUÇÃO: "Este homem tinha sete ovos: na primeira vez
Ele dá a metade; dali em diante eu percebo
Que é três e meio mais o a metade de outro,
É então quatro em uma palavra. Para nosso apóstolo do bem
Restam só três, e de acordo com sua espera,
A segunda ganha dois deles, pois esta feliz de ter
Igual a um e meio mais meio. Nosso homem
tem então apenas mais um só ovo, o que compartilha em soma,
Enquanto oferece metade, mais meio. Vê-se
Que todos são dados, o resto se concebe."

$$7\left\{\qquad 3\frac{1}{2}\ \text{E}\ \frac{1}{2} = 4 \quad 1^{a} \qquad .\right.$$

$$3\left\{\frac{2}{1\frac{1}{2}}\quad 1\frac{1}{2}\ \text{E}\ \frac{1}{2} = 2 \quad 2^{a}\right.$$

A resolução desta equação leva ao valor procurado.

Desde o século anterior e perdurando neste, com a difusão da imprensa na Europa, trabalhos impressos começaram a serem produzidos, em geral manifestando o desejo de desenvolver as mentes mais jovens e tornar o conhecimento matemático acessível a todos. O primeiro trabalho em matemática de cunho lúdico conhecido é o “Nouvelle Arithmétique appliquée au commerce et a la marine mis en vers”[12], de L. CHAVIGNAUD, datado de 1484. O prefácio reflete a preocupação de tornar o trabalho mais didático. Vejamos este trecho:

> Convencido por vinte anos de experiência como a que uma ciência é tão mais fácil quanto seja clara e simples, eu a tenho, sem desnaturar princípios, ornado de charmes de poesia. É um meio seguro para abreviar o estudo da primeira parte de matemática, que é, como se sabe, indispensável a todos.
> Que os jovens desencorajados pelas dificuldades, me serão gratos de lhes ter tornado agradável uma ciência abstrata cuja aridez é freqüentemente própria a lhes inspirar desgosto!

Um fato curioso é que este livro pretende fazer a matemática interessante às mulheres pelo fato de ser escrito em versos, conforme prefácio: “*Les jeunes demoiselles pouront désormais apprendre cette science, qui avait peu d’attraits pour elles. Appelées à partager les travaux de ceux à qui elles unissent leurs destinées, elles saisiront sans difficulté les principes de l’arithmétique, qu’il est urgent de bien connaître quand on veut se livrer à des opérations commerciales ».* Em outras palavras, “As jovens senhoritas, que até então não viam atrativos na matemática, poderiam aprendê-la a partir de então, para quando precisassem lidar com as operações comerciais.” Apresentamos então um trecho do livro, referente às operações:

DES OPÉRATIONS DE L’ARITHMÉTIQUE. (17)

> Quatre opérations, distinctes et faciles,
> Fixent le julgement des commerçants utiles.
> L’*addition* d’abord se grave en leur esprit:
> Ils sont heureux de voir augmenter leur credit
> De la *Soustraction* la douce et sûre chance,
> Des mains de la justice en fixe la balance.
> *Multiplication*, d’un pas noble et certain,
> Ti viens le enrichir d’un préicieux butin.
> *Division*, tu fais que le sociétaire
> Obtient, grâce à ton art, son avoir salutaire.
> Traduzindo:
> Das Operações da aritmética
> Quatro operações distintas e fáceis

[12] Nova aritmética aplicada ao comércio e à marinha, posto em versos. Tradução livre da autora.

ATIVIDADE: Uma mulher estava carregando ovos para vender no mercado. No caminho, um homem esbarrou nela e derrubou os ovos, pelos quais ele foi obrigado a pagar. Mas esta mulher não sabia quantos ovos ela tinha, exceto que quando ela os contava de 2 em 2, 3 em 3, 4 em 4, 5 em 5 e 6 em 6, sempre sobrava 1. Mas quando ela os contava de 7 em 7 não sobrava nenhum. Para saber quantos ovos esta mulher podia ter tido...

DISCUSSÃO: No tempo de Chuquet, a questão era discutida semelhantemente à solução de Bachet: Eu peço um número que sendo dividido por 2 reste 1; sendo dividido por 3 resta 1, e semelhantemente por 4 ou por 5 ou por 6 reste sempre 1, mas sendo dividido por 7 não reste nada. O MMC dos números 2, 3, 4, 5, e 6, sendo 60, deve-se encontrar um múltiplo de 7 que passe em uma unidade um múltiplo de 60. Acha-se rapidamente por ensaios sucessivos: 60 dividido por 7 dá resto 4; portanto 2 x 60 dará por resto 8, ou 1; tem-se, portanto, 2 . 60 = 7 + 1 ; por conseguinte 7 . 60 - 2 . 60 + 1 = 7, isto é, 5 . 60 + 1 = 7. Assim, o menor número que resolve a questão é 301. Resolver-se-ia o problema da mesma maneira por um resto diferente de 1, por exemplo se fosse pedido um múltiplo de 19 que dividido por cada um dos números 8, 12 e 15 desse por resto 7.

Hoje, podemos escrever o número como o consecutivo de um múltiplo do MMC dos números da contagem (2, 3, 4, 5, 6) que seja múltiplo de sete. Em outras palavras, queremos um número x tal que para o menor inteiro n, temos que

$$x = 7\,n = \text{MMC}(2,3,4,5,6) + 1$$

Este problema também remete à teoria das congruências, onde devemos encontrar o menor número x que satisfaça ao sistema de equações:

$$\begin{cases} X \equiv 1 \ (\text{mód } 2) \\ X \equiv 1 \ (\text{mód } 3) \\ X \equiv 1 \ (\text{mód } 4) \\ X \equiv 1 \ (\text{mód } 5) \\ X \equiv 1 \ (\text{mód } 6) \\ X \equiv 0 \ (\text{mód } 7) \end{cases}$$

ATIVIDADE: Um comerciante fez três Um comerciante faz três viagens. Na primeira, ele dobra o seu dinheiro e gasta 30 moedas. Na segunda, triplica seu dinheiro e gasta 54 moedas. Na terceira, quadruplica o dinheiro e gasta 72 moedas e fica com 48 moedas. Quanto ele tinha na partida?

DISCUSSÃO: Na época de Chuquet, despontava a formalização da Álgebra. Não temos a discussão do problema, mas observamos que o enunciado pode ser traduzido numa equação de grau um e resolvida de modo simples. Assim, indicando por x o valor procurado, temos que

Na primeira viagem fica com 2x – 30
Na segunda viagem, fica com 3 (2x – 30) – 54
Na terceira viagem, teremos que 4[3 (2x – 30) – 54] – 72 = 48.

Renascimento carolingiano. Suas obras se voltavam para principiantes em geometria, aritmética e astronomia.

Parece que na Idade Média os matemáticos eram de dois tipos havendo entre os dois alguma rivalidade: os das escolas religiosas e universidades e os que se ocupavam do comércio e de negócios, com alguma rivalidade. Entre eles destaca-se Leonardo de Pisa (1180-1250) o Fibonacci. Este escreveu o *Líber Abaci* (ou Livro do Ábaco), que versava sobre o novo algorismo vigente na época, ou o sistema com numerais indo-arábicos que considerava o zero número, com métodos e problemas algébricos, métodos hoje considerados obsoletos. Esse livro é o mais conhecido de Fibonacci, mas não foi bem aceito nas escolas, tendo sido impresso apenas no século XIX. Alguns dos problemas desse livro se destacam pelo seu aspecto interessante:

- *"Sete velhas foram a Roma; cada uma tinha sete mulas; cada mula carregava sete sacos; cada saco continha sete pães; e com cada pão havia sete facas; cada faca estava dentro de sete bainhas."* (este problema parece ter sido inspirado no problema semelhante do papiro Ahmes);
- *"Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?"*

Este último problema dá origem à seqüência de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,...,u_n, onde $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ .Em outras palavras, cada termo corresponde à soma dos dois anteriores. Essa seqüência também tem propriedades belas e significativas como quaisquer dois termos sucessivos são primos entre si e o limite da razão entre um termo e seu sucessor quando o incide tende para o infinito corresponde à razão da secção áurea. Fibonacci estudou também sobre análise indeterminada. Sua obra foi considerada demasiado avançada para a época. Estudou também problemas indeterminados que lembram Diofanto, e problemas determinados que lembram Euclides os árabes e os chineses.

No final do século XII, e início do seguinte, o mundo viu nascer muitas universidades na Europa. Nestas e nas escolas religiosas eram retomadas a filosofia e a ciência aristotélicas, e no século treze, destacam-se as idéias de religiosos como Alberto Magno, Tomás de Aquino, Robert Grosseteste e Roger Bacon. Engenhos orientais como a bússola e a pólvora chegavam à Europa nesse tempo, sucedendo a maré de traduções do árabe para o latim. Destacaram-se nestes trabalhos William de Moerbeke, Gerardo de Cremona, Nicole de Oresme e Thomas Bradwardine.

O século XV é o do Renascimento. Em 1447, foi impresso na Europa ocidental o primeiro livro, e seguiu-se uma expansão formidável que chegou a 30.000 edições, embora poucas eram obras matemáticas e, em sua maioria, traduções.

A maior parte dos matemáticos da Renascença era da Alemanha e da Itália, mas o mais importante manuscrito da época veio da França, o *Triparty em la sicience des nombres*, de Nicholas Chuquet, médico em Lyon. Esta obra é bastante diferente das anteriores sobre álgebra ou aritmética, com vaga influência italiana, tendo sido citados apenas Boécio e Campanus. Segundo Boucheny, Chuquet teria escrito a primeira obra impressa inteiramente sobre recreações matemáticas, *Invention des nombres en general*. É do *Triparty* o famoso problema dos ovos discutido a seguir:

Com o passar do tempo, observamos discussão deste problema e de versões mais gerais até a versão mais geral possível sendo discutidas através de gráficos tridimensionais; grafos, tabelas e esquemas; cálculos algébricos para determinar o número mínimo de travessias e discussões em prosa sobre as soluções (MENEZES, 2004). Aqui, podemos observar que, a partir da evolução do conhecimento matemático e da noção de rigor, a busca de solução para estas questões acompanha os elementos da matemática. Mais ainda, os esquemas gráficos de solução buscam ajudar a compreensão de todos.

Outro problema constante no trabalho de Alcino de York é o da divisão de frascos, que organizamos em uma categoria que denominamos de divisões divertidas; para resolvê-los, não precisamos realizar uma divisão explícita. Segue a discussão:

ATIVIDADE: Problema da herança do pai e três filhos.

Um pai de família ao morrer deixou para seus três filhos de herança, 30 frascos dum líquido precisoso, sendo dez cheios, dez meios e dez vazios. Divida pelos três irmãos os frascos e o óleo de modo que recebam igual quantidade de líquido e frascos.
DISCUSSÃO: O pai deixará os dez frascos meios para um dos filhos; para cada um dos outros dois, deverá deixar cinco frascos cheios e cinco frascos vazios.

Sobre a Idade Média: a idade das sombras

Na Idade Média havia uma tendência a se centrar a produção matemática na Europa, mas Boyer (1974) frisa que eram cinco as línguas nas quais se escrevia matemática embora, de modo geral, os estudiosos falavam o latim. Filoponus, que viveu em Alexandria no início do século VI, foi um dos gregos que contribuiu para manter certa continuidade de produção matemática na Idade Média. Ele escreveu uma obra sobre o astrolábio, considerada matemática aplicada. Sua contribuição era referente à matemática elementar na era bizantina, e também ajudou a preservar a matemática árabe.

A matemática Bizantina era considerada elementar, sendo mais comentários sobre os clássicos. Esta obra tinha o significado de mostrar que a tradição grega antiga se manteve até o fim do período medieval. Até hoje se usam os numerais alfabéticos nesta região em Bizâncio.

Um discípulo de Maximos Planudes (1255?-1310), monge grego que escrever sobre numeração hindu, foi Manuel Moschopoulos (viveu em 1350), que escreveu sobre quadrados mágicos. Nesta época a matemática quase se anulou. O destaque é Boécio, que escreveu tratados latinos apenas a nível elementar. Durante esta época, apenas Beda (673-735) escreveu na Inglaterra sobre matemática, o necessário para o calendário eclesiástico, ou sobre a representação dos números por meio dos dedos. No ano de sua morte nasceu Alcuin de York.

Carlos Magno recrutou Alcuin de York (735-804) para revitalizar a instrução na França, o que resultou numa melhoria suficiente para se falar em bibliotecas da Europa de então, tendo transformado a escola num dos maiores centros de saber. Em 782 foi convidado por Carlos Magno para assumir as questões educacionais da sua corte. Fundou o palácio-escola de Aix-la-Chapelle onde eram ensinadas as sete artes liberais segundo o sistema educacional de Cassiodorus. É-lhe atribuída a autoria de uma das mais antigas coleções de problemas de Matemática, intitulada *Propositiones ad Acuendos Juvenes* (Problemas para Estimular os Jovens). Estes 53 problemas e as suas soluções dão-nos uma idéia do estado do ensino de matemática durante o reinado de Carlos Magno.

Esta coleção teria Alcuíno anexado a uma carta ao Imperador servindo, segundo o mesmo, para desenvolver a mente dos jovens. Entre eles, o famoso problema da travessia do lobo, a ovelha e o feixe de capim, o qual teve várias versões com várias abordagens matemáticas de solução até a generalização (MENEZES, 2004).

Figura 06. Desenho de Alcuíno de York[10]

ATIVIDADE: Um lobo, uma cabra e uma couve têm de atravessar um rio num barco que transporta um de cada vez, incluindo o remador. Como é que o remador os levará para o outro lado de forma que a cabra não coma a couve e o lobo não coma a cabra?[11]

DISCUSSÃO: Primeiro ele atravessa a cabra deixando o lobo com a couve. Volta sozinho e atravessa o lobo, mas traz a cabra de volta e deixa na margem do início. Atravessa então a couve e deixa na outra margem com o lobo. Finalmente, atravessa a cabra, tendo todos os seus pertences atravessados a salvo.

[10] Disponível em http://www.malhatlantica.pt/mathis/Europa/Medieval/Alcuin/Alcuino.htm Acessado em 16/02/2003.

[11] Existe uma versão do jogo no formato virtual chamado foxduckcorn disponível em http://www.delphiforfun.org/Programs/FoxDuckCorn.htm.

ATIVIDADE. [Problema 7]: Sou um leão de bronze, uma fonte, as minhas bicas são os meus dois olhos, a minha boca e a planta do meu pé direito. O meu olho direito enche um pote em dois dias, o meu olho esquerdo em três dias, e o meu pé em quatro dias, a minha boca é capaz de o encher em 6 horas. Diz-me em quanto tempo, os quatro todos juntos, o encherão?

ATIVIDADE. [Problema 11]: Desejo que os meus dois filhos recebam as mil estáteres [2] que possuo, mas que a quinta parte da herança do legítimo exceda em dez a quarta parte do que cabe ao ilegítimo.

ATIVIDADE. [Problema 48]: As três Graças carregaram cestos de maçãs e cada uma tinha o mesmo número. As nove Musas encontraram-nas e pediram-lhes maçãs, elas deram o mesmo número a cada uma e as três e as nove ficaram cada uma com o mesmo número. Diz-me quantas é que elas deram e como é que todas ficaram com o mesmo número.

ATIVIDADE. [Problema 127]: Os anos de sua vida, *Demochares* passou o primeiro quarto na infância, a quinta parte na juventude a terça parte homem feito. Os cabelos brancos viram, faltavam-lhe ainda treze anos para a velhice.

ATIVIDADE. [Problema 2]: O seguinte problema refere-se à estátua de *Pallas.* Eu sou *Pallas* de ouro batido, mas o ouro é um presente de poetas vigorosos. *Charisios* deu metade desse ouro, *Tepis*, um oitavo, *Solon* a décima parte; *Temison* a duodécima parte. Os nove talentos [1]restantes e a mão de obra são presente de *Aristodicus*.

ATIVIDADE. [Problema 6 (enigma)]: Diz-nos, indicador de horas sem igual, que fracção do dia já passou? Sobram duas vezes dois terços do que passou.
Nota: Um dia dura 12 horas.

ATIVIDADE. [Problema 1]: Bem-aventurado Pitágoras, Ó filho das Musas de Hélicon, diz-me: o desporto da ciência, quantos, na tua casa, de boa vontade se lhe entregam? Eu te direi Policrates: a metade interessa-se pela bela matemática; um quarto aplica-se no estudo da natureza imortal; um sétimo no desígnio do silêncio total e do discurso eterno dos seus corações; mais três mulheres, cuja melhor é *Teano*. Este é o número de interpretes das Musas que reuni à minha volta.

Estes problemas, em versões atualizadas, são encontrados em livros de aritmética do antigo curso ginasial, principalmente na primeira metade do século XX. Não consta se as soluções dos problemas são apresentados na Antologia Grega, mas hoje, são resolvidos com o auxílio da álgebra, através de equações.

Do século VIII, conhecemos o Jesuíta Alcuíno de York, religioso do tempo do Imperador Carlos Magno. Alcuíno de York nasceu na *Northumbria* (Grã Bretanha) em 735 e morreu a 19 de Maio de 804 em Tours (França). Estudou na escola Catedral de York e, provavelmente, também na Itália. Ensinou durante 15 anos na escola da Catedral de York, onde criou uma das melhores

Urânia – 120;
Calliopie – 300.

Assim sendo, o número de maçãs corresponde a 50 + 450 mais (1/5 + 1/12 + 1/8 + 1/20 + 1/4 + 1/7) do total, de modo que [1 - (1/5 + 1/12 + 1/8 + 1/20 + 1/4 + 1/7)] [= 25/168] do total corresponde a 500 maçãs. O número de maçãs pode ser assim calculado:

Nº de maçãs = [500 x 168] / 25 = 3.360

Uma solução algébrica usando raciocínio semelhante corresponde a, representando pro x o número de maçãs, temos:

$$X = 50 + 450 + (1/5 + 1/12 + 1/8 + 1/20 + 1/4 + 1/7)x,$$

cuja solução é x = 3.360.

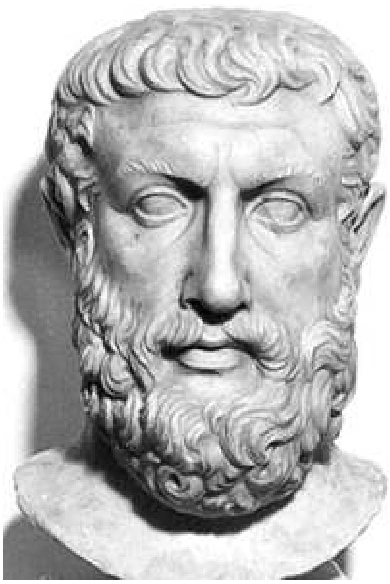


Figura 05. Busto de Metrodorus.

De forma geral os epigramas podem ser agrupados segundo o tipo de contextos do próprio problema:

Epigramas 7, 130 a 133 e 135: Problemas envolvendo torneiras;
Epigramas 11, 123, 128 e 143: Problemas sobre heranças;
Epigramas 3, 48, 116 a 120 e 138: Partilhas de nozes e maçãs;
Epigramas 124, 126 e 127: Problemas sobre etapas da vida;
Epigramas 2, 13, 51, 144 a 146 : Problemas envolvendo pesos de estátuas;
Epigramas 6, 121, 129 e 139 a 142: Problemas envolvendo questões sobre tempo e espaço;
Epigramas 1, 4, 125 e 137: Problemas envolvendo número de pessoas ou animais.

Vamos apresentar alguns enunciados destes problemas[9]:

[9] Os problemas foram transcritos de http://7mares.terravista.pt/mjl1/Grecia/Antologia.htm

Figura 04. Capa da Aritmética de Diofanto[7]

Os problemas da antologia grega estão repletos de poesia. Um problema que segue mostra isto, o problema das maçãs. Vamos transcrevê-lo para discussão.

ATIVIDADE: *Cipris* dirigiu-se a *Love*, que estava olhando cabisbaixo: “Como meu filho tombou essa amargura sobre ti?” Ele respondeu: “As Musas roubaram e dividiram entre elas, em diferentes proporções, as maçãs que trazia de *Helicon*, arrancando-as do meu peito. *Clio* ficou com a quinta parte, e *Euterpe* com a duodécima, mas a divina *Thalia* a oitava. *Melpomene* levou a vigésima parte, e *Terpsichore* a quarta, e *Erato* a sétima; *Polyhymnia* roubou-me trinta maçãs, e *Urania* cento e vinte, e *Calliope* foi-se com uma carga de trezentas maçãs. E assim fiquei com as mãos mais leves, trazendo esta cinqüenta maçãs que as deusas me deixaram”[8] ***Resposta**: 3360 maçãs*.

DISCUSSÃO: As representações das frações e quantidades de maçãs roubadas são:
Clio – 1/ 5;
Euterpe – 1/12;
Thalia – 1/8;
Melpomene – 1/20;
Terpsichore –1/4;
Erato – 1/7;
Polyhymnia – 30;

[7] Fonte Diofanto: http://etsiit.ugr.es/web/jmaroza/images/Fermat.jpg
[8] Acessado em 27/06/2002. Disponível no site
SITE: http://7mares.terravista.pt/mjl1/Grecia/Antologia.htm.

autor dos problemas, mas o colecionador. Porém, deve ter vivido após a morte de Diofanto (200 - 284), uma vez que o 126º problema é sobre a sua vida. A seguir, discutiremos este problema.

ATIVIDADE. Este problema foi retirado da antologia grega: Está gravada no túmulo de Diofanto a sua idade, revelada na solução do problema: "_*Deus concedeu-lhe passar a sexta parte de sua vida na juventude; unduodécimo na adolescência; um sétimo, em seguida, foi passado num casamento estéril. Decorreram mais cinco anos, depois do que nasceu um filho. Mas este filho desgraçado e, no entanto, bem amado! _ apenas tinha atingido a metade da idade de seu pai, morreu. Quatro anos ainda, mitigando a própria dor com o estudo da ciência dos números, passou-os Diofanto, antes de chegar ao termo da sua existência".* Diofanto[5] viveu 84 anos.[6]

DISCUSSAO: Uma solução no contexto da álgebra, mais especificamente remetendo às equações algébricas, para esse problema, pode ser assim discutida: O filho de Diofanto nasceu a 1/6 + 1/12 + 1/7 de sua vida mais 5 anos. O filho morreu quatro anos antes da morte do pai, e viveu a metade do tempo.

Considerando que Diofanto tenha vivido x anos, o ano em que o filho nasceu foi $(1/6 + 1/12 + 1/7)\,x + 5$ e o filho morreu no ano $x - 4$.

Subtraiamos o ano do nascimento do da morte, e obtemos a expressão para o tempo de vida do filho, correspondendo à metade da do pai, ou seja:

$$(x-4) - [(1/6 + 1/12 + 1/7)\,x + 5\,] = x/2.$$

Resolvendo esta equação, chegamos à conclusão que Diofanto viveu 84 anos.

Supomos ser possível resolver o mesmo problema usando procedimentos aritméticos, considerando que a matemática da época não era tão avançada.

Diofanto estudou uma classe de equações que ficaram famosas e levaram seu nome. A figura que segue corresponde à capa de seu livro Aritmética.

5 Fonte Metrodorus: http://www.mlahanas.de/Greeks/Portraits/ Parmenides.jpg. Acessada em maio de 2008.

6 Esse problema está citado em Tahan (1965, 18)

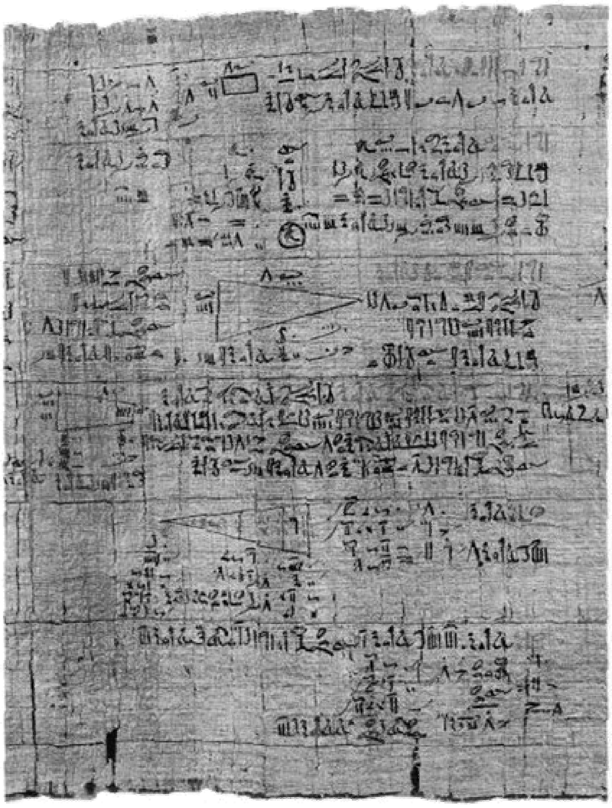


Figura 03. Pedaço do Papiro Rhind[4]

Assim, na escola atual, nas séries iniciais do ensino fundamental o problema pode ser resolvido usando adição e multiplicação; nas séries finais, pode-se escrever a expressão como soma de potências. O número de coisas somadas é igual a uma expressão numérica correspondendo a sete mais sete elevados ao quadrado mais sete elevado ao cubo, mais sete elevado à quarta potência mais sete elevado à quinta potência. Pode-se calcular cada potência e depois somar tudo. No ensino médio, pode-se calcular a soma dos termos de uma progressão finita cujo primeiro termo é sete e a razão também é sete.

Algumas versões desse problema têm aparecido, com novas abordagens de solução.

Mais adiante, vemos o aparecimento de recreações em antigas produções e manuscritos como a Antologia Grega ou Palatina, que consiste de um conjunto de epigramas sobre vários assuntos. Corresponde a uma recolha de epigramas (breves composições poéticas) recolhidas no século V d.C. O livro XIV contém problemas aritméticos, oráculos e enigmas. A maior parte dos problemas resolve-se através de simples cálculos numéricos com frações, sendo que os problemas de 116 a 146 são atribuídos a Metrodorus, embora não se saiba bem quem este autor seria. Alguns autores apontam-no como sendo Métrodore de Skepsis que viveu por volta de 150 a.C., outros como Métrodore de Bizâncio que viveu no século IV d.C., outros, ainda, pensam que Métrodore não era o

[4] Fonte: http://pentagono.uniandes.edu.co/~mateyciv/Contenidos/rhind.gif. Acessado em 20/11/2001.

DISCUSSÃO: Ora, a solução apresentada no papiro consistia de calcular a quantidade de coisas de cada tipo, e depois somar tudo. A tabela que segue, reproduzida do papiro, ilustra a solução.

Casas	7		
Gatos	49		
Ratos	343	1	2801
grãos de cevada	2401	2	5602
hekats de cevada	16807	4	11204
total___________	19607_____	total________	19607

Vale ressaltar aqui que a multiplicação nessa época, era feita a partir de dobrar o valor inicial, dobrar esse dobro, e assim por diante, de modo a calcular um produto como uma soma de potências do valor inicial. Por exemplo,

$$7 = 1 + 2 + 4 = 2^0 + 2^1 + 2^2$$

Portanto, n x 7 = n + 2n + 4n, como no papiro Rhind.

Estando a tratar com alunos dos anos que conhecem apenas a adição como operação com números naturais, podemos resolver o problema do papiro tal qual o encaminhamento resolvido.

Para alunos que conhecem as operações desde adição até a multiplicação, podemos resolver o problema a partir destas três operações, remetendo uma expressão numérica:

Nº de coisas = 7 + 7 x 7 + 7 x 7 x 7 + 7 x 7 x 7 x 7 + 7 x 7 x 7 x 7 x 7
= 7 + 49 + 343 + 2.401 + 16.807 = 19.607

O mesmo problema, para os que conhecessem a potenciação, poderia ser solucionado mediante a resolução da expressão

$$\text{Nº de coisas} = 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 =$$
$$= 7 + 49 + 343 + 2.401 + 16.807 = 19.607$$

Ainda estando nós no século XXI, portanto já conhecendo a teoria das progressões, podemos observar que a solução do problema pode consistir de calcular a soma dos cinco termos de uma progressão geométrica finita cujo primeiro termo é sete e a razão também é sete. Existe a fórmula conhecida que permite fazer este cálculo.

Aparentemente, a tabela mostrada mais atrás não faz sentido. Mas, na época, o processo de multiplicação era o de duplicações sucessivas. Por exemplo, para se multiplicar um número por sete, primeiro dobra-se o número e depois este dobro; como sete e igual a um mais dois mais quatro, sete vezes o número é igual a uma vez o número mais o dobro do número mais o quádruplo (o dobro do dobro) do número, tudo somado.

contato. Essas recreações estão manifestadas em forma de problemas, quebra-cabeças, jogos estruturados, enigmas e objetos de arte. Assim, podemos chamar de recreações matemáticas em geral as que necessitam essencialmente as habilidades matemáticas (lógica, concentração, memória, raciocínio rápido, percepção de formas e tamanho, etc.) e/ou cálculos matemáticos.

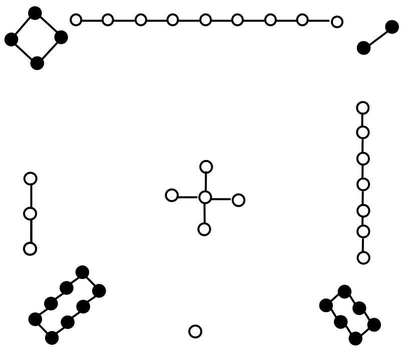


Figura 02. O lo-shu.

Recreações muito antigas

Como sabemos, as informações confiáveis mais antigas sobre o surgimento da matemática das quais se tem notícia vêm da região dos Rios Nilo, Eufrates e Tigre. Assim, os problemas recreativos existem desde o documento matemático mais antigo conhecido, que é o Papiro Rhind. Datado de 1650 aC, mas declaradamente ter sido copiado pelo seu autor, o escriba Ahmes, de um documento 200 anos mais antigo, o qual parece corresponder a um caderno de exercícios de um estudante. No referido papiro, estava presente a matemática discutida na época; o caderno de exercícios sugere a preocupação com o ensino-aprendizagem com os procedimentos matemáticos vigentes e o problema de nº 77 corresponde a um problema lúdico, que vamos discutir a seguir.

ATIVIDADE: Resolva o problema 77 do papiro Rhind: “Uma relação de bens consiste de sete casas, cada uma das quais contém sete gatos, cada um dos quais matou sete ratos, cada um dos quais comeu sete grãos de trigo, cada um dos quais produz sete *hekats*[3]. Qual o número de coisas contadas?” Como seria discutido hoje em diferentes níveis de ensino?

[3] Antiga medida de capacidade.

acentuam, pela simulação, a sua estranheza em relação ao mundo habitual." (HUIZINGA, 1980, p. 34-35).

Dentre os rituais inerentes à cultura humana que englobam o jogo, o autor cita o casamento, a morte, o direito, a guerra, apenas para citar alguns. Neles, alguns aspectos podem ser considerados bizarros em outras situações, bastando considerar os trajes de juízes e magistrados em um tribunal há pouco tempo atrás.

Suas idéias nos levaram à conclusão de que o jogo está fortemente ligado ao conhecimento.

A relação do conhecimento com as características do jogo pode ser identificada na seguinte argumentação: o conhecimento é para o homem primitivo uma fonte de poder mágico, pois todo saber é saber sagrado; esta sabedoria é esotérica, capaz de fazer milagre, pois todo conhecimento está ligado à ordem cósmica; esta ordem, decretada pelos deuses e conservada pelo ritual de preservação da vida e salvação do homem está salvaguardada no conhecimento das coisas sagradas, seus nomes secretos e na origem do mundo.

Os desafios, enigmas, as adivinhações são elementos fortemente presentes nos mais conhecidos e preciosos livros do conhecimento. O conhecimento nesses casos dá uma posição de superioridade ritual independente da condição social na cultura em questão.

A Antiguidade

Os gregos, como povo que serviu de referência na matemática antiga, discutiram recreações matemáticas desde a educação infantil. Nas palavras de Platão: “Foram inventadas para as crianças pequeninas, no que esse refere ao cálculo, noções aritméticas a serem aprendidas através do jogo e da diversão.”

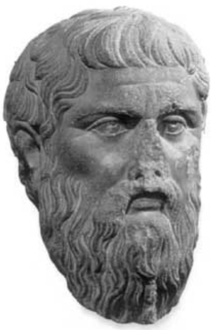


Figura 01. PLATÃO[2].

Desde a Antiguidade, em diversos jogos, a mobilização das diversas habilidades matemáticas era essencial para o seu desenvolvimento pleno, em atividades as quais chamamos recreações matemáticas. Revestidas de mistério, lendas, histórias e enigmas, as recreações matemáticas têm atravessado os tempos, divertido e encantado todos os que com ela têm

[2]Fonte: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians /Plato.html. Acessado em maio de 2008.

CONEXÕES HISTÓRICAS E DESDOBRAMENTOS ENTRE RECREAÇÕES MATEMÁTICAS, CONHECIMENTO MATEMÁTICO E ENSINO DE MATEMÁTICA

Josinalva Estacio Menezes
Cícero Monteiro de Souza

Nossa experiência profissional e bibliográfica tem nos mostrado uma série de evidências de ligações profundas, no contexto da matemática, entre recreações, ensino e conhecimento, incluindo as noções de rigor e validade de uma teoria. Mais ainda, quando um desses três elementos está em foco, freqüentemente os outros dois emergem em algum momento. Assim, acreditamos que apesar das fortes resistências apresentadas ainda hoje no contexto acadêmico da matemática, principalmente por professores em todos os níveis, o lugar por excelência das recreações é no contexto da matemática, seja na produção do conhecimento matemático puro, seja no processo de ensino e aprendizagem. Portanto, objetivamos nesse mini-curso mostrar, através de alguns problemas clássicos que atravessaram os tempos, algumas conexões entre Recreações Matemáticas, conhecimento matemático e Educação Matemática ao longo da história através de problemas recreativos discutidos historicamente por matemáticos, com o rigor de sua época e refletindo uma intenção de tornar a matemática acessível ao maior número de leitores possível.
Palavras-chave: Recreações Matemáticas, Conhecimento Matemático, Educação Matemática, História da Matemática.

Introdução

As recreações matemáticas englobam uma categoria ampla de jogos estruturados, problemas recreativos e outros elementos interdisciplinares, como obras de arte que são concebidas e realizadas a partir de idéias matemáticas[1].

Buscando relacionar jogo e cultura, Huizinga (1980), em sua obra filosófica intitulada *Homo ludens* a qual objetivou integrar o conceito de jogo no de cultura, procurando determinar até que ponto a própria cultura possui caráter lúdico, buscou mostrar, do ponto de vista filosófico – muito mais que psicológico ou antropológico – os elementos lúdicos presentes nas principais atividades de uma sociedade, inseridos na cultura.

Huizinga define o jogo como "uma ação livre, vivida como fictícia e situada para além da vida corrente, capaz, contudo, de absorver completamente o jogador; uma ação destituída de todo e qualquer interesse material e de toda e qualquer utilidade; que se realiza num tempo e num espaço expressamente circunscritos, decorrendo ordenadamente e segundo regras dadas e suscitando relações grupais que ora se rodeiam propositadamente de mistério ora

[1] Antônio Petikov é um conhecido artista plástico que vive no Brasil e suas obras de arte são concebidas com base em elementos matemáticos.