V Bienal da SBM
Sociedade Brasileira de Matemática
UFPB - Universidade Federal da Paraíba
18 a 22 de outubro de 2010

O ensino de probababilidade através de um jogo de dados e da metodologia de resolução de problemas

José Marcos Lopes *

Resumo

Apresentamos neste mini-curso uma proposta didático-pedagógica para o ensino de probabilidade, utilizando-se um jogo de dados e a metodologia de resolução de problemas. A resolução de problemas é utilizada para a construção dos conceitos matemáticos. O jogo proposto é original e foi baseado em Game of Kasje, apresentado em Schuh ([5], p. 181). Através da utilização deste jogo, formulamos vários problemas, cujas soluções e a adequada intervenção do professor, induzem os alunos a construção/reconstrução de todos os conceitos básicos de probabilidade.

Palavras-chave: Ensino-aprendizagem. Probabilidade. Jogos. Resolução de Problemas.

1 Introdução

Os Parâmetros Curriculares Nacionais elegem a resolução de problemas como peça central para o ensino da Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Neste sentido é que entendemos que os jogos devem ser utilizados. O jogo deve ser olhado como um elemento que pode disparar o processo de construção do conhecimento e deve expressar aspectos-chave do tópico matemático que se deseja estudar. Assim, o jogo é utilizado como um ponto de partida e um meio para se ensinar matemática. A atividade de jogar desempenha papel importante no desenvolvimento: de habilidades de raciocínio lógico, dedutivo e indutivo; da linguagem; da criatividade; da atenção e da concentração. Habilidades estas, essenciais para o aprendizado em Matemática ([1], p. 8). A parte deste mini-curso referente ao ensino de Probabilidade Condicional foi publicada em [3], p. 34-8. Um outro trabalho utilizando dois jogos e a metodologia de resolução de problemas para o estudo dos conceitos iniciais de probabilidade é apresentado em [2], p. 41-5.

O Jogo: Este jogo utiliza dois dados e é disputado por dois jogadores, João e Maria. Os resultados abaixo valem os pontos indicados e resultados diferentes não são pontuados.

$(4,1)$ ou $(1,4)$ vale 1 ponto $\qquad$ $(4,2)$ ou $(2,4)$ vale 2 pontos;

$(4,3)$ ou $(3,4)$ vale 3 pontos $\qquad$ $(4,4)$ vale 4 pontos;

$(4,5)$ ou $(5,4)$ vale 5 pontos $\qquad$ $(4,6)$ ou $(6,4)$ vale 6 pontos.

Cada jogador poderá efetuar até dois lançamentos. Se não conseguir nenhuma face 4 no primeiro lançamento, efetua o segundo lançamento com os dois dados. Se conseguiu pelo menos uma face 4 no primeiro lançamento, reserva este dado e decide se lança ou não o outro dado mais uma vez. Vence o jogo quem obtiver a maior pontuação. Caso os dois jogadores obtenham a mesma pontuação o procedimento todo é repetido.

Comentários sobre o jogo: Num primeiro momento todos os alunos deverão jogar. Depois de realizado o jogo, o professor pode fazer os questionamentos abaixo.

O jogador deverá sempre aproveitar o segundo lançamento?

*Universidade Estadual Paulista , UNESP/Ilha Soletira, SP, Brasil, jmlopes@mat.feis.unesp.br

O segundo jogador possui maior possibilidade de vencer o jogo?

Estamos supondo a utilização de dados com faces equiprováveis. Se o jogador conseguiu (4, 1) ou (1, 4), ou seja, 1 ponto no primeiro lançamento, é conveniente lançar o segundo dado mais uma vez, não existe neste caso possibilidade de piorar sua pontuação. Agora se o jogador obteve 3 pontos, (4, 3) ou (3, 4) no primeiro lançamento e decidir lançar o segundo dado mais uma vez, então ele terá uma chance em 6 de permanecer com a mesma pontuação, duas chances em 6 de piorar sua pontuação, ou seja, obter a face 1 ou a face 2 no lançamento do segundo dado e possui três chances em 6 (faces 4, 5 ou 6) de melhorar sua pontuação. O jogador poderá não marcar pontos ou ter pontuação zero, isto ocorre se nos seus dois possíveis lançamentos ele não conseguiu nenhuma face 4.

Primeiramente, João efetua um ou dois lançamentos, posteriormente é a vez de Maria efetuar o seu jogo. Assim, Maria está numa posição melhor de decidir se aproveita ou não o seu segundo lançamento, ela já conhece a pontuação obtida por João. Para tornar o jogo mais justo deve existir uma alternância entre João e Maria para ser o primeiro a jogar. Para a resolução dos problemas, o trabalho deve ser realizado em grupo. Depois da solução de cada problema, um grupo é escolhido para apresentar sua solução. Posteriormente, uma pequena plenária pode ser realizada para discutir a solução apresentada, bem como outras soluções alternativas.

2 EXPERIMENTO ALEATÓRIO, ESPAÇO AMOSTRAL E EVENTO

Os conceitos de Experimento Aleatório, Espaço Amostral e Evento serão sistematizados através das soluções dos problemas a seguir.

Problema 1. Considerando-se apenas o primeiro lançamento dos dois dados, João terá maior chance em conseguir 1 ponto ou 6 pontos? Justificar sua resposta.

Solução

Os alunos deverão apresentar suas soluções utilizando-se de sua própria linguagem. O professor não deve neste momento apresentar definições ou conceitos. O objetivo do problema é fazer com que os próprios alunos sistematizem o conceito matemático que se pretende estudar. O professor deve sim explorar o fato que embora no lançamento de dois dados não sejamos capazes de prever o resultado (Experimento Aleatório), somos capazes de descrever todos os resultados possíveis (Espaço Amostral). Temos os resultados possíveis: (1, 1), (1, 2), ... , (1, 6), (2, 1), (2, 2), ... , (2, 6), ... , (6, 1), (6, 2), ... , (6, 6), ou seja, 36 elementos. Uma representação destes 36 pontos em um eixo cartesiano pode também ser bastante útil. João obtém 1 ponto quando ocorre (1, 4) ou (4, 1) (Evento). Assim terá duas chances em 36 de marcar 1 ponto. De maneira análoga, terá duas chances em 36 de marcar 6 pontos, isto ocorrerá nos casos (4, 6) ou (6, 4) (Evento). Conclusão, João possui a mesma chance de marcar 1 ponto ou 6 pontos considerando-se apenas o primeiro lançamento dos dois dados.

■

Problema 2. Considerando-se apenas o primeiro lançamento dos dois dados, João terá maior chance em conseguir 5 ou 4 pontos? Justificar sua resposta.

Solução

Da mesma forma que no problema 1, o professor deve explorar o fato que dos 36 resultados possíveis, João marcará 5 pontos quando ocorrer (4, 5) ou (5, 4), ou seja, terá duas chances em 36 de marcar 5 pontos. Entretanto, João marcará 4 pontos somente no caso de ocorrer a face 4 nos dois dados, ou seja, no caso (4, 4). Assim, terá apenas uma chance em 36 de marcar 4 pontos. Conclusão, João possui maior chance de marcar 5 pontos do que 4 pontos considerando-se apenas o primeiro lançamento dos dois dados.

■

Após o trabalho com problemas do tipo dos problemas 1 e 2, o professor terá mais facilidade para sistematizar os conceitos de Experimento Aleatório, Espaço Amostral e Evento ([4], p. 120).

3 DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE

Até o presente momento o termo probabilidade não foi mencionado, este conceito será sistematizado nesta seção. Entretanto, os conceitos de Espaço Amostral e Evento, já sistematizados anteriormente, podem e devem ser utilizados pelo professor.

Problema 3. Se João obteve 1 ponto no primeiro lançamento ele deverá utilizar o segundo lançamento para melhorar sua pontuação? Justificar sua resposta.

Solução

No primeiro lançamento, João obtém 1 ponto se ocorre um dos dois casos: (4, 1) ou (1, 4). Pelas regras do jogo, João deve reservar o dado com a face 4 e lançar novamente o segundo dado. Neste caso, terá 5 chances em 6 de melhorar sua pontuação. Os casos favoráveis são: faces 2, 3, 4, 5, ou 6, em seis casos possíveis. Ainda, João terá uma chance em 6 de continuar com 1 ponto e nenhuma chance de piorar sua pontuação. Conclusão, João deve aproveitar o lançamento do segundo dado com o objetivo de melhorar sua pontuação.

■

Problema 4. Se João obteve 3 pontos no primeiro lançamento, quais são suas chances em melhorar, piorar ou manter inalterada sua pontuação se utilizar o segundo lançamento?

Solução

Da mesma forma que no problema 3, João terá 3 chances em 6 de melhorar sua pontuação; 2 chances em 6 de piorar sua pontuação e 1 chance em 6 de manter sua pontuação inalterada. Portanto, neste caso é mais conveniente que João utilize o segundo lançamento. Entretanto, deve-se observar que João poderá piorar sua pontuação.

■

Para as soluções dos problemas 1, 2, 3 e 4 já estamos, intuitivamente, calculando a probabilidade (de Laplace):

$$\mathrm{p} = \text{Probabilidade de A} = \mathrm{P(A)} = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}.$$

Nesse momento o professor poderá apresentar a definição de probabilidade na concepção clássica (Laplace) - ([4], p. 120).

No caso do problema 4, concluímos que João possui uma probabilidade de 33,3 % ($\frac{2}{6}$) de piorar sua pontuação e uma probabilidade de 66,7% ($\frac{3}{6}+\frac{1}{6}$) de manter ou melhorar sua pontuação. Assim, neste caso é recomendável que João aproveite o seu segundo lançamento.

■

Com o objetivo de familiarizar os alunos com a definição de probabilidade, os seguintes problemas poderão ser utilizados.

Problema 5. Qual a probabilidade de João não obter a face 4 no primeiro lançamento?

Solução

$$\mathrm{p} = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{25}{36} \approx 69,44\%.$$

■

Problema 6. Se João obteve 4 pontos no primeiro lançamento, qual a probabilidade de aumentar, diminuir ou permanecer com esta pontuação se utilizar o segundo lançamento?

Solução

João terá probabilidade $\mathrm{p}_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ de aumentar sua pontuação, probabilidade $\mathrm{p}_2 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ de diminuir sua pontuação e probabilidade $\mathrm{p}_3 = \frac{1}{6}$ de permanecer com a mesma pontuação. Neste caso, João possui uma probabilidade de 50 % ($\mathrm{p} = \frac{1}{2}$) de diminuir sua pontuação e uma probabilidade de 50 % ($\mathrm{p} = \frac{1}{3}+\frac{1}{6}$) de manter ou melhorar sua pontuação, se decidir pela utilização do segundo lançamento.

■

4 SOMA E PRODUTO DE PROBABILIDADES

O objetivo desta seção é trabalhar com problemas que envolvam soma e/ou produto de probabilidades. Geralmente os alunos têm muitas dificuldades em saber quando devem somar ou multiplicar probabilidades. Em linhas gerais, se necessitamos que exigências sucessivas sejam satisfeitas, então usamos o produto. Agora, quando podemos satisfazer uma exigência ou outra, então usamos a soma.

A partir desta seção e considerando os resultados dos problemas anteriores, assumimos a seguinte estratégia para João.

Estratégia de João: se obtém 1, 2 ou 3 pontos no primeiro lançamento, então realiza o segundo lançamento com apenas um dado para tentar melhorar sua pontuação. No caso em que obtém 4, 5 ou 6 pontos no primeiro lançamento então ele para. Obviamente, se não conseguiu nenhum ponto no primeiro lançamento, lança novamente os dois dados.

Observar que se João obteve 3 pontos em seu primeiro lançamento e usar o segundo lançamento, então existe a possibilidade de piorar sua pontuação.

A estratégia de Maria deve ser diferente daquela utilizada por João. Como Maria é a segunda a jogar, quando realiza seu jogo ela já sabe a pontuação obtida por João, possui assim melhores condições de decidir se aproveita ou não o seu segundo lançamento.

Problema 7. Qual a probabilidade de João marcar 1 ponto neste jogo?

Solução

Para João marcar um ponto e considerando-se a estratégia adotada por João, vários casos devem ser considerados:

(i) João não obteve nenhuma face 4 no primeiro lançamento **e** obteve 1 ponto no segundo lançamento dos dois dados. Neste caso,

$$\mathrm{p}_1 = \frac{25}{36} \times \frac{2}{36} = 0,0385802;$$

(ii) João obteve 1 ponto no primeiro lançamento **e** a face 1 no lançamento do segundo dado. Neste caso,

$$\mathrm{p}_2 = \frac{2}{36} \times \frac{1}{6} = 0,0092592;$$

(iii) João obteve 2 pontos no primeiro lançamento **e** a face 1 no lançamento do segundo dado. Neste caso,

$$\mathrm{p}_3 = \frac{2}{36} \times \frac{1}{6} = 0,0092592;$$

(iv) João obteve 3 pontos no primeiro lançamento **e** a face 1 no lançamento do segundo dado. Neste caso,

$$\mathrm{p}_4 = \frac{2}{36} \times \frac{1}{6} = 0,0092592.$$

Portanto, a probabilidade de João marcar 1 ponto será dada por:

$$\mathrm{p} = \mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2 + \mathrm{p}_3 + \mathrm{p}_4 \approx 6,63\%.$$

■

Se João obtém 4, 5 ou 6 pontos no primeiro lançamento, então o jogo é interrompido e consequentemente nestes casos ele não poderá marcar 1 ponto. O objetivo deste problema é o de estudar os conceitos de soma e produto de probabilidades. Deve ser destacado pelo professor que para o cálculo das probabilidade p_1, p_2, p_3 e p_4, duas exigências sucessivas devem ser atendidas, destacar o papel do "**e**", por isso multiplicamos. Agora, para o cálculo da probabilidade p de João marcar 1 ponto, deve-se destacar o papel do "**ou**", neste caso poderá ocorrer uma situação ou outra que mesmo assim João continuará a marcar 1 ponto, por isso somamos. Analogamente ao problema 7, podemos mostrar que a probabilidade de João marcar 2 pontos é igual a probabilidade de marcar 3 pontos e é dada por p ≈ 6,63 %.

Problema 8. Qual a probabilidade de João marcar 4 pontos neste jogo?

Solução

Vários casos devem ser considerados:

(i) João não obteve nenhuma face 4 no primeiro lançamento **e** obteve 4 pontos no segundo lançamento dos dois dados. Neste caso,

$$\mathrm{p}_1 = \frac{25}{36} \times \frac{1}{36} = 0,0192901;$$

(ii) João obteve 1 ponto no primeiro lançamento **e** a face 4 no lançamento do segundo dado. Neste caso,

$$\mathrm{p}_2 = \frac{2}{36} \times \frac{1}{6} = 0,0092592;$$

(iii) João obteve 2 pontos no primeiro lançamento **e** a face 4 no lançamento do segundo dado. Neste caso,

$$\mathrm{p}_3 = \frac{2}{36} \times \frac{1}{6} = 0,0092592;$$

(iv) João obteve 3 pontos no primeiro lançamento **e** a face 4 no lançamento do segundo dado. Neste caso,

$$\mathrm{p}_4 = \frac{2}{36} \times \frac{1}{6} = 0,0092592;$$

(v) João obteve 4 pontos no primeiro lançamento. Neste caso,

$$\mathrm{p}_5 = \frac{1}{36} = 0,0277778.$$

Portanto, a probabilidade de João marcar 4 pontos será dada por:

$$\mathrm{p} = \mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2 + \mathrm{p}_3 + \mathrm{p}_4 + \mathrm{p}_5 \approx 7,48\%.$$

■

Quando João obtém 5 ou 6 pontos no primeiro lançamento, então o jogo é interrompido e consequentemente nestes casos, ele não poderá marcar 4 pontos. Podemos mostrar que João possui a mesma probabilidade de marcar 5 ou 6 pontos, a qual é dada por $\mathrm{p} \approx 12{,}19$ %.

Problema 9. Qual a probabilidade de João não marcar pontos neste jogo?

Solução

$$\mathrm{p} = \frac{25}{36} \times \frac{25}{36} = 0,4822531 \approx 48,22\%.$$

■

Temos que a soma das probabilidades de João marcar 1 ponto, 2 pontos, ... , 6 pontos e não marcar pontos é igual a 1.

5 PROBABILIDADE CONDICIONAL

O cálculo de probabilidades condicionais está relacionado ao cálculo da probabilidade de um evento ocorrer sabendo-se que um outro evento já ocorreu a priori. Este conceito será sistematizado através da resolução dos problemas a seguir.

Problema 10. Considerando-se apenas o primeiro lançamento, qual a probabilidade de João marcar 3 pontos, sabendo-se que ele obteve em pelo menos um dos dois dados uma face 4?

Solução

O professor deve explorar inicialmente que agora o Espaço Amostral mudou. Quando lançamos dois dados temos um Espaço Amostral S constituído de 36 resultados possíveis, neste caso, a informação que João obteve em pelo menos um dos dois dados a face 4, reduz o Espaço Amostral para {(1, 4), (4, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (4, 6), (6, 4)} que tem 11 elementos (Espaço Amostral Reduzido $\overline{S}$). Assim, a probabilidade de João marcar 3 pontos deve agora ser calculada neste novo espaço amostral e João obtém 3 pontos se ocorrer (3, 4) ou (4, 3), ou seja, a probabilidade de João marcar 3 pontos sabendo-se que obteve pelo menos uma face 4 será: $p = \frac{2}{11}$.

■

A representação de S e dos casos favoráveis (3, 4) e (4, 3) num eixo cartesiano facilita em muito o entendimento do conceito de Probabilidade Condicional.

Problema 11 Considerando-se apenas o primeiro lançamento, qual a probabilidade de João marcar 3 pontos, sabendo-se que o número da face do primeiro dado é maior do que a do segundo?

Solução

Da mesma forma que no problema 10, temos agora o Espaço Amostral Reduzido $\overline{S}$ = {(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)} que tem 15 elementos. Destes 15 elementos, João pode marcar 3 pontos em apenas um deles, quando ocorrer (4, 3). Assim, a probabilidade de João marcar 3 pontos no primeiro lançamento, sabendo-se que o número da face do primeiro dado é maior do que a do segundo é $p = \frac{1}{15}$.

■

Nos dois problemas anteriores, estamos calculando a probabilidade de João marcar 3 pontos, entretanto, a informação fornecida a priori, altera o valor da probabilidade. A partir daqui é possível começar a sistematizar o conceito de probabilidade condicional. No problema 11, definimos os eventos:

A = { João marcou 3 pontos no primeiro lançamento dos dois dados } e

B = { O número da face do primeiro dado é maior do que a do segundo }.

Temos neste caso, B = {(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)} que possui 15 elementos. Assim, $P(B) = \frac{15}{36}$.

Agora, A = {(3, 4), (4, 3)} e A ∩ B = { (4, 3) }. Assim, $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$.

Das probabilidades calculadas acima e do resultado do problema 11, obtemos:

$$P(A|B) \;=\; \frac{1}{15} \;=\; \frac{\frac{1}{36}}{\frac{15}{36}} \;=\; \frac{P(A \cap B)}{P(B)}\ .$$

A relação acima não se verifica apenas para o caso particular do problema 11. Na verdade, essa relação é a definição do conceito de probabilidade condicional ([4], p. 141), admitindo-se que $P(B) > 0$.

Observar que as probabilidades P(A∩B) e P(B) são calculadas considerando-se o Espaço Amostral S, enquanto que a probabilidade condicional P(A|B) é calculada em termos do Espaço Amostral Reduzido $\overline{S}$.

O professor deve explorar o fato que a Probabilidade Condicional envolve dois eventos, por isso usamos P(A|B), leia-se "pe de A dado B", ou seja, desejamos calcular a probabilidade de ocorrer o evenot A sabendo-se que já ocorreu o evento B. Os problemas a seguir podem ser utilizados para fortalecer o conceito e a utilização da definição de Probabilidade Condicional. Nesse momento, é conveniente que se trabalhe com a definição (fórmula) de Probabilidade Condicional.

Problema 12. Qual a probabilidade de João marcar 5 pontos neste jogo?

Solução

Definimos os seguintes eventos:

B = {João marcou 5 pontos no jogo};

A_1 = {João não obteve face 4 no primeiro lançamento};

A_2 = {João obteve 1 ponto no primeiro lançamento};

A_3 = {João obteve 2 pontos no primeiro lançamento};

A_4 = {João obteve 3 pontos no primeiro lançamento} e

A_5 = {João obteve 5 pontos no primeiro lançamento}.

Assim,

$$P(B) = P(A_1).P(B|A_1) + P(A_2).P(B|A_2) + P(A_3).P(B|A_3) + P(A_4).P(B|A_4) + P(A_5).P(B|A_5)$$

ou

$$P(B) = \frac{25}{36} \times \frac{2}{36} + \frac{2}{36} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{36} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{36} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{36} \times 1 \approx 12,19\%.$$

.

■

Observar que $P(B|A_5) = 1$, pois se João obtém 5 pontos já no primeiro lançamento então ele não utilizará o seu possível segundo lançamento. A solução do problema 12 pode ser utilizada para sistematizar o Teorema da Probabilidade Total ([4], p. 149).

Problema 13. Qual a probabilidade de João não ter obtido nenhuma face 4 no primeiro lançamento sabendo-se que João marcou 5 pontos no jogo?

Solução

Considerando-se os mesmos eventos como definidos para a solução do problema 12, devemos calcular agora $P(A_1|B)$. Assim, usando a definição de Probabilidade Condicional obtemos:

$$P(A_1|B) \ = \ \frac{P(B \cap A_1)}{P(B)} \ = \ \frac{P(A_1)\ .\ P(B|A_1)}{P(B)} \ = \ \frac{\frac{25}{36} \times \frac{2}{36}}{0,1219133} \ \approx \ 31,64\%$$

■

A solução do problema 13 pode ser utilizada para sistematizar o Teorema de Bayes ([4], p. 150). O problema 14 será utilizado para introduzir o importante conceito de eventos independentes.

Problema 14. Considerando-se apenas o primeiro lançamento, qual a probabilidade de João marcar 4 pontos?

Solução

João obtém 4 pontos no primeiro lançamento se consegue o resultado (4, 4) no lançamento dos dois dados, isto ocorre com probabilidade $p = \frac{1}{36}$, um caso favorável em 36 casos possíveis.

■

Outra solução:

Consideremos os seguintes eventos:

$A = \{$João obtém a face 4 no primeiro dado$\}$ e

$B = \{$João obtém a face 4 no segundo dado$\}$.

Para João marcar 4 pontos no primeiro lançamento, deve obter a face 4 no primeiro dado e também obter a face 4 no segundo dado, temos então a probabilidade $p = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$, ou seja, $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$. Temos ainda que $P(A) = P(B) = \frac{1}{6}$.

Portanto,

$$P(A \cap B) = P(\text{ João obter 4 pontos no primeiro lançamento})$$

$$= \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = P(A).P(B).$$

Em termos de Probabilidade Condicional, obtemos que:

$$P(A|B) \ = \ \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \ = \ \frac{P(A)\ .\ P(B)}{P(B)} \ = \ P(A)$$

ou seja, a probabilidade de ocorrer o evento A dado que ocorreu o evento B é igual a probabilidade de A. Assim a ocorrência do evento B não interfere sobre a ocorrência ou não do evento A. Se $P(A \cap B) = P(A)\ .\ P(B)$, então os eventos A e B são chamados Eventos Independentes ([4], p. 153).

6 PROBLEMAS DIVERSOS

Quando Maria faz seus lançamentos, sua probabilidade de vitória está condicionada aos pontos que João obteve a priori. Lembrando que Maria faz seu jogo após João ter realizado a sua jogada.

Se Maria obtém uma pontuação menor do que João no seu primeiro lançamento então ela utilizará o seu segundo lançamento. Quando Maria obtém uma pontuação maior do que João já no seu primeiro lançamento, então o jogo termina com a vitória de Maria. Agora, quando Maria empata com João em seu primeiro lançamento então ela deve decidir se aproveita ou não o seu segundo lançamento, e isto, obviamente está condicionado aos pontos obtidos por João. Vamos considerar na sequência a seguinte estratégia para Maria.

Estratégia de Maria: Se empatou com João no primeiro lançamento, então usará o seu segundo lançamento se João obteve 3 pontos ou menos.

Nos problemas a seguir calculamos as probabilidades de Maria vencer, perder ou empatar o jogo, considerando-se os vários possíveis pontos obtidos por João e a estratégia adotada por Maria.

Problema 15. Se João não marcou pontos qual a probabilidade de Maria vencer, perder ou empatar o jogo?

Solução

Como João não marcou pontos, Maria nunca perderá o jogo. Assim a probabilidade de Maria perder é igual a zero.

Maria pode também não marcar pontos e assim empatar com João, neste caso, com probabilidade,

$$\mathrm{p} \;=\; \left(\frac{25}{36}\right)^2 \;=\; 0,4822531.$$

Portanto, usando o conceito de Evento Complementar, temos que a probabilidade de Maria vencer o jogo será dada por: $p = 1 - 0,4822531 \approx 51,77\%$.

■

Problema 16. Se João marcou 1 ponto qual a probabilidade de Maria vencer, perder ou empatar o jogo?

Solução

• Maria perde o jogo se não marcar pontos, neste caso com probabilidade,

$$\mathrm{p} = 0,4822531 \approx 48,22\%.$$

• Maria empata o jogo nas seguintes duas situações:

(i) não obteve nenhuma face 4 no primeiro lançamento e obteve 1 ponto no segundo lançamento dos dois dados. Neste caso,

$$\mathrm{p}_1 = \frac{25}{36} \times \frac{2}{36} = 0,0385802.$$

(ii) obteve 1 ponto no primeiro lançamento e a face 1 no lançamento do segundo dado. Neste caso,

$$\mathrm{p}_2 = \frac{2}{36} \times \frac{1}{6} = 0,0092592.$$

Assim, a probabilidade de Maria empatar o jogo é dada por:

$$\mathrm{p} = \mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2 = 0,0478394 \approx 4,78\%.$$

• Maria vence o jogo com probabilidade p = 1 - (0,4822531 + 0,0478394) $\approx 46,99\%$.

■

Podemos mostrar de maneira análoga ao problema 16 que:

(i) se João marcou 2 pontos, então as probabilidades de Maria são:

• para perder:

$$\frac{25}{36} \times \frac{25}{36} + \frac{25}{36} \times \frac{2}{36} + \frac{2}{36} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{36} \times \frac{1}{6} = 0,5393517 \approx 53,93\%$$

- para empatar:

$$\frac{25}{36}\times\frac{2}{36}+\frac{2}{36}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{36}\times\frac{1}{6}=0,0570986\approx 5,71\%$$

- para vencer:

$$1-(0,5393517+0,0570986)\approx 40,35\%$$

(ii) se João marcou 3 pontos, então as probabilidades de Maria são:

- para perder:

$$\frac{25}{36}\times\frac{25}{36}+\frac{25}{36}\times\frac{4}{36}+\frac{2}{36}\times\frac{2}{6}+\frac{2}{36}\times\frac{2}{6}+\frac{2}{36}\times\frac{2}{6}=0,6149691\approx 61,50\%$$

- para empatar:

$$\frac{25}{36}\times\frac{2}{36}+\frac{2}{36}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{36}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{36}\times\frac{1}{6}=0,0663578\approx 6,63\%$$

- para vencer:

$$1-(0,6149691+0,0663578)\approx 31,87\%$$

(iii) se João marcou 4 pontos, então as probabilidades de Maria são:

- para perder:

$$\frac{25}{36}\times\frac{25}{36}+\frac{25}{36}\times\frac{6}{36}+\frac{2}{36}\times\frac{3}{6}+\frac{2}{36}\times\frac{3}{6}+\frac{2}{36}\times\frac{3}{6}=0,6813269\approx 68,13\%$$

- para empatar:

$$\frac{25}{36}\times\frac{1}{36}+\frac{2}{36}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{36}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{36}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{36}=0,0748455\approx 7,48\%$$

- para vencer:

$$1-(0,6813269+0,0748455)\approx 24,38\%$$

(iv) se João marcou 5 pontos, então as probabilidades de Maria são:

- para perder:

$$\frac{25}{36}\times\frac{25}{36}+\frac{25}{36}\times\frac{7}{36}+\frac{2}{36}\times\frac{4}{6}+\frac{2}{36}\times\frac{4}{6}+\frac{2}{36}\times\frac{4}{6}+\frac{1}{36}\times\frac{4}{36}=0,7469135\approx 74,69\%$$

- para empatar:

$$\frac{25}{36}\times\frac{2}{36}+\frac{2}{36}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{36}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{36}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{36}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{36}=0,1265429\approx 12,65\%$$

- para vencer:

$$1-(0,7469135+0,1265429)\approx 12,65\%$$

(v) se João marcou 6 pontos, então as probabilidades de Maria são:

- para perder:

$$\frac{25}{36}\times\frac{25}{36}+\frac{25}{36}\times\frac{9}{36}+\frac{2}{36}\times\frac{5}{6}+\frac{2}{36}\times\frac{5}{6}+\frac{2}{36}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{36}\times\frac{5}{36}+\frac{2}{36}\times\frac{5}{6}=0,8641975\approx 86,42\%$$

- para empatar:

$$\frac{25}{36}\times\frac{2}{36}+\frac{2}{36}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{36}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{36}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{36}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{36}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{36}=0,1358021\approx 13,58\%$$

- para vencer:

$$\mathrm{p}=0$$

A partir deste momento temos condições de calcular as probabilidades de Maria vencer, perder ou empatar com João. No problema a seguir calculamos a probabilidade de Maria vencer o jogo considerando-se todas as pontuações possíveis que João poderá obter como sendo o primeiro a jogar.

Problema 17. Calcular a probabilidade de Maria vencer este jogo.

Solução

Maria pode vencer o jogo nos casos onde João obteve 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 pontos. Se João marcou 6 pontos então a probabilidade de Maria vencer é igual a zero. Neste último caso, Maria pode apenas empatar ou perder o jogo.

Consideremos os seguintes eventos:

$\mathrm{B} \ \ = \{$Maria vence o jogo$\}$;
$\mathrm{A}_1 = \{$João não marcou pontos$\}$;
$\mathrm{A}_2 = \{$João marcou 1 ponto$\}$;
$\mathrm{A}_3 = \{$João marcou 2 pontos$\}$;
$\mathrm{A}_4 = \{$João marcou 3 pontos$\}$;
$\mathrm{A}_5 = \{$João marcou 4 pontos$\}$ e
$\mathrm{A}_6 = \{$João marcou 5 pontos$\}$.

Utilizando-se o Teorema da Probabilidade Total e os resultados anteriores obtemos que:

$$\mathrm{P(B) = P(A_1).P(B|A_1) + P(A_2).P(B|A_2) + P(A_3).P(B|A_3) + P(A_4).P(B|A_4) + P(A_5).P(B|A_5) + P(A_6).P(B|A_6)}$$

ou

$$\mathrm{P(B)} = 0{,}4822531 \text{ x } 0{,}5177469 + 0{,}0663578 \text{ x } 0{,}4699075 + 0{,}0663578 \text{ x } 0{,}4035497 + 0{,}0663578 \text{ x } 0{,}3186731 + 0{,}0748454 \text{ x } 0{,}2438277 + 0{,}1219133 \text{ x } 0{,}1265436 \approx 36{,}25\ \%.$$

■

Analogamente ao problema 17, podemos mostrar que:

- P(Maria perder) $\approx$ 35,60 %;
- P(Maria empatar) = 1 - [P(Maria vencer) + P(Maria perder)] $\approx 28,15\%$.

Concluímos assim, que a probabilidade de Maria vencer o jogo é ligeiramente maior do que a probabilidade de perder. O segundo jogador está numa situação melhor, ele já sabe a pontuação obtida por seu opositor. Para tornarmos o jogo mais justo, deve existir uma alternância entre os jogadores na escolha de quem inicia o jogo.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta metodologia, os alunos tornam-se ativos na construção de seu próprio conhecimento, o que buscamos é o desenvolvimento do raciocínio dedutivo do aluno e não a memorização de fórmulas. A memorização pode ser temporária, mas o desenvolvimento do raciocínio é para toda a vida. Os problemas devem despertar algum interesse no aluno e sua solução conduzir ao conhecimento matemático pretendido. Temos neste trabalho, utilizado o jogo como uma forma de motivação para os alunos. Mudar a forma de se ensinar matemática é tarefa árdua e lenta; mas só depende de nós, professores.

Referências

[1] BORIN, J. - *Jogos e Resolução de Problemas: Uma estratégia para as aulas de matemática.*, CAEM - IME/USP, 5a Edição, São Paulo, 2004.

[2] LOPES, J. M. - *Conceitos básicos de Probabilidade com Resolução de Problemas. Relato de uma experiência.*, Revista do Professor de Matemática-Sociedade Brasileira de Matemática, vol. 59, p. 41-5, São Paulo, 2006.

[3] LOPES, J. M. - *Probabilidade condicional por meio da resolução de problemas.*, Revista do Professor de Matemática-Sociedade Brasileira de Matemática, vol. 62, p. 34-8, São Paulo, 2007.

[4] MORGADO, A.C.O, ET.AL. - *Análise Combinatória e Probabilidade*, Coleção do Professor de Matemática - SBM. Rio de Janeiro, 2004.
[5] SCHUH, F. - *The Master Book of Mathematical Recreations*, Dover Publications, Inc., New York, 1968.