Proposta de Minicurso para a V Bienal de Matemática

Classificação das Superfícies Quádricas sobre o Plano - Uma Aplicação de Operadores Lineares e Autovalores

Prof. Dr. Inocêncio Fernandes Balieiro Filho
UNESP – Ilha Solteira
Prof. Dr. Marcelo Reicher Soares
UNESP – Bauru

Resumo

Uma das dificuldades dos alunos é, dada uma equação na forma quadrática, determinar a cônica que ela representa. Na disciplina de Geometria Analítica são estudadas as curvas de segunda ordem cuja equação pode ser transformada em uma outra, chamada Forma Canônica, por meio de uma mudança no sistema de coordenadas. Tal procedimento utiliza ferramentas sofisticadas de Álgebra Linear. Dessa forma, os objetivos do minicurso proposto são facilitar a identificação da cônica associada a um polinômio de grau 2 em duas variáveis, por meio da observação dos sinais dos autovalores associados a uma transformação linear, e relacionar as formas quadráticas com os operadores lineares. Além disso, será discutido o desenvolvimento histórico dessas teorias e o modo como as formas quadráticas foram relacionadas a um padrão algébrico, aos determinantes e aos autovalores.

Estudo das Curvas de Segunda Ordem

1. Redução da equação geral de uma curva de segundo grau à forma canônica

Definição 1
Dado um sistema de coordenadas retangulares x e y no plano, denomina-se curva do *segundo grau* ou, simplesmente, *cônica*, o lugar geométrico dos pontos cujas coordenadas satisfazem uma equação da forma

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0$$

Definição 2
Uma aplicação linear A de um espaço euclidiano E denomina-se *ortogonal* quando $(A(x), A(y)) = (x, y)$ para todos os x e y de E.

Proposição 1
Toda aplicação linear que transforma ao menos uma base ortonormal em uma base ortonormal é ortogonal.

Proposição 2
Seja E um espaço euclidiano e seja $C = [c_{ik}]$ a matriz de mudança de uma base ortonormal e_1, e_2, ..., e_n por outra base, também ortonormal, e'_1 , e'_2 , ..., e'_n. Desse modo, C é uma matriz ortogonal.

Proposição 3
O polinômio característico de uma aplicação linear A não depende da escolha da base.
Considere no plano um sistema cartesiano retangular de coordenadas e considere a equação geral de segundo grau

$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0$ (1)

A equação (1), para alguns valores determinados dos coeficientes, representa uma *elipse*, uma *hipérbole ou* uma *parábola*.

Desse modo, demonstra-se que a *equação* (1) é sempre a equação de uma dessas curvas descritas acima, sem considerar os casos degenerados, ou seja, as ocorrências de um *par de retas que se intersectam* ou um *par de retas paralelas ou coincidentes* ou *um ponto* ou de *um conjunto vazio*.

Indique por e_1, e_2 os vetores unitários dos eixos do sistema de coordenadas proposto. O grupo dos termos principais $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ (2) da equação (1) pode ser considerado como uma forma quadrática das coordenadas x e y do vetor (x, y). Conforme a proposição 2, essa forma quadrática se reduz em uma base e'_1 , e'_2, também ortonormal, à soma de quadrados $\lambda^2x'^2 + \lambda 2y'^2$ (3), donde λ_1 e λ_2 são os valores próprios da matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix},$$

(4) e e'_1 , e'_2 são vetores próprios que os correspondem. Suponha que o vetor e_1' se obtém do vetor e_1 mediante um giro de ângulo φ em sentido oposto ao do movimento dos ponteiros de um relógio. Posto que o vetor e_2 é ortogonal a e_1 e o vetor e'_2 é ortogonal a e'_1 , resulta que vetor e'_2 se obtém do vetor e_2 ou por um giro de ângulo φ ou por um giro de ângulo φ seguido de simetria com respeito à origem de coordenadas. Num segundo caso, substitui-se e_2 pelo vetor $e''_2 = -e'_2$ que também será um vetor próprio da matriz (4) correspondente ao mesmo valor próprio λ_2 já que sendo $A(e'_2) = \lambda_2 e'_2$ tem-se que $A(e''_2) = A(-e'_2) = - A(e'_2) = -\lambda_2 e'_2 = \lambda_2 e''_2$.

Assim, pode-se aceitar que a nova base e'_1, e'_2 se obtém da antiga mediante um giro de ângulo φ no sentido contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio, isto é, que $e'_1 = \cos(\varphi \bullet e_1) + \text{sen}(\varphi \bullet e_2)$ $e'_2 = -\text{sen}(\varphi \bullet e_1) + \cos(\varphi \bullet e_2)$.

Mas nessas condições as antigas coordenadas x e y (de um vetor e, por isso, também, do ponto correspondente) e as novas coordenadas x' e y' estarão conectadas pelas relações $x = \cos(\varphi \bullet x') - \text{sen}(\varphi \bullet y')$ e $y = \text{sen}(\varphi \bullet x') + \cos(\varphi \bullet y')$ (5).

Introduzindo as expressões (5) na equação (1), reduz essa equação à forma

$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1x' + 2b_2y' + b = 0$ (6), donde b_1, b_2 e b são os novos coeficientes.

Assim, os coeficientes λ_1 e λ_2 são os valores próprios da matriz (4) e podem ser determinados da equação

$$\Psi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

(7).

Conforme, a proposição 1, esses valores próprios são reais, pois a matriz (4) é simétrica. O produto $\lambda_1\lambda_2$ dos valores próprios é igual ao termo independente $\psi(0)$ da equação de segundo grau (7), isto é, coincide com o determinante

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

.

Considere, separadamente, dois casos $\delta \neq 0$ e $\delta = 0$.

I. Primeiro caso: $\delta = \lambda_1\lambda_2 \neq 0$.

Transformando a equação (6) através de uma substituição que corresponde à translação da origem do sistema cartesiano retangular de coordenadas ao ponto $(-b_1/\lambda_1, -b_2/\lambda_2)$ com a particularidade de que se conservam as direções dos eixos desse sistema. A equação (6) reduz-se, então a forma $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + c = 0$ (8).

Suponha primeiro que $\lambda_1\lambda_2 > 0$, ou seja, que $\delta > 0$. Neste caso, o lugar geométrico dos pontos cujas coordenadas satisfazem a equação (8) é uma *elipse* quando c e λ_1 são de sinais opostos, reduz-se a *um ponto* quando $c = 0$ e *não contém ponto algum* quando c e λ_1 não são de sinais opostos.

Suponha agora que $\lambda_1\lambda_2 < 0$, ou seja, que $\delta < 0$. Neste caso, o lugar geométrico dos pontos cujas coordenadas satisfazem a equação (8) é uma *hipérbole* quando $c \neq 0$ e *de duas retas que se intersectam* quando $c = 0$.

Assim, este caso I, representa uma curva de segundo grau com centro, ou seja, que a origem de coordenadas é para a curva (8) o centro de simetria.

II. Segundo caso: $\delta = \lambda_1\lambda_2 = 0$ e seja, por exemplo, $\lambda_2 \neq 0$. Assim, a equação (1) reduz-se a $\lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + b = 0$ (9).

Se $b \neq 0$, forma-se o quadrado perfeito, que transladando a origem de coordenadas x'' e y'', reduz a equação (9) à forma $\lambda_2 y''^2 + 2b_1 x'' = 0$ (10). Assim, essa é a equação canônica de uma *parábola*.

Quando se considera o caso em que $b_1 = 0$, a equação (9), mediante uma substituição, converte-se em $\lambda_2 y''^2 + c = 0$. Ao analisar essa equação, conclui-se que representa *duas retas paralelas* quando $c\lambda_2 < 0$, *duas retas coincidentes* quando $c = 0$ e um *conjunto vazio* quando $c\lambda_2 > 0$ ou, também, diz-se que a equação determina um *par de retas paralelas imaginárias.*

2. Invariantes de uma curva de segundo grau

Definição 4

Denomina-se *invariante* de uma curva toda expressão formada pelos coeficientes de sua equação que não varia ao mudar um sistema cartesiano retangular de coordenadas por outro de mesmo tipo, isto é, que não varia ao realizar *rotações* e *translações paralelas* dos eixos de coordenadas.

Teorema 1

São invariantes de uma curva de segunda ordem

$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1 x + 2a_2 y + a = 0$ a soma dos coeficientes dos quadrados das coordenadas $s = a_{11} + a_{22}$, o determinante formado pelos coeficientes dos termos principais

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

e o determinante de terceira ordem

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}$$

O valor do δ permite julgar o tipo de curva: se $\delta > 0$, tem-se uma curva de tipo *elíptico* (uma elipse, um ponto ou um conjunto vazio, isto é, uma elipse imaginária); se $\delta < 0$, tem-se uma curva de tipo *hiperbólico* (uma hipérbole ou duas retas reais que se intersectam); se $\delta = 0$, tem-se uma curva de tipo *parabólico* (uma parábola ou duas retas paralelas que, possivelmente, se confundem ou não existem, ou seja, são imaginarias).

A invariância das expressões s, δ e Δ, estabelecidas pelo teorema, facilita a redução da equação na forma canônica. Assim, por exemplo, no caso de uma curva central, isto é, para $\delta \neq 0$, uma vez determinados os valores λ_1 e λ_2, a equação da curva reduz-se á forma $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + c = 0$.

Para essa equação tem-se $\Delta = \lambda_1\lambda_2$c ou $\Delta = \delta$c, isto é, c = Δ/δ. Por conseguinte, a equação canônica, ou seja, simplificada, de uma curva de segundo grau é $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \Delta/\delta = 0$. Desse modo, se $\delta > 0$ e $\Delta \neq 0$, a curva é uma *elipse* ou uma *"elipse imaginária"*. Será uma *elipse* (real) se λ_1 e Δ/δ são de sinais opostos, isto é, se $\lambda_1\Delta/\delta < 0$; porém, como $\delta > 0$ e λ_1 é de mesmo sinal que s , isto ocorrerá se s$\Delta < 0$. A curva será uma *"elipse imaginária"* no caso em que s$\Delta < 0$. Finalmente, se $\delta > 0$ e $\Delta = 0$, a curva é um *ponto*.

Com efeito, se $\delta < 0$ e $\Delta \neq 0$, a curva é uma *hipérbole* e se $\delta < 0$ e $\Delta = 0$ *duas retas que intersectam*.

Por fim, para uma *parábola* cuja equação reduziu-se à forma (10), tem-se $\Delta = -b_1{}^2\lambda_2$, donde $b_1 = \pm\ (-\Delta/\lambda_2)^{1/2}$, sendo $b_1 \neq 0$ e $\Delta \neq 0$. No caso de *duas retas paralelas* (distintas, coincidentes ou *"imaginárias"*) a equação da curva reduz-se à forma $\lambda_2 y^2 + c = 0$. Neste caso, tem-se $\Delta = 0$.

Dessa forma, vemos que o *determinante* Δ *é igual a zero se, e somente se, a curva se decompõe em duas retas (reais ou "imaginárias")*. Por conseguinte, o determinante Δ permite especificar quando a curva se decompõe ou não se decompõe em duas retas, sem que seja necessário reduzi-la à equação de curva na forma canônica.

Desenvolvimento do Minicurso

Além das discussões acima, durante o minicurso serão abordados os aspectos históricos dessas teorias e o modo como as formas quadráticas foram relacionadas a um padrão algébrico, aos determinantes e aos autovalores. Também será feita a demonstração do Teorema 1.