

# A RAIZ QUADRADA AO LONGO DOS SÉCULOS

JOÃO BOSCO PITOMBEIRA DE CARVALHO \*

## RESUMO

Este trabalho destina-se a alunos e professores das licenciaturas e bacharelados em Matemática e a professores do Ensino Médio. Ele mostra como a preocupação com a extração de raízes quadradas é antiga, atravessando várias civilizações. Apresentamos alguns dos métodos que elas utilizaram para esse fim, discutindo-os matematicamente, isto é, mostrando porque eles funcionavam.

Esta preocupação com a justificativa dos métodos decorre de nossa crença de que a História da Matemática não é uma simples apresentação de fatos matemáticos, sem justificá-los, ou a menção a acontecimentos pitorescos na vida de grandes matemáticos. Ao contrário, para apreciarmos convenientemente as práticas matemáticas do passado é necessário penetrar na Matemática utilizada, em seus detalhes, analisando-os.

Isso não significa fazer um estudo anacrônico da História da Matemática, tentando vestir as práticas das antigas civilizações em uma roupagem moderna. Mas simplesmente mostrar que, com os meios disponíveis na época, estas civilizações foram capazes de criar ferramentas matemáticas que funcionam, algumas das quais usadas até hoje.

Apresentamos em primeiro lugar alguns resultados matemáticos básicos sobre raízes quadradas, já tratados de maneira matematicamente sofisticada, e correta, pelos gregos, certamente antes de 400 a.E.C. Além disso, mostramos que um número real é um número racional se e somente se sua expansão decimal é periódica infinita ou tem somente um número finito de algarismos não-nulos.

Em seguida, mostramos como os mesopotâmicos atacaram o problema de extrair raízes quadradas, apresentando exemplos de como fizeram isso, ressaltando a base geométrica de seu método. Na sequência, apresentamos o passo fundamental dado por Hierão, de procurar aproximações sucessivas cada vez melhores.

Outro método apresentado é o de Theon, cuja fundamentação matemática é analisada, e que pode ser generalizado para achar raízes  $n$ -ésimas.

Na sequência, mostramos como os hindus extraíam raízes quadradas, discutindo as interpretações dadas para suas aproximações.

Depois disso, voltamo-nos para a China, e mostramos que o algoritmo para extrair raízes quadradas até há pouco tempo em nossas escolas tem origem chinesa. Seu método é cuidadosamente explicado, tanto em relação à sua justificativa matemática, de base também geométrica, como quanto à disposição prática de seu algoritmo.

Em seguida, mostramos uma maneira inteiramente diferente das anteriores para calcular raízes quadradas – o método de Newton. Com Newton, passa-se do contexto geométrico ou aritmético para o contexto analítico, bem mais amplo. Menciona-se que este método, aplicado à raiz quadrada fornece exatamente o método de Hierão.

Por fim, em dois apêndices, mostramos, respectivamente, um resultado fundamental de teoria dos números, relativo ao mdc de dois números, já conhecido dos gregos e que foi utilizado na seção 2, e a demonstração da desigualdade média aritmética  $>$  média geométrica  $>$  média harmônica, também utilizada no texto.

Muitos dos resultados abordados neste texto têm utilidade direta para o professor de Matemática, tanto no Ensino Médio quanto nas licenciaturas em Matemática.

Uma dificuldade que os alunos desses dois níveis de ensino encontram é saber trabalhar com números irracionais. Quando extraímos uma raiz quadrada usando um processo iterativo, o algoritmo empregado nas escolas até há alguns anos ou uma calculadora, frequentemente perguntam "mas qual é o valor exato dessa raiz?" Isso demonstra uma falta de compreensão do conceito de número irracional e a falta de conhecimento de que um número é racional se e somente se sua representação decimal é periódica infinita, ou tem somente um número finito de dígitos não-nulos.

---

\*Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, jbpfcvalho@gmail.com

Esperamos que a ênfase dada aos algoritmos recorrentes e às aproximações, possa fazer com que nossos alunos percebam que um resultado matemático nem sempre pode ser escrito em "fórmula fechada", que muitas vezes é necessário usar métodos iterativos, e que eles são tão válidos quanto as provas do tipo "se ... então", com as quais estão habituados. É importante, por outro lado, mostrar que é essencial poder calcular qual o erro presente, ao usarmos resultados aproximados.

Além disso, mostrar a continuidade da Matemática, ao longo do tempo e em diversas civilizações, evidencia sua importância e vitalidade e as diversas maneiras usadas para atacar um mesmo problema.