V Bienal da SBM
Sociedade Brasileira de Matemática
UFPB - Universidade Federal da Paraíba
18 a 22 de outubro de 2010

A raiz quadrada ao longo dos séculos

João Bosco Pitombeira de Carvalho *

1 Introdução

Achar a raiz quadrada de um número real $x \geq 0$ é encontrar um número real y tal que $y^2 = x$. Este problema pode ser encarado geometricamente, encontrar o lado de um quadrado cuja área é conhecida, ou algebricamente, achar as raízes da equação $x^2 - 2 = 0$.

A "extração" de raízes quadradas sempre despertou grande interesse. Essa ooperação tem nítida importância geométrica, pois permite calcular efetivamente o lado de um quadrado cuja área é conhecida. Além disso, muitos problemas que formulados em nossa linguagem algébrica moderna conduzem ao cálculo de raízes quadradas.

O cálculo explícito de uma raiz quadrada é uma operação não-trivial, bem mais complicada do que as "operações elementares". Descartes a considerava em verdade uma operação de importância comparável às operações elementares, adição, subtração, multiplicação e divisão:

> [...] toda a aritmética se compõe somente de quatro ou cinco operações, que são: a adição, a subtração, a multiplicação, a divisão e a extração das raízes, que podemos considerar uma espécie de divisão [...] (Descartes, 1637, p. 1)

As primeiras civilizações interpretavam o problema de extrair raízes quadradas geometricamente e os algoritmos [1]que desenvolveram para resolver este problema se baseavamem raciocínios geométricos. Mais recentemente, o problema foi atacado do ponto de vista algébrico-analítico, de achar as raízes de uma equação ou, equivalentemente, os zeros de uma função. Isso permitiu o desenvolvimento de algoritmos poderosos, que permitem o cálculo de raízes quadradas rapidamente, com grande precisão.

Atualmente, a maior parte das calculadoras permite achar facilmente raízes quadradas, com uma precisão que depende do número de dígitos exibidos. Programas de computador mais sofisticados tornam possível fazer omesmo com um número muito grande de dígitos corretos, ou seja, com uma grande aproximação.

Ao longo dos séculos, foram desenvolvidos vários algoritmos que tornam possível calcular, aproximadamente, raízes quadradas. Apresentaremos, neste trabalho, alguns deles.

Em primeiro lugar, estudaremos como eram extraídas a raízes quadradas na Mesopotãmia; em seguida, veremos o bem conhecido processo de aproximação de Hierão, na Grécia; além disso, mostraremos um algoritmo indiano que pode ser justificado geometricamente e, finalmente, veremos que os chineses já conheciam o algoritmo tradicional para o cálculo de raízes quadradas, ensinado na Escola Fundamental até há poucas décadas, e que tem sido impiedosamente criticado, como representante de tudo de inútil estudado naquele nível de escolaridade. O último tópico apresenta o método de Newton, de natureza diferente dos anteriores.

No entanto, antes de nos voltarmos para os algoritmos desenvolvidos, em várias épocas e por diferentes povos para calcular raízes quadradas, examinaremos alguns resultados sobre as mesmas, úteis para a atividade do professor.

*Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, jbpfcarvalho@gmail.com
[1]Aqui, algoritmo significa um processo que, em um número finito de passos, permite chegar ao resultado desejado.

n	a_n	b_n	m_n	m_n^2	e_n
1	3	4	3,5	12,25	1
2	3	3,5	3,25	10,5	0,5
3	3,25	3,5	3,375	11,39	025
4	3,25	3,375	3,3125	10,98	0,125
5	3,3125	3,375	3,34375	11,18	0,0625
6	3,3125	3,34375	3,328125	11,07	0,03125
7	3,3125	3,328125	3,3203125	11,02	0,015625
8	3,3125	3,3203125	3,316406250	10,99	0,0078125
9	3,316406250	3,3203125	3,318359375	11,01	0,0039
10	3,316406250	3,318359375	3,317382813	11,05	0,0019

Tabela 1: Aproximações sucessivas de $\sqrt{11}$ pelo método das bissecções

2 Resultados sobre raízes quadradas

2.1 Um algoritmo fundamental

Antes de começarmos nossa caminhada histórica, relembremos que achar a raiz quadrada de um número real positivo k, consiste em encontrar um número real d tal que $d^2 = k$. Assim, qualquer número real positivo k tem duas raízes quadradas. Reservamos o símbolo $\sqrt{k}$ para a raíz quadrada *positiva* de k.

Se x e y são números positivos, então

$$x < y \iff x^2 < y^2. \tag{2.1}$$

Assim, dado $k > 0$, é fácil localizar $\sqrt{k}$ entre dois naturais consecutivos, a, $a+1$. Em seguida, é fácil prosseguir, por bissecções sucessivas, para aproximar $\sqrt{k}$ com a precisão desejada.

Por exemplo, para calcular $\sqrt{11}$ procedemos da seguinte maneira:

Como $9 < 11 < 16$, segue-se que $3 < \sqrt{11} < 4$.

Como $3,5^2 = 12,25$, segue-se que $3 < \sqrt{11} < 3,5$.

Como $3,25^2 = 10,5625$, segue-se que $3,25 < \sqrt{11} < 3,5$.

Como $3,375^2 = 11,390625 > 11$, segue-se que $3,25 < \sqrt{11} < 3,375$.

Como $3,3125^2 = 10,97265625 < 11$, segue-se que $3,3125 < \sqrt{11} < 3,375$.

O processo geral é óbvio. Se $a_n < \sqrt{11} < b_n$, achamos o ponto médio m_n do intervalo $[a_n, b_n]$. Se $m_n^2 < \sqrt{11}$, fazemos $a_{n+1} = m_n$, $b_{n+1} = b_n$, e repetimos o processo. Se $m_n^2 > \sqrt{11}$, fazemos $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = m_n$, e repetimos o processo.

É claro que se $a_n < \sqrt{11} < b_n$, então o erro cometido escolhendo como aproximação de $\sqrt{11}$ qualquer ponto do intervalo $[a_n, b_n]$ será menor do que $|a_n - b_n|$. Na tabela 1, sistematizamos o que fizemos acima. Em cada passo, aproximamos $\sqrt{11}$ pelo ponto médio m_n do intervalo $[a_n, b_n]$. Representamos por e_n o erro cometido em cada passo, $e_n = |a_n - b_n|$. O valor de $\sqrt{11}$, correto até a oitava casa decimal é $3,316624790$.

Observamos que, em cada passo, o erro máximo cometido é a metade do erro máximo do passo anterior, o que é fácil de provar.

2.2 A irracionalidade da raiz quadrada de 2

A maior parte dos historiadores da Matemática acredita que as raízes quadradas, mais especificamente $\sqrt{2}$, estiveram presentes em um momento muito importante na história da Matemática – a descoberta, pelos gregos, de que existem números irracionais, no século V a.E.C.

É bem conhecida a maneira de mostrar que $\sqrt{2}$, a raiz quadrada de 2, é um número irracional. A demonstração clássica, feita pelos matemáticos gregos muito cedo, foi tentativamente reconstituída com base em uma observação de Aristóteles de que, com as propriedades do par e do ímpar, os pitagóricos tinham demonstrado a incomensurabilidade entre a diagonal e o lado de um quadrado. Em uma versão moderna, ela está apresentada a seguir.

Teorema 2.1. (*Primeira demonstração*) - *A raiz quadrada de* 2 *é um número irracional.*

Demonstração: Suponha que $\sqrt{2}$ é racional. Então, podemos escrever que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Podemos escolher a e b de tal maneira que $(a, b) = 1$. [2]

Com essa escolha, a e b não têm fatores comuns (Dizemos então que a e b são *relativamente primos*). Este fato é essencial na demonstração que faremos.

Ora,

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Longrightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Longrightarrow a^2 = 2b^2. \tag{2.2}$$

Assim, a^2 é um número par. Afirmamos então que a também é um número par, pois se a fosse ímpar, como o produto de um número ímpar por um número ímpar é sempre ímpar, a^2, (o produto de a por a) também seria ímpar.

Como a é par, podemos escrever que $a = 2 \times r$, com r um número natural. Assim, $a^2 = 4 \times r^2$.

De $a^2 = 2b^2$ (Veja a equação 2.2), obtemos

$$4r^2 = 2b^2 \Longrightarrow b^2 = 2r^2. \tag{2.3}$$

Desta maneira, b^2 é par. Então, o mesmo raciocínio usado acima para provar que a é par, nos mostra que b é par. Mas se a e b são ambos pares, têm o fator comum 2! Isso é uma contradição com o fato de que $(a, b) = 1$, e portanto $\sqrt{2}$ não pode ser um número racional, pois isso nos conduz a uma contradição. □

A pergunta imediata que surge é se existem outras raízes quadradas irracionais. A demonstração acima pode ser modificada imediatamente para mostrar, pelo menos mais uma raiz quadrada irracional, $\sqrt{3}$.

Teorema 2.2. *A raiz quadrada de* 3*,* $\sqrt{3}$ *é um número irracional.*

Demonstração: Seguiremos exatamente o método usado no Teorema 2.1, escrevendo

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b},$$

com $(a, b) = 1$, Temos

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b} \Longrightarrow a^2 = 3b^2. \tag{2.4}$$

O *teorema fundamental da aritmética*, afirma que todo número inteiro se escreve de maneira única, a menos de ordem dos fatores, como um produto de potências de primos distintos. Dele, decorre imediatamente que se o quadrado de um número é múltiplo de 3, então este número tem que ser múltiplo de 3. Temos então que

$$a^2 = (3r)^2 = 9r^2 = 3b^2 \Longrightarrow b^2 = 3r^2 \tag{2.5}$$

[2] Estamos representando o máximo divisor comum de dois números, a e b, por (a, b).

Vemos então que b é um múltiplo de 3. Desta maneira, a e b têm um fator comum, 3, o que é uma contradição. $\square$

Esse raciocínio pode ser repetido para qualquer número primo.

O teorema fundamental da aritmética também é usado na demonstração apresentada a seguir, mais diretamente, para a irracionalidade de $\sqrt{2}$.

Segunda demonstração do teorema 2.1: Com efeito, suponha, mais uma vez, que $\sqrt{2}$ é racional. Então, podemos escrever $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Ora, já vimos que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Longrightarrow 2b^2 = a^2. \tag{2.6}$$

Observe que se um número inteiro n se escreve como produto de potências de primos distintos,

$$n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_s^{r_s}, \tag{2.7}$$

então

$$n^2 = p_1^{2n_1} p_2^{2n_2} \cdots p_s^{2r_s}. \tag{2.8}$$

Ou seja, os fatores primos de n^2 são exatamente os fatores primos de n e seus expoentes são duas vezes os respectivos expoentes na decomposição de n. Disso e do fato que $2b^2 = a^2$, segue-se imediatamente que o número primo 2 comparece na decomposição de $2b^2$ um número ímpar de vezes. Ora, como todos os primos na decomposição de a^2 têm expoentes pares, chegamos a uma contradição. $\square$

Apresentaremos agora uma terceira demonstração do Teorema 1, a qual utiliza as propriedades de nosso sistema de numeração decimal.

Terceira demonstração do teorema 2.1: Suponha que $\sqrt{2}$ é racional. Então, podemos escrever $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, com a e b primos entre si. Então, $2b^2 = a^2$.

Ora, os algarismos das unidades nas representações decimais de a e de b podem ser 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Então, o algarismo das unidades na representação decimal de b^2 só pode ser 0, 1, 4, 5, 6, 9. Assim, o algarismo das unidades na representação de a^2 só pode ser 0, 2, 8 (Lembre-se de que $2b^2 = a^2$).

Ora, como $2b^2 = a^2$, segue-se que algarismos das unidades desses dois últimos números ($2b^2$ e a^2) têm que ser iguais. Assim, a única possibilidade para este algarismo é 0. Decorre disso que a e b são múltiplos de 2, o que é uma contradição.

Estes resultados estão mostrados naTabela 2, cuja primeira linha indica o número de que se está mostrando o algarismo das unidades, na coluna respectiva.

Desafio: Para que outros casos de inteiros n você seria capaz de adaptar essa demonstração?

A pergunta inevitável agora é a seguinte:

Exatamente em que casos $\sqrt{k}$ é um número irracional?

Em torno de 400 a.C., o matemático grego Teodoro demonstrou que se n não é um quadrado, e $2 \leq n \leq 17$, então $\sqrt{n}$ é irracional. Discute-se muito sobre qual teria sido a demonstração de Teodoro, e porque ele só prosseguiu até $\sqrt{17}$. Hoje, há várias maneiras para demonstrar que a raíz quadrada de um número natural n é um racional (em verdade um número natural) se e somente se n é um quadrado.

Apresentamos abaixo uma maneira de fazer isso talvez ainda desconhecida do leitor.

Teorema 2.3. *A raiz quadrada do número natural n, $\sqrt{n}$, é um número natural se e somente se n é um quadrado. Em todos os outros casos, $\sqrt{n}$ é um número irracional.*

Antes de começar a demonstração deste teorema, pedimos que você aceite, por um momento, o seguinte resultado importante. Se você não o conhece, poderá ver sua demonstração no apêndice a este trabalho.

a	b	b^2	$2b^2$	a^2
0	0	0	0	0
1	1	1	2	1
2	2	4	8	4
3	3	9	8	6
4	4	6	2	6
5	5	5	0	5
6	6	6	2	6
7	7	9	1	1
8	8	4	8	6
9	9	1	2	1

Tabela 2: Os algarismos das unidades de a^2 e de $2b^2$

Teorema 2.4. *Sejam a e b números naturais e $d = (a, b)$. Existem então números inteiros x e y tais que $d = ax+by$.*

Assim, por exemplo, $(7, 5) = 1$ e $5 \times 3 - 2 \times 7 = 1$; $(12, 46) = 2$ e $12 \times 4 - 46 \times 1 = 2$.

Aceitando o resultado enunciado acima, podemos prosseguir com a demonstração do Teorema 2.3.

Demonstração: Dado o número natural n, suponha que $\sqrt{n}$ é um número racional. Assim, podemos escrever que $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$, com a e b relativamente primos.

Ora,

$$\sqrt{n} = \frac{a}{b} \Longrightarrow b\sqrt{n} = a, \tag{2.9}$$

e portanto $b\sqrt{n}$ é um número inteiro.

Por outro lado,

$$b\sqrt{n} = a \Longrightarrow b\sqrt{n}\sqrt{n} = a\sqrt{n} \Longrightarrow bn = a\sqrt{n}. \tag{2.10}$$

Assim, $a\sqrt{n}$ é também um número inteiro.

Como $(a, b) = 1$, já sabemos que existem números inteiros x e y tais que $ax + by = 1$. Mas então

$$ax + by = 1 \Longrightarrow xa\sqrt{n} + yb\sqrt{n} = \sqrt{n}. \tag{2.11}$$

Assim, vemos que $\sqrt{n}$ é um numero inteiro, o que acarreta que $n = (\sqrt{n})^2$ será um quadrado. $\square$

Relembremos o que foi feito até aqui. Supusemos que $\sqrt{n}$ é um número racional. Mostramos então que $\sqrt{n}$ é obrigatoriamente um número natural, e portanto n é um quadrado. Ou seja, realmente demonstramos o que desejávamos.

Pode ser alegado que esta demonstração utiliza um resultado pouco conhecido sobre o máximo divisor comum de dois números. Mas este resultado é suficientemente importante para ser ensinado, pois ele permite resolver muitos problemas importantes ou interessantes.

2.3 A caracterização do desenvolvimento decimal de um número racional

Um número racional pode ser representado como uma fração ordinária, uma fração continuada [3] ou por meio de seu desenvolvimento decimal. Caracterizaremos, agora, desenvolvimentos decimais de números racionais. Em primeiro

[3]Não abordaremos a riquíssima teoria das frações continuadas, que estão intimamente relacionadas com o *algorimo de euclides*, o qual permite achar o máximo divisor comum de dois números naturais.

lugar, provaremos que

Teorema 2.5. *Se o desenvolvimento decimal de um número real r é periódico infinito ou possui somente um número finito de dígitos não-nulos, então r é um número racional.*

Em primeiro lugar, podemos nos restringir ao caso em que r é um número positivo menor do que 1.

Suponha então, em primeiro lugar, que o desenvolvimento decimal de r possui somente um número finito de dígitos nào-nulos, $r = 0, x_1 x_2 \cdots x_n$. Então

$$10^n r = x_1 x_2 \cdots x_n \Longrightarrow r = \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{10^n}, \tag{2.12}$$

e assim r é de fato um número racional, representado, como fração decimal, [4] por 2.12.

Suponha agora que o desenvolvimento decimal de r é periódico infinito. É fácil ver que podemos nos limitar a estudar o caso em que este desenvolvimento é da forma

$$r = 0, a_1 a_2 \cdots a_n a_1 a_2 \cdots a_n \cdots a_1 a_2 \cdots a_n \cdots . \tag{2.13}$$

Então,

$$10^n r = a_1 a_2 \cdots a_n, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots a_1 a_2 \cdots a_n \cdots . \tag{2.14}$$

Assim,

$$10^n r = a_1 a_2 \cdots a_n, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots a_1 a_2 \cdots a_n \cdots = a_1 a_2 \cdots a_n + r \Longrightarrow r(10^n - 1) = \overline{a_1 a_2 \cdots a_n}. \tag{2.15}$$

Temos portanto que

$$r = \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{10^n - 1}. \tag{2.16}$$

□

Obs: Tradicionalmente, diz-se que 2.13 é uma *dízima periódica simples*. Uma dízima periódica é *composta* se em seu desenvolvimento decimal encontramos, inicialmente, uma parte que não se repete, seguida da parte que se repete infinitas vezes. Por exemplo, $0,34343434\cdots$ e $37,271271271\cdots$ são dízimas periódicas simples, enquanto $0,36542542542542\cdots$ é uma dízima periódica composta.

Em 2.13, $a_1 a_2 \cdots a_n$ é chamado de *período* A notação tradicional para 2.13 é

$$r = 0, \overline{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Ao nos referirmos a uma *dízima periódica* fica convencionado que estamos supondo que estamos lidando com uma representação decimal *infinita*.

Problema 2.1. *Ache a representação, como fração ordinária, do número racional* $0,\overline{349}$.

Problema 2.2. *Ache a representação, como fração ordinária, do número racional* $31,\overline{349}$.

Problema 2.3. *Ache a representação, como fração ordinária, do número racional* $0,3215\overline{349}$.

Problema 2.4. *Ache a representação, como fração ordinária, do número racional* $67,762\overline{34971}$.

Mostraremos, agora, que

[4] Relembramos que um número racional é uma classe de equivalência de frações ordinárias. Duas frações $\frac{p}{q}$ e $\frac{s}{t}$ pertencem à mesma classe se e somente se existe um número natural n tal que $\frac{p}{q} = \frac{ns}{nt}$.

Teorema 2.6. *O desenvolvimento decimal de um número racional $r = \frac{p}{q}$ tem somente um número finito de dígitos não nulos ou é uma dízima periódica.*

A demonstração deste teorema repousa sobre um resultado muito conhecido e útil, chamado *princípio das casas dos pombos* ou *princípio das gavetas, de Dirichlet*:

Dadas m gavetas e n objetos, então, se $n > m$, forçosamente pelo menos uma das gavetas conterá mais de um objeto.

Usando este princípio podemos demonstrar facilmente o teorema.

Para achar a representação decimal de $r = \frac{p}{q}$, simplesmente dividimos p por q. Se q divide p, (o que representamos por $q|p$), r é um número natural e a demonstração está concluída. Suponha portanto que $q \not| p$. Ao dividirmos p por q, obtemos um primeiro resto $r_1 \neq 0$:

$$p = n_1 q + r_1, \tag{2.17}$$

com $0 < r_1 < q$.

Prosseguindo com a divisão, temos

$$r_1 = n_2 q + r_2, \tag{2.18}$$

com $0 < r_2 < q$.

Como estamos supondo que $q \not| p$, podemos continuar sempre o processo, obtendo, sucessivamente, restos

$$r_1,\, r_2,\, \cdots r_n, \cdots ,$$

todos não nulos e todos estritamente maiores do que 0 e menores do que q. Então, pelo princípio das casas dos pombos, o resto r_q é forçosamente igual a um dos restos anteriores, $r_1, r_2, \ldots r_{q-1}$. Mas uma vez obtido um dos restos anteriores, por exemplo, r_s, com $s < q - 1$, teremos a repetição, infinitas vezes, dos restos $r_1, r_2, \cdots, r_s$, na mesma ordem.

□

Problema 2.5. *Ache a representação decimal do número racional $\frac{13}{17}$*

Problema 2.6. *Dado um número racional $\frac{p}{q}$, com $q \not| p$, determine o comprimento máximo do período da dízima que o representa.*

Os que vimos acima acarreta o seguinte resultado importante:

Teorema 2.7. *Um número real é irracional se e somente se sua representação decimal é infinita e não é periódica*

Hoje, nos livros didáticos de Matemática, encontra-se o erro muito comum de afirmar que para determinar se um número, por exemplo uma raiz, ou π, é irracional, é suficiente examinar o visor de uma calculadora e ver se a representação decimal desse número, na calculadora, mostra periodicidade. Isso é totalmente errado, visto que o visor de umacalculadora mostra somente um número finito de dígitos. Segundo este critério, por exemplo, em uma calculadora que exiba cinco digítos, chegaremos à conclusão de que $frac1317$ será irracional, pois seu desenvolvimento decimal é, até à 20^a casa decimal, $0,76470588235294117647$. Na calculadora, veríamos somente $0,76470$, e concluiríamos, erroneamente, que estamos lidando com um número irracional.

Dada uma fração $\frac{p}{q}$, é facil saber, por simples inspecção de seu denominador, se sua representação decimal é finita ou periódica infinita.

Teorema 2.8. *Se o denominador de $\frac{p}{q}$ contém somente potências de 5 e de 10, então o desenvolvimento decimal de $\frac{p}{q}$ é finito.*

Com efeito, suponha que $q = 2^a 5^b$, com $a, b \geq 0$ e que, além disso, $a < b$. Então

$$q = 2^a \times 5^b.$$

Assim,

$$\frac{p}{q} = \frac{p \times 2^{b-a}}{2^a \times 5^b \times 2^{b-a}} = \frac{p \times 2^{b-a}}{2^b 10^b} = \frac{p \times 2^{b-a}}{10^b},$$

e assim $\frac{p}{q}$ obviamente tem uma representação decimal finita.

$\square$

O resultado recíproco é imediato, e portanto omitimos sua demonstração:

Teorema 2.9. *Se o desenvolvimento decimal de* $\frac{p}{q}$ *é finito, então na decomposição em fatores primos distintos de seu denominador,* q*, só podem comparecer os primos* 2 *e* 5*.*

3 A raiz quadrada ao longo dos séculos

3.1 A raiz quadrada na Mesopotâmia

A Mesopotâmia é a região da Ásia que hoje é aproximadamente o Iraque (Ver o mapa da Figura 1) . Seus habitantes, no segundo milênio antes da E.C., já tinham criado uma Matemática bem mais sofisticada do que os egípcios. [5]

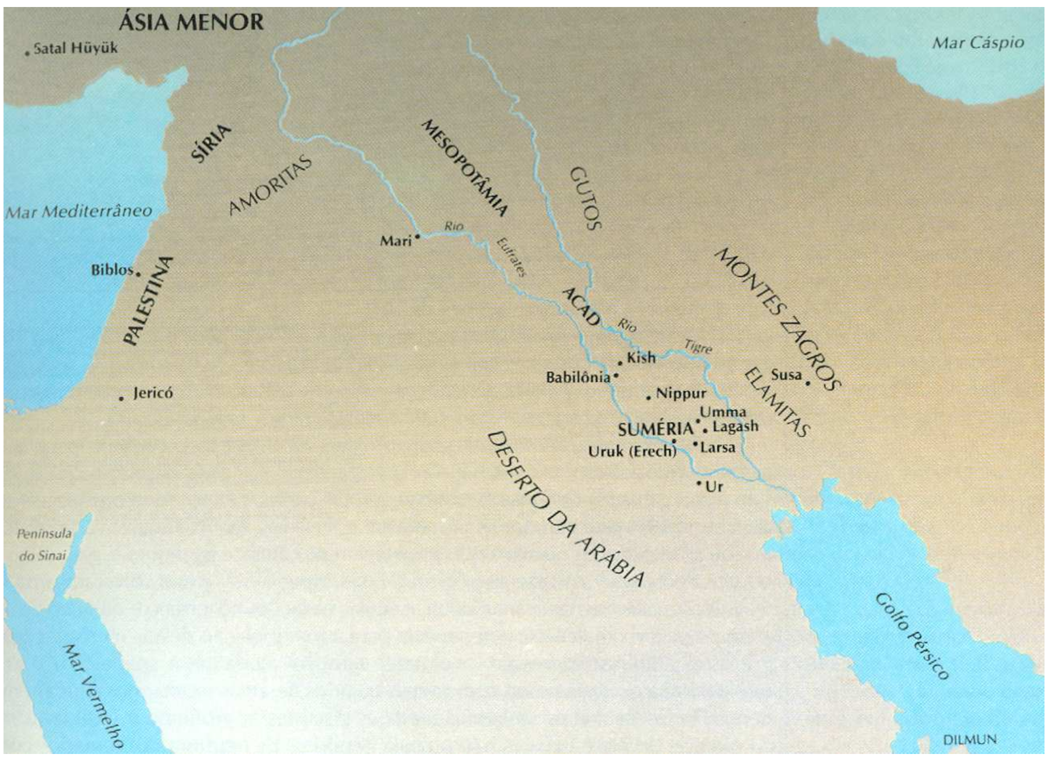

Figura 1: A Mesopotâmia

Um tablete famoso, YBC 7259, da Universidade de Yale, e cujo local de origem é desconhecido, datado entre 1800 a.E.C e 1600 a. E.C., mostra uma aproximação para $\sqrt{2}$. Como este tablete se refere à diagonal de um quadrado, muitos supõem que ele prova que os mesopotâmicos conheciam o teorema de Pitágoras, o que é definitivamente atestado por outras fontes.

[5] Veja, por exemplo, [?] ou [7].

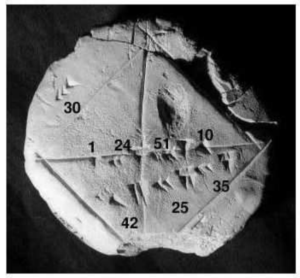

Figura 2: YBC 7289

O número escrito ao longo da diagonal, em notação sexagesimal, é

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \approx 1,414212963.$$

Utilizando um aplicativo de cálculo simbólico, como, por exemplo, o Maple, ou uma planilha eletrônica, como, por exemplo, o Excel, podemos calcular facilmente $\sqrt{2}$ com 14 decimais corretas: 1,41421356237310. Vemos assim que esta proximação dos mesotopâmios é correta até a quinta casa decimal.

Observe que $1 + \frac{24}{60} \approx 1,4$ é um valor aproximado para $\sqrt{2}$ fácil de encontrar. Veremos agora como os mesopotâmios podem ter chegado a $\frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$ para melhorar esta aproximação de $\sqrt{2}$.

Encontramos, na Mesopotâmia, também a seguinte aproximação para $\sqrt{2}$, que não é tão boa como a mostrada acima:

$$1 + \frac{25}{60} \tag{3.19}$$

3.1.1 Aproximação de $\sqrt{k}$ a partir de uma aproximação por falta

Katz, ([7] p. 28) propõe a seguinte interpretação, de fundo geométrico, para o algoritmo usado pelos mesopotâmios.

Geometricamente, calcular $\sqrt{k}$ é achar o lado de um quadrado de área igual a k. Então, pode-se tentar colocar no interior deste quadrado o maior quadrado possível cujo lado conhecemos (Figura 3).

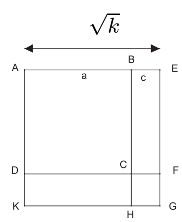

Figura 3: Interpretação geométrica do algoritmo mesopotâmico

Seja a o lado deste quadrado conhecido, e c o comprimento que é necessário adicionar a a a fim de obter $\sqrt{k}$: $a + c = \sqrt{k}$.

Para acharmos uma segunda aproximação para $\sqrt{k}$, a', procuremos uma boa aproximação para c, o que pode ser feito examinando a região poligonal $DKGEBC$, chamada *gnomon* pelos gregos, mais tarde.

A área do gnomon é obviamente igual a $k - a^2$. Por outro lado, ele pode ser decomposto em dois retângulos de lados a e c e em um quadrado de lado c. Assim,

$$2ac + c^2 = k - a^2.$$

Se c for bem pequeno, podemos desprezar c^2, e obtemos

$$c \approx \frac{k-a^2}{2a}.$$

Faça

$$a' = a + \frac{k-a^2}{2a}. \tag{3.20}$$

Então, a' é uma aproximação de $\sqrt{k}$ melhor do que a.

É fácil de ver que se $a < \sqrt{k}$, então $a' > \sqrt{k}$. Com efeito,

$$a' = a + \frac{k-a^2}{2a} = \frac{a^2+k}{2a}$$

e assim temos que

$$a'^2 - k = \frac{a^4 + 2a^2k + k^2 - 4a^2k}{4a^2} = \frac{(a^2-k)^2}{4a^2} > 0.$$

No caso da aproximação que já apresentamos para $\sqrt{2}$ (Veja**??**), temos que

$$\frac{k-a^2}{2a} = \frac{1-1,4^2}{2,8} \approx 0,01428571429. \tag{3.21}$$

Por outro lado,

$$\frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \approx 0,01421296963.$$

Assim, vemos que o erro cometido tomando o valor dado por 3.21 é menor do que $0,00007275133$.

Vimos que, partindo de uma aproximação para $\sqrt{k}$ por falta, chegamos a uma aproximação a' por excesso. O que acontece se tomarmos, como aproximação inicial para $\sqrt{k}$, $a > \sqrt{k}$?

3.1.2 Aproximação de $\sqrt{k}$ a partir de uma aproximação por excesso

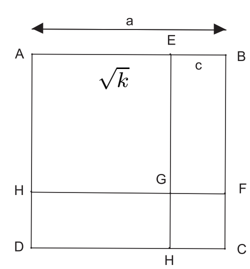

Figura 4: Interpretação geométrica do algoritmo mesopotâmico

Seja a um aproximação por excesso de $\sqrt{k}$. Na Figura 4, temos que $a - c = \sqrt{k}$. A área do gnomon $EBCDHG$ é igual a $a^2 - k$. Ele se decompõe em dois retângulos de lados $a-c$ e c e em um quadrado de lado c. Temos portanto

$$2(a-c)c + c^2 = a^2 - k.$$

Segue-se disso que $2ac - c^2 = a^2 - k$. Desprezando, mais uma vez, o termo c^2, obtemos a aproximação c' tal que $2ac' = a^2 - k$, ou seja,

$$c \approx c' = \frac{a^2-k}{2a}.$$

Assim, uma aproximação melhor de $\sqrt{k}$ é obtida tomando a aproximação de $a - c$ dada por

$$a' = a - c' = a - \frac{a^2 - k}{2a} = a + \frac{k - a^2}{2a}. \tag{3.22}$$

Como $a > \sqrt{k}$, segue-se que $a' > \sqrt{k}$.

Comparando as equações 3.20 e 3.22, vemos que obtivemos o mesmo valor de a'. Assim, independentemente de primeira aproximação a ser por falta ou por excesso, a segunda, a' será sempre por excesso.

3.1.3 Outra interpretação geométrica

Observe que

$$a' = a + \frac{k - a^2}{2a} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{k}{a}\right). \tag{3.23}$$

Esta maneira de escrever 3.22 chama a atenção para os números a e $\frac{k}{a}$. Mais exatamente, temos a média aritmética desses dois números: a' é a média aritmética de a e de k/a.

Podemos agora dar outra interpretação para o cálculo aproximado da raiz quadrada de k: Podemos substituir o quadrado de lado $\sqrt{k}$ por um retângulo de lados a e $\frac{k}{a}$, cuja área é também igual a k (Figura 5).

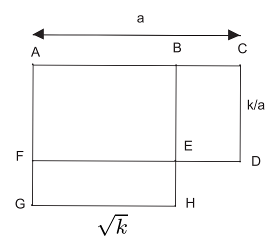

Figura 5: Outra interpretação geométrica do algoritmo mesopotâmico

3.1.4 Uma outra demonstração de que a aproximação obtida é sempre por excesso

Podemos dar, geometricamente, outra demons–tração de que a aproximação obtida pelo método mesopotâmico é sempre por excesso. Examinaremos o caso em que $a > \sqrt{k}$, deixando ao leitor fazer a demonstração do outro caso.

No retângulo de lados a e $\frac{k}{a}$ coloquemos um quadrado de lado $\frac{k}{a}$ e consideremos em seguida o quadrado de lado igual a $a' = \frac{1}{2}\left(a + \frac{k}{a}\right)$ (Figura 6).

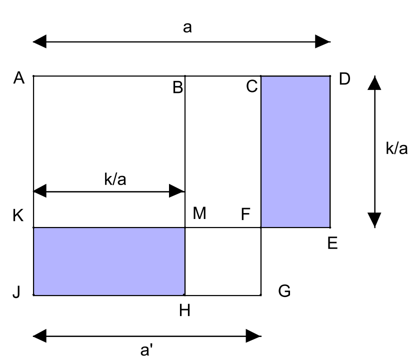

Figura 6: Interpretação geométrica do algoritmo mesopotâmico

Como a' é a média aritmética de a e de $\frac{k}{a}$, o lado do quadrado inscrito estará no ponto médio do segmento ME. É imediato verificar a congruência das partes destacadas na Figura 6, e vemos assim que o quadrado de lado a' tem área maior do que o retângulo de lados a e $\frac{k}{a}$, ou seja, $a'^2 > k$.

Lembremos que, além desta demonstração "visual", este resultado já foi demonstrado algebricamente por meio de uma argumentação baseada sobre os gnomons. Além disso, este fato foi também demonstrado algebricamente.

Outra maneira, bem simples, de verificar que $a' > \sqrt{k}$ é por meio da *desigualdade da média aritmética e da média geométrica de dois números*: Dados dois números quaisquer, r e s, temos sempre que (Veja o Apêndice 3.7).

$$\sqrt{r \cdot s} \leq \frac{1}{2}(r+s). \tag{3.24}$$

Apliquemos este resultado quando $r = a$ e $s = \frac{k}{a}$:

$$\sqrt{k} = \sqrt{a \times \frac{k}{a}} \leq \frac{1}{2}\left(a + \frac{k}{a}\right) = a'. \tag{3.25}$$

Eiminando o caso em que $a = \frac{k}{a}$, obtemos então a desigualdade estrita

$$\sqrt{k} < a'. \tag{3.26}$$

3.2 Aproximações sucessivas da raiz quadrada: O método de Hierão

Pelo que sabemos até hoje, nunca ocorreu aos mesopotâmios a idéia de repetir sucessivamente o processo discutido anteriormente a fim de obter aproximações cada vez melhores de $\sqrt{k}$. Por outro lado, esta idéia se encontra explicitamente em Hierão [6] de Alexandria.

3.2.1 O algoritmo de Hierão

Hierão, no Livro I de seu *Métricas*, re-encontrado em 1896, aproxima $\sqrt{2}$ por $\frac{1}{2}\left(a + \frac{k}{a}\right)$. Ele apresenta, no início de seu livro, diversos problemas aritméticos sobre triângulos (cálculo da área e da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são dados, área de um triângulo isósceles cujos lados são conhecidos, entre outros). No problema 8, ele apresenta sua famosa fórmula para o cálculo da área de um triângulo cujos três lados são conhecidos,

$$A = \sqrt{a(s-a)(s-b)(s-c)}, \tag{3.27}$$

na qual $s = \frac{a+b+c}{2}$ é o *semi-perímetro* do triângulo. Neste problema, Hierão apresenta, como ele próprio afirma, uma "prova geométrica" de 3.27. e aplica sua fórmula ao caso em que $a = 7$, $b = 8$ e $c = 9$. Então, ele deve calcular $\sqrt{120 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \sqrt{720}$.

Nos problemas anteriores, os números escolhidos por Hierão tinham raízes quadradas fáceis de serem calculadas: ($\sqrt{25}$, $\sqrt{64}$,$\sqrt{144}$). Isso não acontece para $\sqrt{720}$. Então, ele afirma

> Como 720 não tem lado racional, nós extrairemos o lado com uma diferença muito pequena, da maneira seguinte. Como o primeiro número quadrado maior do que 720 é 729, cujo lado é 27, divida 720 por 27, e o resultado é 26 e $\frac{2}{3}$, [7] adicione 27 e obtemos $53\frac{2}{3}$; tome a metade disso, que é igual a $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$. [8] Em verdade, $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ multiplicado por ele mesmo dá $720\frac{1}{36}$; de modo que a diferença (dos quadrados) é $\frac{1}{36}$. Se quisermos tornar esta diferença menor do que $\frac{1}{36}$, colocaremos $720\frac{1}{36}$ achado há pouco no lugar de 729 e, procedendo da mesma maneira, [9] acharemos que a diferença (sobre os quadrados) é muito menor do que $\frac{1}{36}$.

[6]Hierão foi um matemático grego, que viveu de 10 E.C. a 70 E.C. Notabilizou-se por suas realizações em mecânica.

[7]Ou seja, $27 + \frac{2}{3}$.

[8]Ou seja, $26 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

[9]Ou seja, trabalhando com o "lado" $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$.

O texto de Hierão menciona explicitamente a idéia de repetir o cálculo, a partir do valor obtido anteriormente, a fim de aproximar tanto quanto quisermos a raiz quadrada procurada. Obtemos assim, pela iteração do processo de Hierão, uma sucessão infinita, $\{a_n\}$ de números a_1, a_2, a_3, $\ldots$, tal que $lim_{n\to\infty}a_n = \sqrt{k}$. Nesta sucessão, cada termo está relacionado com o anterior por

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{k}{a_n}\right). \tag{3.28}$$

Temos assim uma sucessão definida *por recorrência*, um método poderoso para definir sucessões (Ou, equivalentemente, funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$).

Vemos que Hierão menciona seu processo iterativo sem lhe dar grande importância. Em particular, ele não fornece nenhuma indicação de como chegou a este resultado. Foi por um raciocínio geométrico, aproximando um quadrado por retângulos de mesma área? Ou se trata de um resultado já conhecido, e que pertencia ao folclore matemático da época? Simplesmente não sabemos.

De qualquer maneira, interpretaremos o algoritmo proposto por Hierão à luz dos resultados de 3.1.3 e 3.1.4. Embora não se encontre, na literatura antiga, tais análises, o método que utilizaremos não é tão anacrônico, pois ele se baseia na *média aritmética* e na *média geométrica* de dois números, familiares aos gregos antigos e que tinham grande importância na Matemática pitagórica.

O método de Hierão fornece aproximações muito boas para a raiz quadrada de um número. Tomando como exemplo $\sqrt{3}$, e fazendo $a = 1$, $k = 3$, temos,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{k}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right). \tag{3.29}$$

Então, fazendo $a_0 = a = 1$, temos

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{1}\right) = 2\\
a_2 &= \frac{1}{2}\left(2 + \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{4} = 1,75\\
a_3 &= \frac{1}{2}\left(\frac{7}{4} + \frac{3}{\frac{7}{4}}\right) = \frac{97}{56} = 1,73214285714286\\
a_4 &= \frac{1}{2}\left(\frac{97}{56} + \frac{3}{\frac{97}{56}}\right) = \frac{18817}{10864} = 1,73205081001473\\
a_5 &= \frac{1}{2}\left(\frac{18817}{10864} + \frac{3}{\frac{18817}{10864}}\right) = \frac{708158977}{408855776} = 1,73205080756888,
\end{aligned}$$

resultado correto até a décima-terceira casa decimal, obtido com apenas cinco iterações!

3.2.2 Análise do algoritmo de Hierão

Em primeiro lugar, façamos $a_0 = a$, $b_0 = \frac{k}{a}$ e definamos as sucessões $\{a_n\}$, $\{g_n\}$, $\{b_n\}$, recursivamente, como segue

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \tag{3.30}$$

$$g_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \tag{3.31}$$

$$b_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} = \frac{a_n b_n}{a_{n+1}}. \tag{3.32}$$

Assim, a_{n+1} é a *média aritmética* de a_n e b_n, g_{n+1} é a *média geométrica* de a_n e b_n e que b_{n+1} é a *média harmônica* de a_n e b_n. O Apêndice 3.7 demonstra uma desigualdade extremamente importante relacionando essas três médias.

Observe que, se $a_0 < \sqrt{k}$, então

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{k}{a_0}\right) > \sqrt{k} \Longleftrightarrow \frac{1}{4}\left(a_0^2 + \frac{k^2}{a_0^2} + 2k\right) > k \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow a_0^2 + \frac{k^2}{a_0^2} - 2k > 0 \Longleftrightarrow \left(a_0 - \frac{k}{a_0}\right)^2 > 0.$$

E então, $a_1 > \sqrt{k}$.

Se, por outro lado, $a_0 > \sqrt{k}$

$$a_1^2 = \left(\frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{k}{a_0}\right)\right)^2 = \frac{1}{4}\left(a_0^2 + \frac{k^2}{a_0^2} + 2k\right) > \frac{1}{4}\left(k + \frac{k^2}{a_0^2} + 2k\right)$$

$$a_1^2 \geq \frac{1}{4}(k+2k) = \frac{1}{4}(3k) \Longleftrightarrow a_1 > \frac{\sqrt{3k}}{2} > \sqrt{k}.$$

Portanto, independentemente de a primeira aproximação $a_0 = a$ ser menor ou maior do que $\sqrt{k}$, a segunda aproximação, a_1, será sempre maior do que $\sqrt{k}$. A fim de termos todos os elementos da sucessão $\{a_n\}$ maiores do que $\sqrt{k}$, e todos os elementos da sucessão $\{a_n\}$ menores do que $\sqrt{k}$, **suporemos, de agora em diante**, que $a_0 = a > \sqrt{k}$.

É imediato demonstrar que

Teorema 3.1. *Para todo n, $a_n > \sqrt{k}$.*

Problema 3.1. *Demonstre, que, se $a_0 = a = \sqrt{k}$, então, para todo n, $b_n < \sqrt{k}$.* (Sugestão: Use a desigualdade do Apêndice 3.7.)

Demonstraremos agora que

Teorema 3.2. *A sucessão $\{g_n\}$ é constante, e $g_0 = g_1 = \cdots = g_n \cdots = \sqrt{k}$.*

Com efeito,

$$g_{n+2} = \sqrt{a_{n+1}b_{n+1}} = \sqrt{a_{n+1}} \times \sqrt{\frac{a_n b_n}{a_{n+1}}} = \sqrt{a_n b_n} = g_{n+1}.$$

Portanto,

$$g_{n+2} = g_{n+1} = \cdots = g_2 = g_1 = g_0.$$

Assim, a sucessão $\{g_n\}$ é constante, igual a $\sqrt{k}$.

Pelo Apêndice 3.7, vemos que, para todo n, $b_{n+1} < g_{n+1} < a_{n+1}$ e, como $\{g_n\}$ é constante, igual a $\sqrt{k}$, temos que, para todo n,

$$b_{n+1} < \sqrt{k} < a_{n+1}.$$

Mostremos agora que $\{a_n\}$ é uma sucessão decrescente.

Teorema 3.3. *$\{a_n\}$ é uma sucessão decrescente, ou seja, para todo n,*

$$a_0 > a_1 > \cdots > a_n > a_{n+1} \cdots$$

Observe que, pelo Teorema 3.1,

$$a_n > \sqrt{k}.$$

Então,

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{k}{a_n}\right) = \frac{a_n^2 - k}{2a_n} > 0,$$

o que demonstra o pretendido. □

Mostraremos agora que

Teorema 3.4. *A sucessão $\{b_n\}$ é crescente.*

Pelo teorema 3.2, temos que temos que $g_{n+2} = g_{n+1}$, o que implica que $g_{n+2}^2 = g_{n+1}^2$.
Temos então que

$$b_{n-1} < b_n \iff a_{n-1}b_{n-1} < a_{n-1}b_n.$$

Mas, como $a_{n-1}b_{n-1} = a_nb_n$, segue-se que

$$b_{n-1} < b_n \iff a_nb_n < a_{n-1}b_n \iff a_n < a_{n-1}.$$

$$g^2 = a_{n-1}b_{n-1} = a_nb_n < a_{n-1}b_n \iff a_{n-1}b_{n-1} < a_{n-1}b_n \iff b_{n-1} < b_n.$$

Assim, foi demonstrado o pedido. □

Por Lima [8], (p. 86), sabemos que $\{a_n\}$ tem um limite k_1 e $\{b_n\}$ tem um limite k_2. Então

$$b_n = \frac{2a_nb_n}{(a_n + b_n)} \Longrightarrow k_2 = \frac{2k_1k_2}{(k_1 + k_2)} \iff k_1k_2 + k_2^2 = 2k_1k_2 \iff k_2(k_2 - k_1) = 0 \iff k_1 = k_2.$$

Assim, $k_1 = k_2$ e portanto $k_1 = k_2 = \sqrt{k}$.
Este algoritmo tem uma interpretação geométrica bem ilustrativa.

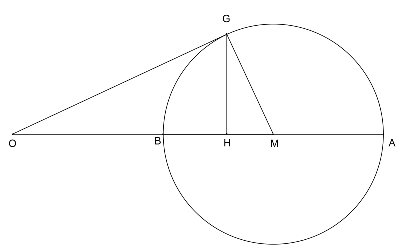

Figura 7: Interpretação geométrica do algoritmo de Hierão

Na Figura 7, sejam $OA = a$, $OB = b$, M o ponto médio do segmento AB e OG a tangente, em G, à circunferência de centro M e raio MB.

É então fácil ver que OM é a média aritmética de a e de b, OG é a média geométrica desses números e OH é sua média harmônica. Para ver isso, é suficiente tomar um sistema de eixos cartesianos com origem em O e eixo dos x ao longo de OA. Então, as coordenadas de A, B e M são, respectivamente, $(a, 0)$, $(b, 0)$ e $\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$.

A equação da circunferência de centro em M e raio BM será

$$x^2 + y^2 - (a + b)x + ab = 0. \tag{3.33}$$

A equação da reta tangente à circunferência em G e passando por O, a orígem, é da forma

$$y = tx. \tag{3.34}$$

Para achar a intersecção da reta que passa por O e G com a circunferência, resolvamos o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - (a+b)x + ab = 0 \\ y = tx \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, e exigindo que ele tenha somente uma solução, obtemos que $t = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$, e assim a equação da reta que passa por O e por G será

$$y = \frac{(a-b)}{2\sqrt{ab}}x. \tag{3.35}$$

Substituindo o valor de y dado pela equação 3.35 na equação 3.33, vemos facilmente que as coordenadas de H são

$$\left(\frac{2ab}{a+b}, 0\right).$$

Assim, OH é realmente a média harmônica de a e de b.

É fácil ver que as coordenadas de G serão

$$\left(\frac{2ab}{a+b}, \frac{\sqrt{ab}(a-b)}{a+b}\right).$$

Então, calculando a distância de $O(0,0)$ a G, vemos que OG é igual a $\sqrt{ab}$.

Fazendo $b = \frac{k}{a}$, estamos exatamente na situação do algoritmo de Hierão.

Assim, demonstramos de fato que OM é a média aritmética de A e de B, OG é a média geométrica desses números e OH é sua média harmônica.

Assim, na Figura 7, $OM = a_1$, $OH = b_1$ e $OG = g_1 = g_0 = \sqrt{k}$

Podemos repetir a construção geométrica, obtendo a Figura 8, que mostra o segundo passo do algoritmo de Hierão.

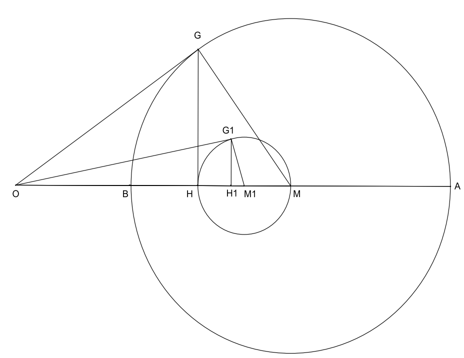

Figura 8: Interpretação geométrica do segundo passo do algoritmo de Hierão

Vemos que as sucessões M, M_1, $\ldots H$, H_1,$\ldots$ são respectivamente decrescentes e crescentes e convergem para seu valor comum $g = \sqrt{k}$.

3.3 A escada de Theon

3.3.1 A escada de Theon para a raiz quadrada de 2

Theon de Smirna (viveu em torno de 140 E.C.) apresentou um algoritmo muito simples para calcular a raiz quadrada de 2, e que pode facilmente ser generalizado para achar a raiz quadrada de qualquer número natural. Em verdade, pode ser adaptado para achar qualquer raiz de números naturais (Veja [10]).

Considere as sucessões $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ definidas recursivamente por

$$x_n = x_{n-1} + y_{n-1}, \qquad y_n = x_{n-1} + x_n.$$

Os primeiros termos da escada de Theon estão mostrados a seguir:

n	x_n	y_n
1	1	1
2	2	3
3	5	7
4	12	17
5	29	41
6	70	99
7	169	239
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Seja, para cada n, $r_n = \frac{y_n}{x_n}$. Então, repetindo os primeiros elementos da escada de Theon, acrescentados de r_n, temos

n	x_n	y_n	r_n
1	1	1	1
2	2	3	$3/2 = 1,5$
3	5	7	$7/5 = 1,4$
4	12	17	$17/12 = 1,41666\cdots$
5	29	41	$41/29 = 1,41379\cdots$
6	70	99	$99/70 = 1,41428\cdots$
7	169	239	$239/169 = 1,41420\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Parece que a sucessão $\{r_n\}$ converge para $\sqrt{2}$. Mostraremos a seguir que isso realmente acontece.

Se aceitarmos que a sucessão $\{r_n\}$ converge, é fácil de ver que seu limite é $\sqrt{2}$.

Com efeito,

$$x_n = x_{n-1} + y_{n-1}, \qquad y_n = x_{n-1} + x_n \Longrightarrow y_n = x_{n-1} + x_{n-1} + y_{n-1}.$$

Assim, $y_n = 2x_{n-1} + y_{n-1}$. Então,

$$r_n = \frac{y_n}{x_n} = \frac{2x_{n-1} + y_{n-1}}{x_{n-1} + y_{n-1}} = \frac{2 + \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}}}{1 + \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}}}.$$

Se $r_n \to r$, então, passando ao limite, temos que

$$r = \frac{2+r}{1+r} \Longrightarrow r + r^2 = 2 + r \Longrightarrow r^2 = 2.$$

Como r é positivo, teremos então que $r = \sqrt{2}$, como afirmamos.

Mostraremos agora que a sucessão $\{r_n\}$ é convergente, isto é, tem limite.

Teorema 3.5. *Sejam*

$$x_n = x_{n-1} + y_{n-1}, \qquad y_n = x_{n-1} + x_n$$

e $r_n = \frac{y_n}{x_n}$. *Então,*

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \sqrt{2}.$$

Com efeito. Em primeiro lugar, observe que, para x e y quaisquer,

$$(2x+y)^2 = y^2 = 2x^2 + 2(x+y)^2. \tag{3.36}$$

Esta identidade era conhecida dos matemáticos gregos, e ela é exatamente a formulação algébrica da proposição II.10 dos *Elementos* de Euclides.

Mostraremos agora, por indução, que $\forall n \geq 1$,

$$y_n^2 - 2x_n^2 = \pm 1.$$

É claro que isso vale para $n = 1$.

Aplicando a identidade (3.36) a x_{n-1} e a y_{n-1}, obtemos

$$(2x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2)^2 + y_{n-1}^2 = 2x_{n-1}^2 + 2(x_{n-1} + y_{n-1})^2.$$

Então,

$$y_n^2 + y_{n-1}^2 = 2x_{n-1}^2 + 2x_n^2.$$

Assim,

$$4y_n^2 - 2x_n^2 = -(y_{n-1}^2 - 2x_{n-1}^2). \tag{3.37}$$

Suponha, agora, pela hipótese de indução, que

$$y_{n-1}^2 - 2x_{n-1}^2 = \pm 1.$$

Então, por (3.37), vemos imediatamente que

$$y_n^2 - 2x_n^2 = \mp 1.$$

Mostramos, portanto, que, para todo n

$$|y_n^2 - 2x_n^2| = 1.$$

Desse resultado, decorre imediatamente que

$$|r_n^2 - 2| = \frac{1}{x_n}.$$

Como $\{x_n\}$ é obviamente uma sucessão estritamente crescente de números naturais, vemos que

$$\lim_{n\to\infty} r_n^2 = 2 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} r_n = \sqrt{2}.$$

□

Generalizaremos agora a escada de Theon para obter a raiz quadrada de qualquer número natural, como feito em [4] e em [10].

3.3.2 A escada de Theon para raízes quadradas de números positivos maiores do que 1

Seja c um número racional qualquer, maior do que 1. Defina, analogamente ao que foi feito em (3.3.1), as sucessões $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ por recorrência:

$$x_n = x_{n-1} + y_{n-1}, \qquad y_n = x_n + (c-1)x_{n-1}. \tag{3.38}$$

Então, é imediato ver que $y_n = cx_{n-1} + y_{n-1}$. Seja, mais uma vez, a sucessão $\{r_n\}$ definida por $r_n = \frac{y_n}{x_n}$. Se aceitarmos que $\{r_n\}$ converge para r, então, $r = \sqrt{c}$. Com efeito,

$$r_n = \frac{y_n}{x_n} = \frac{cx_{n-1} + y_{n-1}}{x_{n-1} + y_{n-1}} = \frac{c + \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}}}{1 + \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}}} = \frac{c + r_{n-1}}{1 + r_{n-1}}.$$

Se $r_n \to r$, então

$$\frac{c + r_{n-1}}{1 + r_{n-1}} \to \frac{c + r}{1 + r},$$

ou seja,

$$r = \frac{c + r}{1 + r} \Longrightarrow r = \sqrt{c}.$$

Mostraremos agora que a sucessão $\{r_n\}$ realmente converge. Para isso, necessitamos de dois lemas preparatórios.

Lema 3.1. *Se as sucessões $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ estão definidas como em* (3.38)*, então*

$$y_n + \sqrt{c}x_n = (1+\sqrt{c})^n \quad e \quad y_n - \sqrt{c}x_n = (1-\sqrt{c})^n \tag{3.39}$$

Demonstraremos este lema usando indução.

Ele é obviamente verdadeiro quando $n = 1$. Suponhamos que seja válido para um inteiro N e mostremos, então, que será obrigatoriamente verdadeiro para o inteiro $N+1$.

Ora

$$(1+\sqrt{c})^{N+1} = (1+\sqrt{c})^N(1+\sqrt{c}) = (y_N + \sqrt{c}x_N)(1+\sqrt{c}) = (cx_N + y_N) + \sqrt{c}(x_N + y_N), \tag{3.40}$$

pela hipótese de indução.

Por (3.38), $x_{N+1} = x_N + y_N$, e portanto

$$(1+\sqrt{c})^{N+1} = (cx_N + y_N) + \sqrt{c}x_{N+1} \tag{3.41}$$

Além disso, pela definição de $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, temos que

$$cx_N + y_N = (c-1)x_N + x_N + y_N = (c-1)x_N + x_{N+1}.$$

Então, de (3.41) obtemos

$$(1+\sqrt{c})^{N+1} = y_{N+1} + \sqrt{c}x_{N+1},$$

e assim fica demonstrado o que queríamos. A demonstração de que $y_n - \sqrt{c}x_n = (1-\sqrt{c})^n$ é inteiramente análoga

$\square$

Lema 3.2. *Para todo* $n \geq 3$*,*

$$x_n = 2x_{n-1} + (c-1)x_{n-2}. \tag{3.42}$$

Com efeito, (3.38) mostra que $y_{n-1} = x_{n-1} + (c-1)x_{n-2}$. Assim,

$$x_n = x_{n-1} + y_{n-1} = x_{n-1} + x_{n-1} + (c-1)x_{n-2} = 2x_{n-1} + (c-1)x - n - 2.$$

$\square$

Podemos agora demonstrar

Teorema 3.6. *A sucessão* $\{r_n\}$ *converge para* $\sqrt{c}$*.*

Com efeito, da segunda parte de (3.39), obtemos

$$\left|\frac{y_n}{x_n} - \sqrt{c}\right| = \frac{(\sqrt{c}-1)^n}{x_n}.$$

Mas, (3.42) mostra que $x_n > (c-1)x_{n-2}$. Então,

$$x_n > (c-1)^2 x_{n-4},$$

$$x_n > (c-1)^3 x_{n-6},$$

$$\dots$$

$$x_{2n} > (c-1)^n,$$

$$x_{2n+1} > (c-1)^n.$$

Assim, para n par,

$$\left|\frac{y_{2n}}{x_{2n}} - \sqrt{c}\right| = \frac{(\sqrt{c}-1)^{2n}}{x_{2n}} < \frac{(\sqrt{c}-1)^{2n}}{(c-1)^n} = \left(\frac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}+1}\right)^n,$$

e, para n impar,

$$\left|\frac{y_{2n+1}}{x_{2n+1}} - \sqrt{c}\right| = \frac{(\sqrt{c}-1)^{2n+1}}{x_{2n+1}} < \frac{(\sqrt{c}-1)^{2n+1}}{(c-1)^n} = \left(\frac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}+1}\right)^n,$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}+1}\right)^n = 0,$$

segue-se, em ambos os casos, que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \sqrt{c}.$$

$\square$

O algoritmo de Theon pode ser generalizado para achar raízes arbitrárias de números racionais, como mostrado em [10].

O algoritmo de Theon para achar raízes quadradas é bem eficiente, e de uso extremamente simples, se comparado, por exemplo, com o algoritmo usual para achar raízes quadradas. Asim, por exemplo, calculemos $\sqrt{5}$, usando a escada de Theon. Lembremos que $\sqrt{5} \approx 2,236067977$, exato até a nona casa decimal.

Façamos $x_1 = y_1 = 1$ e

$$x_n = x_{n-1} + y_{n-1},$$

$$y_n = x_n + 4x_{n-1}.$$

Temos então

n	x_n	y_n	r_n
1	1	1	1
2	2	6	3
3	8	16	2
4	24	56	$2,333333\ldots$
5	80	176	$2,20$
6	256	576	$2,25$
7	832	1856	$2,230769231$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Se prosseguirmos desta maneira, em vinte passos chegaremos a $r_{20} = 2,236067970$, resultado exato até a oitava casa decimal.

Como é que os gregos chegaram ao algoritmo apresentado por Theon para calcular $\sqrt{2}$? Não sabemos. Há várias hipóteses. A interpretação do historiador da Matemática van der Waerden é a seguinte (Veja ([12]).

Platão, em seu *Rebública* afirma que 7 é "a diagonal racional" que corresponde ao lado 5. Proclus explica o que são números diagonais e números lados, conceitos que ele afirma virem dos pitagóricos.

> Sendo a fonte de todos os números, a unidade é potencialmente um lado e uma diagonal. Ora, tomemos duas unidades, uma lateral e uma diagonal; então um novo lado é formado adicionando a unidade diagonal à unidade lateral, e uma nova diagonal, adicionando duas vezes a unidade lateral à unidade diagonal.

Então, continuamos analogamente. De maneira geral, chamando de a_n o n-ésimo "número lado" obtido e de d_n o n-ésimo "número diagonal", teremos as fórmulas de recorrência que já conhecemos, $a_{n+1} = a_n + d_n$ e $d_{n+1} = 2a_n + d_n$.

Na Figura 9, AC é a diagonal do quadrado de lado $a = AB = BC$, e tomamos $b = CD = CB$. De D, traçamos DE perpendicular a AC. Então, $AD = DE = EB$.

Sejam $b' = a - a'$ e $a' = b - a'$. Então,

$$a = a' + b' \qquad b = 2a' + b', \tag{3.43}$$

que são análogas a nossas relações de recorrência.

O processo pode ser repetido no quadrado de lado AD, e assim sucessivamente, obtendo $a'', a''', \ldots, b'', b''', \ldots$, como fizemos. Assim, a e b podem ser escritos, usando (3.43), em termos dos sucessivos números lados e diagonais. Portanto, os gregos já estavam familiarizados com recorrências exatamente do tipo que utilizamos na escada de Theon.

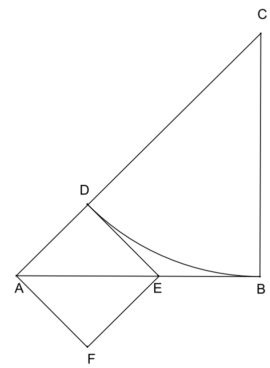

Figura 9: O processo de subtrações sucessivas

3.4 Raízes quadradas na Índia

Em torno de 800-600 a.E.C., foram escritos, na India, os *Sulbasutras*, que eram

textos religiosos. Eles forneciam instruções cuidadosas de como construir altares para os rituais religiosos (A palavra *sulba* significa corda, pois as dimensões eram medidas com cordas).

Nos *Sulbasutras* encontramos um método para calcular $\sqrt{2}$: [10]

> Aumente o comprimento de um terço, e este terço de seu próprio quarto menos a trigésima-quarta parte deste quarto.

Em nossa notação moderna, esta instrução para calcular aproximadamente $\sqrt{2}$ escreve-se como segue

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} \tag{3.44}$$

Efetuando essas operações, obtemos $\frac{577}{408}$. Um valor aproximado com dez casas decimais para esse número é $1,414215686$. O valor aproximado para $\sqrt{2}$, também com dez casas decimais, é $1,414213562$. Vemos portanto que o erro cometido é menor do que 10^{-5}.

Joseph ([6]) propõe a seguinte explicação para o método utilizado pelos hindus. A idéia básica é tomar dois quadrados de áreas iguais a 1 e tentar formar com eles um quadrado de área 2 (Figura 10).

Começamos com dois quadrados congruentes, cujas áreas são iguais a 1, $ABCD$ e $PQRS$.

Dividimos o quadrado $PQRS$ em três retângulos congruentes, com os lados maiores paralelos a PS. Os dois primeiros, designados por 1 e 2, são colocados ao lado do quadrado $ABCD$, como mostrado na Figura 10.

É fácil de ver que o terceiro retângulo pode ser decomposto em três quadrados congruentes. Um deles, designado por 3, é transportado para a figura da esquerda, como mostrado.

O que resta do terceiro retângulo é então dividido nos retângulos 4, 5, ..., 10 e 11, que são colocados na figura da esquerda, como mostrado.

Assim, o quadrado $ABCD$ foi transformado no quadrado $AEFG$, cujo lado é igual a

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = 1\frac{5}{12}. \tag{3.45}$$

A área do quadrado $AEFG$ é maior do que 2, pois o pequeno quadrado destacado na figura da esquerda não provém do quadrado $PQRS$. A área deste pequeno quadrado é igual a $\left(\frac{1}{3\cdot 4}\right)^2$. Para termos uma área igual a duas vezes a área de $PQRS$, eliminaremos pequenas faixas ao longo de AE e de AG, de maneira a obter uma área igual a 2.

Seja x a largura de cada uma destas pequenas faixas. A soma de suas áreas será

[10] É possível que isso servisse para calcular as dimensões de um altar duas vezes maior do que outro.

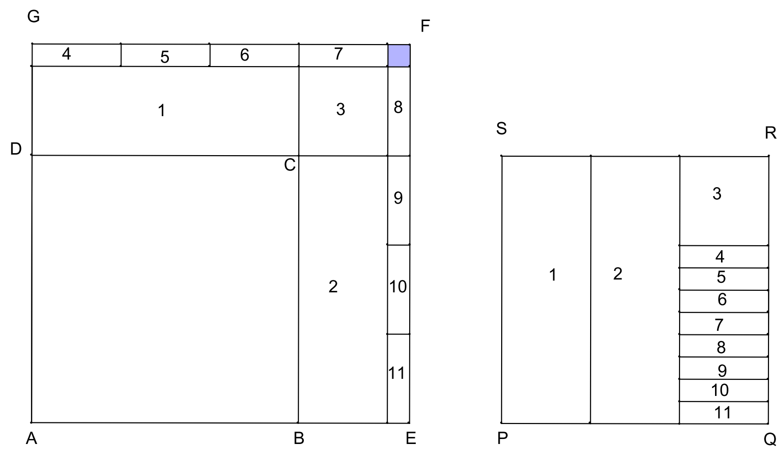

Figura 10: Interpretação geométrica do algoritmo hindu

$$2x\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}\right)-x^2. \tag{3.46}$$

Queremos que esta área eliminada seja igual à área do pequeno quadrado. Assim

$$2x\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}\right)-x^2=\left(\frac{1}{3\cdot 4}\right)^2. \tag{3.47}$$

Desprezando o termo x^2, teremos que

$$2x\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}\right)\approx\frac{1}{3\cdot 4}\times\frac{1}{3\cdot 4}. \tag{3.48}$$

$$2x\left(\frac{17}{3\cdot 4}\right)\approx\frac{1}{3\cdot 4}\times\frac{1}{3\cdot 4}. \tag{3.49}$$

$$x\approx\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34}. \tag{3.50}$$

Katz, [7], propõe outra interpretação para a aproximação (3.44). Ele parte de 3.45, ou seja de $1\frac{5}{12}$ e lhe aplica o método mesopotâmico, obtendo diretamente a aproximação hindu:

$$\frac{17}{12}-\frac{(\frac{17}{12})^2-2}{2\cdot\frac{17}{12}}=\frac{17}{12}-\frac{\frac{1}{144}}{\frac{34}{12}}=\frac{17}{12}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34}. \tag{3.51}$$

3.5 O algoritmo chinês da raiz quadrada

Voltamos agora nosso olhar para a China.

O algoritmo para extração da raiz quadrada, ensinado até há pouco tempo em nossas escolas, é bem antigo, pois já era conhecido na China, o que se pode verificar no *Nove capítulos sobre a arte matemática*. Escrita na dinastia Han (206 a.E.C.- 220 E.C), esta obra, provavelmente dos primeiros anos da E.C, é uma compilação dos conhecimentos matemáticos elaborados no milênio anterior. Semelhantemente com o que aconteceu no Egito antigo e na Mesopotâmia, o livro apresenta os resultados sumariamente, sob a forma de problemas, com os procedimentos necessários para achar as respostas. No entanto, ao longo dos séculos, foram feitos muitos comentários sobre os *Nove capítulos*, dos quais usaremos os feitos por Liu Hui (263 E.C.), que fornecem uma explicação geométrica bem clara do método proposto no *Nove capítulos* para a extração de raízes quadradas.

3.5.1 Interpretação geométrica do algoritmo

Vejamos como funciona o algoritmo chinês para a extração de raízes quadradas e o interpretemos geometricamente, seguindo Liu Hui. Exemplificaremos o algoritmo calculando $\sqrt{55225}$, que é o problema 12 do Capítulo 4 do *Nove capítulos.* O fato de que este número é um quadrado perfeito, não prejudica a compreensão do método, uma vez que o algoritmo "constrói" a raiz quadrada algarismo por algarismo. Assim, a discussão feita a seguir funciona igualmente para a raiz quadrada de um número qualquer. Aliás, Liu Hui menciona isso explicitamente, quando afirma que a raiz quadrada pode ser calculada além da unidade, "na parte decimal". Ele afirma que os algarismos obtidos sucessivamente são considerados numeradores, enquanto que os denominadores são 10, 100, ..., e deixa claro que quanto mais algarismos decimais forem obtidos, mais "finas" serão as frações correspondentes, de maneira que, embora o quadrado inicial não tenha sido completamente esgotado, a parte negligenciada se torna tão pequena que "não vale a pena mencioná-la".

Semelhantemente aos mesopotâmios e aos hindus, Liu Hui interpreta a extração da raiz quadrada como achar o lado de um quadrado cuja área é conhecida. No entanto, em vez de decompor o quadrado como os mesopotâmios e hindus, ele utiliza uma decomposição paralela à representação decimal do número cuja raiz quadrada queremos calcular.

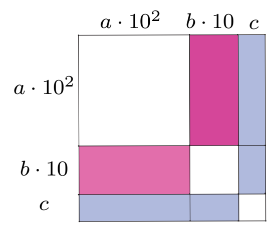

Figura 11: Interpretação geométrica do algoritmo chinês

A Figura 11 é realmente de Liu Hui, que emprega cores para tornar claros os passos sucessivos do algoritmo. Ela deve ser lida passo a passo, em etapas, enquanto se tenta "esgotar"o quadrado de área dada por quadrados cada vez maiores.

A primeira observação importante é que $\sqrt{55225}$ é um número em cuja representação decimal figuram três algarismos. Isso se vê facilmente examinando o número de algarismos de potências sucessivas de 10. Assim, $\sqrt{55225}$ se escreve como $a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$, ou, ainda, abc.

Dividiremos nossa análise em três etapas, correspondentes a cada um dos algarismos a, b e c.

Primeira etapa – o algarismo das centenas

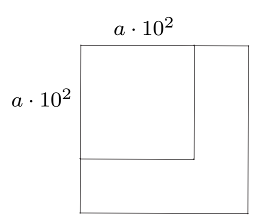

Figura 12: Primeira etapa – o algarismo das centenas

Em primeiro lugar, devemos achar o algarismo das centenas, a, que seja tal que o maior quadrado de lado $a \cdot 10^2$ esteja contido no quadrado de lado 55225, ou seja, que

$$\left(a \cdot 10^2\right)^2 \leq 55225. \tag{3.52}$$

É fácil ver que, então, $a = 2$. Assim, temos um quadrado de lado 200 orlado por um gnomon de área $55225 - 200^2 = 15225$.

Segunda etapa – o algarismo das dezenas

Nesta etapa, devemos determinar o algarismo das dezenas, b, que seja o maior possível para que dois retângulos de lados 200 e $b \cdot 10$ mais um quadrado de lado $b \cdot 10$ tenha área menor do que o gnomon de área 15225 (Veja a Figura 12), ou seja,

$$2 \cdot 200 \cdot b \cdot 10 + (b \cdot 10)^2 \leq 15225. \tag{3.53}$$

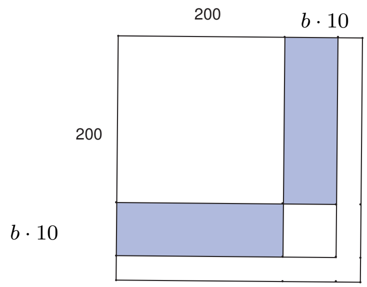

Figura 13: Segunda etapa – o algarismo das dezenas

Como $2 \cdot 200 \cdot 3 \cdot 10 + (3 \cdot 10)^2 = 12900$ e $2 \cdot 200 \cdot 4 \cdot 10 + (4 \cdot 10)^2 = 17600$ vemos que $b = 3$. Assim, temos um quadrado de lado 230 orlado por um gnomon de área $55225 - 230^2 = 2325$.

Terceira etapa – o algarismo das unidades

$$2 \cdot 230 \cdot c + c^2 \leq 2325. \tag{3.54}$$

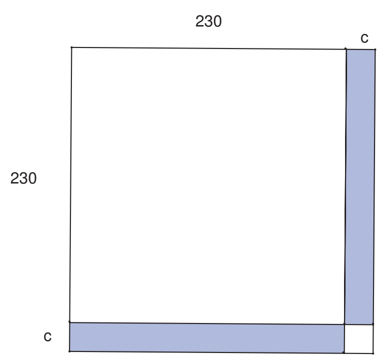

Figura 14: terceira etapa – o algarismo das unidades

Devemos, agora, achar o algarismo das unidades, c, que seja o maior possível de maneira que dois retângulos de lados 230 e c mais um quadrado de lado c estejam contidos no gnomon de área 2325, ou seja,

Resolvendo esta inequação, vemos que $c = 5$, que corresponde á igualdade, e assim $\sqrt{55225} = 235$

Desejamos enfatizar uma diferença essencial entre este algoritmo e os anteriormente estudados: Agora, cada passo do algoritmo fornece, sucessivamente, em ordem decrescente, um dos algarismos da representação decimal de $\sqrt{k}$. No exemplo com que trabalhamos, obtivemos, sucessivamente, 200, 230 e 235.

Disposição prática do algoritmo

Até há poucos anos atrás, ensinava-se, no Ensino Basicoo, um algoritmo para achar a raiz quadrada de um número. Em geral, este algoritmo era apresentado como um certo número de passos a serem efetuados, sem qualquer justificação. Na maioria dos livros didáticos não se encontrava, também, justificativa para o algoritmo. Veremos, agora, que este algoritmo é simplesmente uma disposição cômoda dos passos que acabamos de descrever.

Etapa 0 – O número de algarismos da raiz quadrada

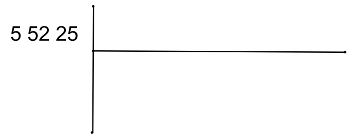

Figura 15: Etapa 0 – O número de algarismos da raiz quadrada

Inicialmente, dividimos a parte inteira do número cuja raiz quadrada desejamos achar em blocos de dois algarismos, da direita para a esquerda. Se o número tiver um parte decimal, fazemos a mesma coisa, da esquerda para a direita, a partir da vírgula decimal.

No nosso caso, a raiz quadrada de 55225 será composta por três algarismos em sua parte inteira.

Etapa 1 – O algarismo das centenas

Procuramos o maior número a tal que $a^2 \leq 5$. Então, $a = 2$. Elevamos a ao quadrado $2 \times 2 = 4$ e subtraimos o resultado (4) de 5, obtendo 1.

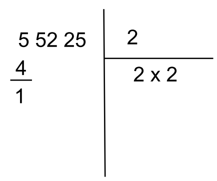

Figura 16: Etapa 1 – O algarismo das centenas

Etapa 2 – O algarismo das dezenas

"Baixemos" o bloco seguinte (52), e cortamos o produto 2×2, que não nos serve mais e duplicamos o 2, para obter 4.

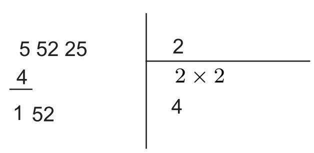

Figura 17: Etapa 2 – O algarismo das dezenas

Procuramos, agora, o maior número b que $4b$, [11] multiplicado por b, seja menor do que 152. Ou seja, queremos que $(2 \cdot 20 + b) \cdot b \leq 152$. Resolvendo esta inequação, obtemos $b = 3$. Então, $43 \times 3 = 129$, que subtraímos de 152, com resto 23.

Etapa 3 – O algarismo das unidades

"Baixemos" o bloco seguinte 25, e eliminemos o produto 43×3. Em seguida, multipliquemos 23 por 2, obtendo 46.

Procuramos agora o maior número c tal que $46c$ multiplicado por c é menor do que 2325. Ou seja, queremos que $(2 \cdot 230 + c) \cdot c \leq 2325$.

Resolvendo esta inequação, obtemos que $c = 5$. Então, $465 \times 5 = 2325$, de modo que o resto é nulo, e a raiz quadrada foi encontrada, na parte superior direita do algoritmo.

[11] Não estamos fazendo $4 \cdot b$, mas sim colocando b à direita de 4.

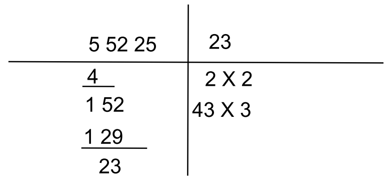

Figura 18: Etapa 2 – O algarismo das dezenas

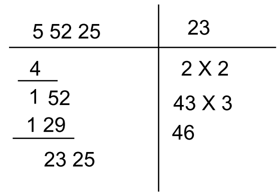

Figura 19: Etapa 3 – O algarismo das unidades

3.6 Interpretação algébrica do algoritmo chinês

Agora, interpretaremos algebricamente o algoritmo chinês, que é exatamente o algoritmo usado até há pouco tempo em nossas escolas. Do ponto de vista algébrico, o algoritmo pode ser interpretado como a utilização, repetidas vezes, da identidade

$$(r+s)^2 = r^2 + (2rs + s^2) \tag{3.55}$$

Vejamos como funciona algebricamente o algoritmo. Para isso, usaremos exatamente o mesmo exemplo da seção 3.5.1 – 55225.

O algarismo das centenas

Para acharmos a, o algarismo das centenas, usamos novamente $(a \cdot 10^2)^2 \leq 55225$, agora interpretada algebricamente, e não mais geometricamente. Se $\sqrt{55225} = abc = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$, então, procuramos o maior a tal que $(a \cdot 10^2)^2 \leq 55225$.

O algarismo das dezenas

Usaremos e identidade (3.55) aplicada a $100 \cdot a$ e a $10 \cdot b$:

$$(200 + b \cdot 10)^2 = 200^2 + \{2 \cdot 200 \cdot b \cdot 10 + (b \cdot 10)^2\} \tag{3.56}$$

Ora, nesta igualdade, a parte do lado direito que está entre colchetes $\{2 \cdot 200 \cdot b \cdot 10 + (b \cdot 10)^2\}$ é exatamente o lado esquerdo da desigualdade (3.53). Mas

$$2 \cdot 200 \cdot b \cdot 10 + (b \cdot 10)^2 = (2 \cdot 200 + b \cdot 10) \cdot b \cdot 10 \tag{3.57}$$

Assim, procuramos o maior b tal que

$$(2 \cdot 200 + b \cdot 10) \cdot b \cdot 10 \leq 15225. \tag{3.58}$$

Achamos $b = 3$.

O algarismo das unidades

Para encontrar o valor de c, o algarismo das unidades, usaremos mais uma vez a identidade (3.55). Neste caso, ela se torna

$$(230 + c)^2 = 230^2 + (2 \cdot 230 \cdot c + c^2) = 230^2 + (2 \cdot 230 + x) \cdot c. \tag{3.59}$$

Uma outra interpretação para o algoritmo chinês, o qual acabamos de apresentar e justificar, encontra-se em [11].

5 52 25	235
4	2 X 2
1 52	43 X 3
1 29	465 X 5
23 25	
23 25	
00	

Figura 20: Etapa 3 – O algarismo das unidades

3.7 Um novo ponto de vista: A raiz quadrada como zero de uma função – O método de Newton

É freqüente, em Matemática, mudanças de ponto de vista, de interpretação. Assim, por exemplo, o número π durante muito tempo foi visto como a razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência, que é seu significado geométrico, sua origem. Mais tarde, a partir do século XVII, passou a ser visto como uma série ou um produto infinito, o que permitiu desenvolver, progressivamente, técnicas e algoritmos poderosos para estudar π. Assim, por exemplo, no século XIX foi possível provar que π é um número transcendente, e portanto irracional.

Nas páginas anteriores, interpretamos o problema de calcular $\sqrt{k}$ geometricamente, achar o lado de um quadrado cuja área é conhecida.

Um outro enfoque possível é o seguinte. Achar $\sqrt{k}$ é procurar um número x tal que $x^2 = k$, ou ainda, tal que $x^2 - k = 0$. Isso nos leva a considerar a função $y = f(x) = x^2 - k$ e a procurar seus zeros, ou seja, os pontos em que ela se anula. Geometricamente, embora em outro contexto, isso significa procurar os pontos em que o gráfico de $y = f(x) = x^2 - k$ corta o eixo dos x.

Este enfoque para o cálculo de raízes quadradas foi introduzido por Newton, em torno de 1670, e logo depois simplificado por Joseph Raphson, em 1690, que introduziu a fórmula de iteração hoje empregada.

Seja $y = f(x)$ uma função duas vezes derivável, isto é, existem as derivadas $f'(x)$ e $f''(x)$ de $y = f(x)$.

Suponha que foi possível achar um intervalo $[c, d]$ no qual se encontra o zero procurado de $f(x) - k$. No caso que nos interessa, no qual $f(x) = x^2 - k$, isso não apresenta dificuldades. É suficiente achar o maior quadrado menor do que $\sqrt{k}$ e o menor quadrado maior do que $\sqrt{k}$.

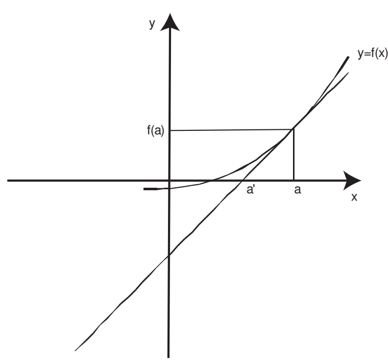

Figura 21: O método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson consiste em partir de um valor arbitrário a, "próximo" de $\sqrt{k}$ e tomar como aproximação da raiz a intersecção a' da tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 - k$ com o eixo dos x (Figura 21).

No caso mostrado na Figura 21 realmente a' está mais próximo de $\sqrt{k}$ do que a. Isso nem sempre acontece.

Achemos a intersecção da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ e que passa pelo ponto $(a, f(a))$.

O coeficiente angular dessa reta será igual a $f'(a)$. Além disso, sabemos que a reta tangente passa pelo ponto

$(a, f(a))$. Assim, a equação da reta tangente será

$$y - f(a) = f'(a)(x - a). \tag{3.60}$$

Quando $x = a'$, $y = 0$. Assim, obtemos que

$$-f(a) = f'(a)(a' - a). \tag{3.61}$$

Desta igualdade, obtemos imediatamente que

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}. \tag{3.62}$$

Se repetirmos este processo, com valor inicial agora igual a a', obtemos uma sucessão a_1,a_2, a_3, $\ldots$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (Fizemos $a = a_1$, $a' = a_2$). Com esta notação, que mostra bem o caráter recorrente do processo, podemos escrever

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}. \tag{3.63}$$

Se aplicarmos este processo à função $y = f(x) = x^2 - k$, obtemos

$$a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2 - k}{2a_n} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{k}{a_n}\right). \tag{3.64}$$

Vemos assim ressurgir o processo empregado na Mesopotâmia e por Hierão.

É interessante observar a eficiência deste processo. De maneira geral, dada uma função $y = f(x)$, para a qual estamos aproximando o zero $\overline{x}$, então o método de Newton-Raphson converge quadraticamente. Isto é, se $e_{n+1} = x_{n+1} - \overline{x}$ é o erro cometido no $n+1$-ésimo passo do processo, então e_{n+1} é função do quadrado de e_n, o erro no passo anterior.

Referências

[1] AABOE, Asger. *Episodes from the early history of mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1964.

[2] AABOE, A. *Episódios da história antiga da Matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1997.

[3] DESCARTES, René. *The Geometry of René Descartes with a facsimile of the first edition*. Translated from the French and Latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham. New York: Dover, 1954.

[4] GIBERSON, Shaun and Thomas J. OSLER. Theon's ladder to any square root. *The college mathematics journal*. Vol 35, N. 3 (May 2004), pp. 222-226.

[5] HODGSON, Bernard R. Coups d'oeils à saveur historique sur l'extraction de racine carrée. *Bulletin de l'AMQ*,vol. XLVI, 2, 2006, pp 18-49.

[6] JOSEPH, George Gheverghese. *The crest of the peacock*: *Non-European roots of mathematics*. New York: Penguin Books, 1992.

[7] KATZ, Victor. *A history of mathematics*: *an introduction*. (2^{nd} ed.) New York: Addison-Wesley, 1998.

[8] LIMA, Elon Lages. *Curso de análise*, vol 1. Rio de Janeiro: IMPA, 1976. Projeto Euclides.

[9] NEUGEBAUER, Otto. *The exact sciences in antiquity*. New York: Dover, 1969.

[10] OSLER, T. J., Marcus WRIGHT and Michal ORCHARD. Theon's ladder for any root. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, vol 36, N. 4, 2005, pp. 389-398.

[11] TURGEON, Jean M. Racines carrées, racines cubiques. *Bulletin de l'AMQ*,vol. XLVI, 2, 2006, pp 27-40.

[12] van der WAERDEN,B. L. *Science awakening*.Gronigen: P. Noordhoff, 1954.

Apêndice 1 – Demonstração do Teorema 2.4

Demonstraremos agora o resultado que usamos no Teorema 2.3.

Repetimos o enunciado do teorema 2.4: Sejam a e b números naturais tais que $d = (a, b)$. Existem então números inteiros x e y tais que $d = ax + by$.

Com efeito, sejam a e b números naturais. Consideremos o conjunto

$$I = \{ax + by \,|\, x, y \in \mathbb{Z}\}. \tag{3.65}$$

Os elementos de I são todos os números formados multiplicando a por um número inteiro arbitrário x, b por outro número inteiro arbitrário y, e somando os resultados.

Afirmamos que I é formado por todos os múltiplos (positivos e negativos) do máximo divisor comum d de a e b.

Mostraremos, inicialmente, duas propriedades de I necessárias para a demonstração:

1. – A soma (ou diferença) de dois elementos de I é um elemento de I.

2. – O produto de um elemento de I por um número inteiro qualquer é também um elemento de I.

Demonstração de 1. De fato, sejam k e t elementos de I. Então, pela definição de I, temos que existem inteiros u e v tais que $k = ua + vb$. Semelhantemente, existem inteiros r e s tais que $t = ra + sb$. Então,

$$k \pm t = (ua + vb) \pm (ra + sb) = (u \pm r)a + (c \pm s)b. \tag{3.66}$$

Assim, pela definição de I, vemos que $k \pm t \in I$.

A demonstração de 2 não apresenta dificuldades e é deixada ao leitor.

Observe agora que o conjunto I é não-vazio, pois fazendo $x = 1$ e $y = 0$ vemos que $a \in I$ (Mostra-se analogamente que $b \in I$). Além disso, I contém um elemento positivo, por exemplo a.

Consideremos o subconjunto I_+ de I formado por todos os elementos positivos de I. Como I_+ é não-vazio, o princípio da boa ordenação nos garante que I_+ possui um menor elemento, que chamaremos de d.

Afirmamos que todos os elementos de I são múltiplos de d e que d é o máximo divisor comum de a e b.

Com efeito, seja k um elemento qualquer de I. Então, pelo algoritmo da divisão, podemos escrever que $k = q \times d + r$, com $0 \le r < d$. Se $r = 0$, nada há a demonstrar. Suponha portanto que $r \neq 0$.

Ora, como $d \in I$,então, pela segunda propriedade mostrada acima $qd \in I$. Como $k \in I$, a primeira propriedade mostra que $k - qd = r \in I$, o que é uma contradição, pois $0 < r < d$ e d é o *menor* elemento positivo de I. Assim, $r = 0$ e portanto, mostramos que qualquer elemento de I é múltiplo de d.

Resta-nos agora mostrar que d é o máximo divisor comum de a e de b.

Como $a, b \in I$, pelo que mostramos acima a e b são múltiplos de d, ou, equivalentemente, d é divisor de a e de b, é um *divisor comum* dos dois números. Seja k um divisor comum qualquer de a e de b. Mostraremos que k divide d.

Em primeiro lugar, se k divide a, então k divide ax, qualquer que seja o número inteiro x. Analogamente, qualquer que seja o número inteiro y, k dividirá by. Mas então, quaisquer que sejam os números inteiros x e y, k dividirá $ax + by$.

Como $d \in I$, sabemos, pela própria definição de I, que existem dois números inteiros, r e s tais que $d = ar + bs$. Mostramos portanto, pelo exposto no parágrafo anterior, que k divide $ar+bs$, ou seja, k divide d. Assim, mostramos que d é um divisor comum de a e b e que d é múltiplo de qualquer divisor comum de a e b.

Como essa é exatamente a definição do máximo divisor comum de a e b, mostramos que d é o máximo divisor comum de a e b.

Apêndice 2 – A desigualdade média aritmética > média geométrica > média harmônica

Teorema 3.7. *Sejam x e y dois números positivos tais que $x > y$. Então*

$$\frac{x+y}{2} > \sqrt{xy} > \frac{2xy}{x+y}.$$

Com efeito, temos que

$$\frac{x+y}{2} > \sqrt{xy} \Longleftrightarrow \frac{x^2+y^2+2xy}{4} > xy \Longleftrightarrow x^2+y^2-2xy = (x-y)^2 > 0,$$

o que demonstra que

$$\frac{x+y}{2} > \sqrt{xy}.$$

Além disso,

$$\sqrt{xy} > \frac{2xy}{x+y} \Longleftrightarrow xy > \frac{4x^2y^2}{x^2+y^2+2xy} \Longleftrightarrow xy(x^2-y^2) > 0,$$

o que demonstra que

$$\sqrt{xy} > \frac{2xy}{x+y}.$$

□