V Bienal da SBM
Sociedade Brasileira de Matemática
UFPB - Universidade Federal da Paraíba
18 a 22 de outubro de 2010

ESTUDO DE GEOMETRIA ATRAVÉS DA ANÁLISE DO MECANISMO DE DIREÇÃO DO CARRO

Guy Grebot * & Igor A.R Almeida †

1 Introdução

A motivação para o estudo que será desenvolvido aqui começou com a seguinte pergunta: Será que as rodas dianteiras de um carro, ao realizar uma curva, giram paralelamente? Por mais surpreendente que possa parecer, percebemos que, ao aplicar parte deste trabalho em atividades do PIBID do departamento de matemática da universidade de Brasília e em várias outras oficinas, esta pergunta deixa os alunos perplexos e curiosos a respeito do assunto. Bem, responderemos de imediato, as rodas não giram paralelamente. Sendo assim, a pergunta natural que podemos nos fazer é: qual mecanismo permite que isso ocorra? Outra pergunta importante também surge naturalmente: como podemos fazer com que as rodas traseiras de um carro possam transmitir o movimento para o carro e ainda fazer uma curva sem derrapar? Todas essa indagações serão respondidas ao longo deste mini-curso. Nosso objetivo é o estudo de conceitos geométricos, através da análise dos mecanismos de direção de um carro, em nível de final de ensino fundamental e ensino médio. Os conceitos abordados serão expostos na seção seguinte. Esses conceitos serão trabalhados de forma integrada em atividades mediadoras com a utilização de material didático.

A metodologia que usamos é a de resolução de problemas, ou seja, propomos uma situação problema e propiciamos um ambiente onde o participante possa, através de uma série de mediações seja com o professor ou com a própria atividade, construir o conhecimento. As nossas situações problemas giram em torno do movimento do carro e da bicicleta e dos mecanismos que auxiliam um carro a fazer uma curva sem derrapamentos. Desta maneira, dividimos nosso trabalho em três grupos de atividades que chamamos de cadernos.

O primeiro caderno, que é introdutório ao movimento de rotação, trata do movimento das rodas da bicicleta e permite estabelecer a base matemática necessária para o desenvolvimento dos cadernos seguintes. No segundo caderno, analisamos o movimento do carro, buscando explicações para o motivo das rodas não girarem paralelamente e analisamos o mecanismo que permite que isso ocorra. O terceiro e último caderno trata do diferencial do carro, que permite que as rodas tratoras do carro possam girar sem derrapamento. Os materiais necessários para o desenvolvimento das atividades são : régua, compasso, transferidor, papel pardo e barbante além do material concreto que construímos.

2 Referencial Matemático

Apresentamos a seguir os conceitos matemáticos necessários ao entendimento e análise do problema proposto. Observamos que esses conceitos podem (e devem) ser abordados no ensino médio.

Uma rotação no plano euclidiano é determinada por um ponto, chamado centro, e um ângulo orientado. Temos a definição seguinte:

Definição 2.1. *Dados um ponto O e um ângulo orientado, a rotação $T_{O,\alpha}$ de ângulo α em torno de O é a aplicação do plano euclidiano Π nele mesmo que a cada $X \in \Pi$ associa $X' = T_{O,\alpha}(X)$ tal que $OX' \cong OX$ e o ângulo orientado $X\hat{O}X'$ seja congruente a α.*

*Universidade de Brasília , Departamento de matemática,DF, Brasil, guy@mat.unb.br
†Universidade de Brasília, Departamento de matemática, DF, Brasil, igor.almeidaa@gmail.com

Segue desta definição que O é o único ponto fixo da rotação de centro O e que X e sua imagem X' estão sobre a mesma circunferência de centro O. Temos ainda que a composta de duas rotações $T_{O,\alpha}$ e $T_{O,\beta}$ em torno do mesmo ponto O, é a rotação $T_{O,\gamma}$ em torno de O, em que $\gamma = \alpha + \beta$ é a soma algébrica dos ângulos α e β [1].

Dizemos que uma reta r é tangente a uma circunferência C no ponto A, se A é o único ponto de interseção de r com C. Temos a proposição:

Proposição 2.1. *São dados uma circunferência C de centro O e um ponto A de C. Uma reta r por A é tangente a $C \Leftrightarrow r$ é perpendicular a OA.*

Demonstração:
($\Leftarrow$) Suponha que r seja perpendicular a OA. Portanto, dado qualquer ponto B de r distinto de A, o triângulo OAB é retângulo em A. Segue que OB é maior do que OA e, assim, B é exterior à circunferência C. Logo r intercepta C somente em A.
($\Rightarrow$) Suponha agora que r seja tangente a OA em A. Considere a perpendicular t a OA por A e uma reta s por A que não seja perpendicular a OA.

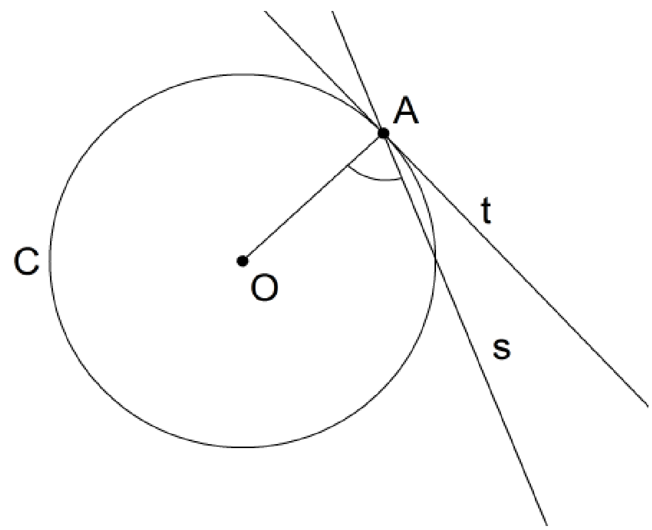

Figura 1: a reta s é não perpendicuar a OA

Segue que o ângulo determinado entre uma das semi-retas de s e OA é menor do que um ângulo reto. Seja α este ângulo. Como α é menor do que um ângulo reto, podemos construir um triângulo isósceles OAB tal que $O\hat{A}B \cong \alpha$ e $OA \cong OB$. Portanto, s admite dois pontos em comum com C: A e B. Assim, s não pode ser tangente a C. Dada uma reta por A temos duas possibilidades: ela é perpendicular a OA ou não. Além disso, ela é tangente a C ou não. Como toda reta por A que não é perpendicular a OA não é tangente a C, segue que se r é tangente a C em A, ela deve ser perpendicular a OA $\blacksquare$

A demonstração acima evita um conflito que geralmente atrapalha a compreensão do aluno do ensino básico: o que ele enxerga versus o que ele deve imaginar. Na demonstração usual desta proposição usa-se o raciocínio por absurdo e o aluno deve analisar a figura 2 [2].
Com isso, o aluno se depara com este conflito e é levado a um nível de abstração além da sua capacidade fazendo com que ele não compreenda o raciocínio.

A construção de uma tangente t a uma circunferência C que passa por um ponto P fora de C é geralmente feita através do seguinte resultado [3]:

Proposição 2.2. *Se o triângulo ABC é tal que AB seja um diâmetro de uma circunferência e C seja um ponto qualquer desta mesma circunferência, então ABC é retângulo no ponto C.*

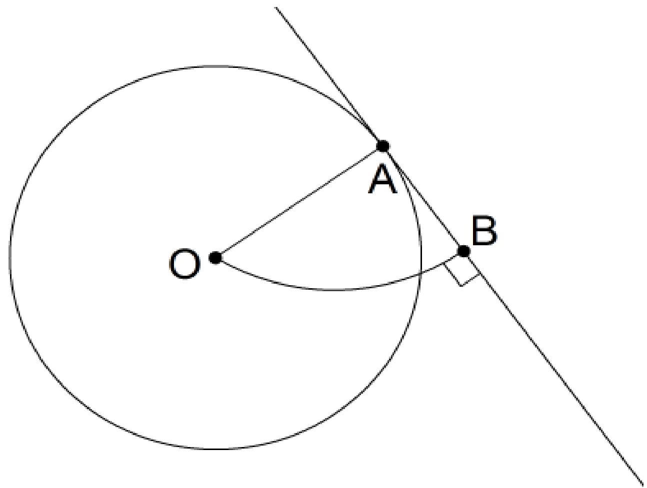

Figura 2: Desenho que atrapalha a compreenção do aluno

A demonstração desta proposição decorre do fato dos triângulos AOC e BOC serem isósceles.

Finalmente, o comprimento L de um arco de circunferência de raio R e de ângulo α é dado pela expressão $L = R\alpha$. A proporcionalidade direta entre L e R e entre L e α pode ser facilmente demonstrada a partir do teorema fundamental da proporcionalidade direta [4]. É claro que L representa também a distância percorrida por uma roda que gira de um ângulo α em torno do seu centro e rola sem deslizar sobre uma reta. Sendo assim, se duas circunferências C_1 (de raio R_1) e C_2 (de raio R_2) rolam uma sobre a outra sem deslizar, o comprimento de arco percorrido sobre uma delas é o mesmo que o comprimento de arco percorrido sobre a outra, ou seja $R_1\alpha_1 = R_2\alpha_2$ e $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \dfrac{R_2}{R_1}$. Da mesma forma, as velocidades angulares das duas circunferências estarão entre si como o inverso da razão entre os raios.

Encerramos aqui a lista de pré-requisitos necessários à análise do nosso problema que apresentaremos na próxima seção.

3 Modelagem do Problema

Agora, vamos modelar o nosso problema. O nosso foco será a matemática envolvida no problema e não a mecânica das peças. Primeiro vamos tentar entender porque as rodas dianteiras de um carro não giram paralelamente entre si. O nosso objetivo, ao responder essa pergunta, é quebrar a ideia que muitas pessoas têm de que as rodas giram, de fato, paralelamente. Ao realizar uma curva, as rodas do carro serão sempre tangente às trajetórias que realizam. Portanto, como demonstrado anteriormente, se a roda é tangente à trajetória, ela será perpendicular ao raio da circunferência que ela descreve. Assim, podemos supor que as rodas giram paralelamente e observar o que ocorre. Veja o esquema(figura 3).

Repare que as rodas são paralelas e que r_e e r_i são respectivamente os raios de rotação das rodas dianteiras externa e interna à curva. Cada roda está girando sobre um centro de rotação e as suas trajetórias estão representadas por cores diferentes. Os centros de rotação foram obtidos traçando as retas perpendiculares às rodas passando pelo ponto de tangência. Desta forma, podemos concluir que se as rodas girassem paralelamente, cada roda giraria em torno de um centro implicando na interseção entre as trajetórias. O resultado deste fenômeno é o derrapamento do veículo.

Concluímos assim que as rodas dianteiras devem girar em torno de um mesmo centro que é o centro da rotação (de acordo com a definição de rotação no plano euclidiano) que o carro efetua. Como o centro de rotação está

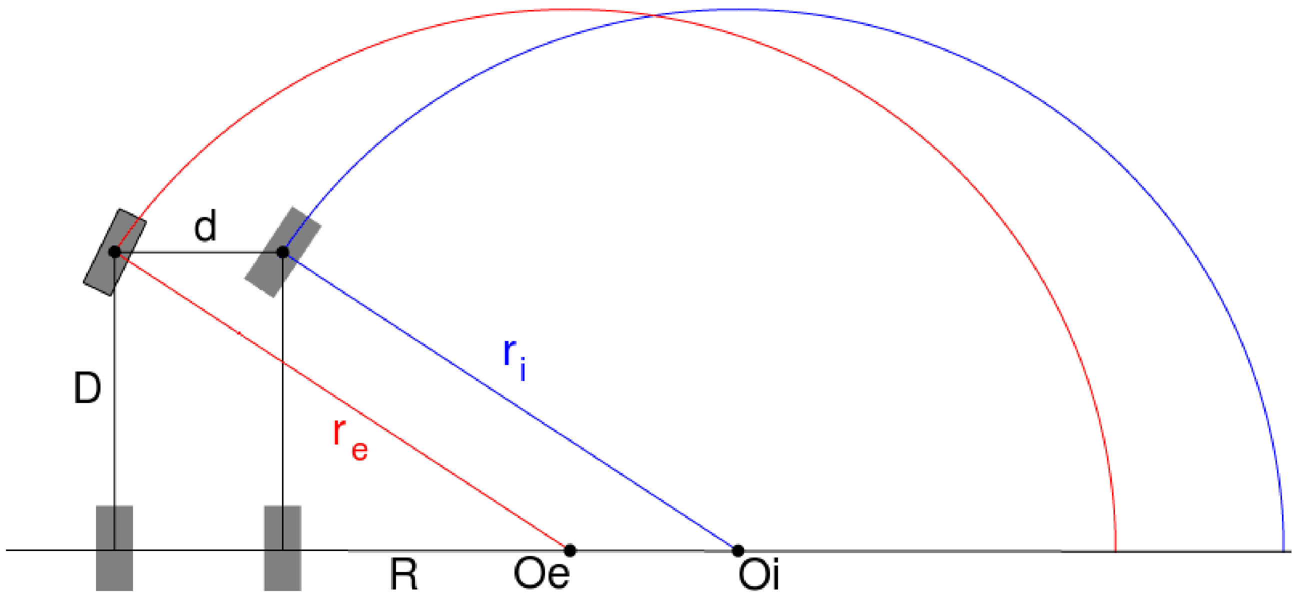

Figura 3: O que ocorre se as rodas dianteiras giram paralelamente

sobre a reta perpendicular as rodas traseiras, vamos escolher um centro qualquer sobre essa reta e traçar os raios de rotação de cada roda dianteira. Em seguida traçaremos as retas r e s, perpendiculares aos raios de rotação das rodas dianteiras, que representam a posição de cada roda. Observe o esquema(figura 4).

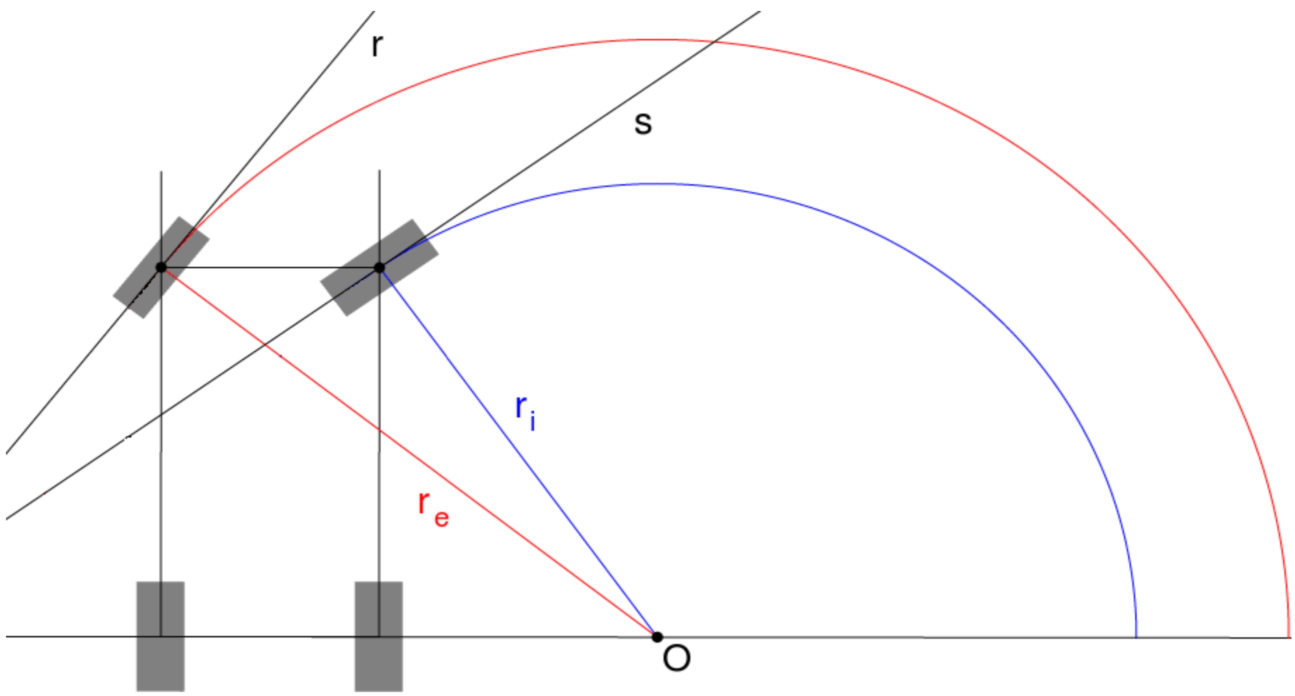

Figura 4: Rotação em torno de um centro

O problema que encontramos agora é como relacionar entre si os ângulos de rotação das rodas dianteiras e como construir um mecanismo que permita manter esta relação.

De acordo com as propriedades estabelecidas anteriormente e com a figura 5, temos que $B\hat{O}E = a_1$ e $A\hat{O}F = a_2$.

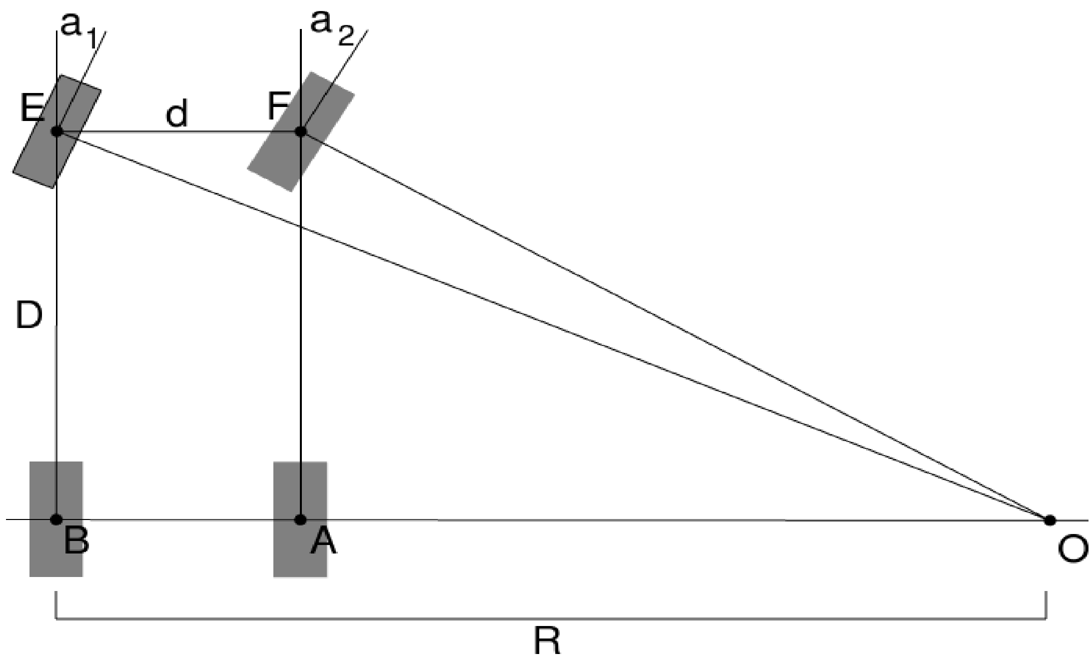

Figura 5: Relação entre os ângulos a_1 e a_2

Assim, o ângulo $E\hat{O}F = a_2 – a_1$ é a diferença entre os ângulos de rotação. Temos que $\tan a_1 = \frac{D}{R}$ e $\tan a_2 = \frac{D}{(R–d)}$, sendo D a distância entre os eixos das rodas dianteiras e traseiras, d a distância entre as rodas e R é o raio de rotação da roda traseira externa à curva. Assim:

$$a_2 – a_1 = \arctan\left(\frac{D}{(R-d)}\right) – \arctan\left(\frac{d}{R}\right) = \arctan\left(\frac{dD}{R(R–d)+D^2}\right).$$

D e d são constantes e R é a nossa variável, tal que $R > d$. Podemos observar que, teoricamente, a diferença máxima entre os ângulos de rotação das rodas dianteiras se dá quando $R = d$. Observe também que quando R tende a infinito, a diferença $a_2 - a_1$ tende a zero.

Qual é então o mecanismo que permite que, ao girar o volante, as rodas dianteiras girem de modo que a diferença entre os ângulos de rotação seja o que esperamos. O mecanismo que iremos expor neste trabalho não é o mais utilizado nos carros atualmente, porém é o mais simples para se trabalhar em sala de aula e ainda permite realizar um trabalho com quadriláteros. O primeiro esquema de direção conhecido é de Richard Edgeworth, porem quem ficou famoso e acabou levando os créditos pela criação foi Rudolf Ackermann em 1817, patenteando o sistema de direção na Inglaterra[5]. O sistema consiste de um trapézio isósceles $ABCD$ articulado. Os pontos D e C são fixos na estrutura do carro e as barras AD e BC orientam as rodas. Assim, ao fazer uma curva o sistema evita que as rodas girem paralelamente, como ilustrado na figura 6.

Para mostrar que isso ocorre, considere então um trapézio isósceles de bases d e b com $d > b$, lado c e ângulos na base iguais a α (figura 7).

Podemos escolher um sistema de coordenadas com origem em O e tendo a reta OP como eixo das abscissas com orientação positiva de P para O. Suponha que os segmentos OA e PB sofram rotações em torno de O e P, respectivamente, de ângulos a_2 e a_1. As coordenadas das respectivas imagens de a e B, os pontos A' e B', são :

$$\begin{aligned} A' &= (c\cos(\pi+\alpha-a_2), c\,\texttt{sen}(\pi+\alpha-a_2)) \\ B' &= (-d + c\cos(\alpha+a_1), -c\,\texttt{sen}(\alpha+a_1)). \end{aligned}$$

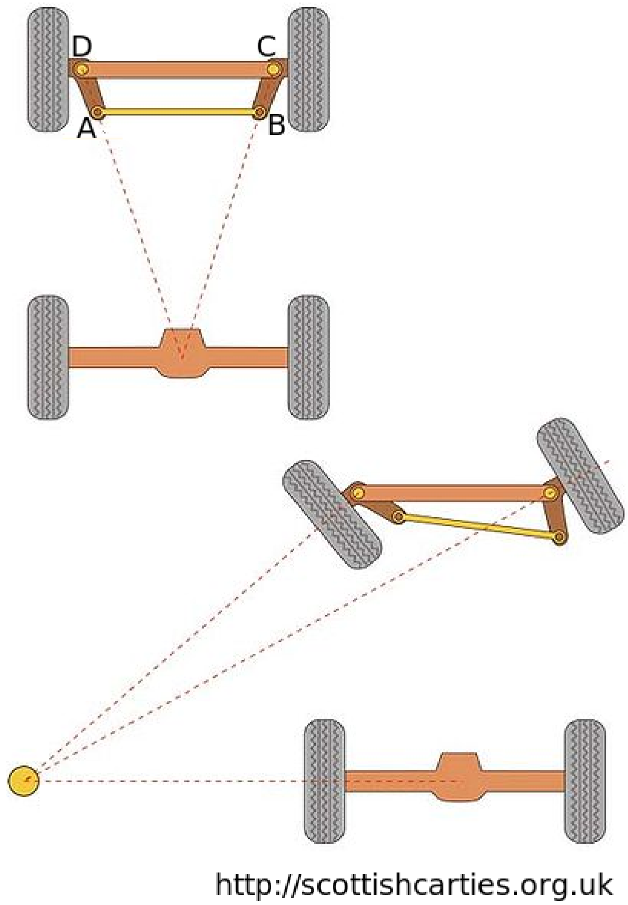

Figura 6: A geometria Ackermann

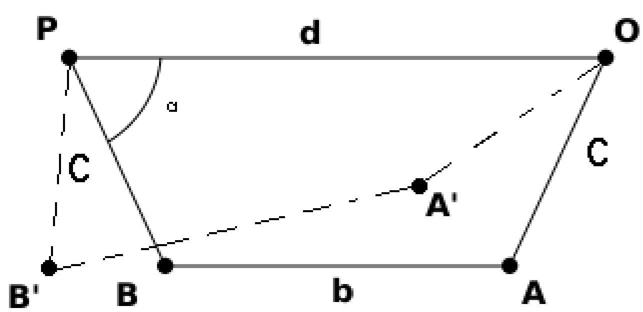

Figura 7: O trapézio de Ackermann

Como a distância entre A' e B' é fixa (pois a barra b é rígida) segue que temos:

$$b^2 = A'B'^2 = d^2 - 2cd(\cos(\alpha - a_2) + \cos(\alpha + a_1)) + 2c^2(1 + \cos(2\alpha + a_1 - a_2)).$$

Sendo o trapézio isósceles, vale a relação $\cos\alpha = \dfrac{d-b}{2c}$. Portanto, supondo-se que as rodas girem com o mesmo ângulo $a_1 = a_2$ obtemos:

$$b^2 = d^2 + (2c\cos\alpha)^2 - 2d(2c\cos\alpha)\cos a_1.$$

Segue que

$$b^2 = d^2 + (d-b)^2 - 2d(d-b)\cos a_1$$

e

$$(b-d)(b+d) = (d-b)^2 - 2d(d-b)\cos a_1.$$

Logo $(b+d) = -(d-b) + 2d\cos a_1$ que implica $1 = \cos a_1$. Concluímos então que as rodas só serão paralelas na posição $a_1 = a_2 = 0$ e, de fato, este mecanismo permite que elas girem não paralelamente entre si. A pergunta é saber se a relação que obtemos anteriormente, $\tan a_2 = \dfrac{D\tan a_1}{D - d\tan a_1}$ é compatível com a equação

$$b^2 = d^2 - 2cd(\cos(\alpha - a_2) + \cos(\alpha + a_1)) + 2c^2(1 + \cos(2\alpha + a_1 - a_2))$$

se acrescentarmos a condição mostrada no esquema de que $\tan\alpha = \dfrac{2D}{d}$. Portanto, devemos conseguir extrair a_1 e a_2 do sistema:

$$\begin{aligned} b^2 &= d^2 - 2cd(\cos(\alpha - a_2) + \cos(\alpha + a_1)) + 2c^2(1 + \cos(2\alpha + a_1 - a_2)) \\ \tan a_2 &= \frac{\tan\alpha\tan a_1}{\tan\alpha - 2\tan a_1}. \end{aligned}$$

Não tentaremos resolver este sistema aqui. Observe que $\tan\alpha = \dfrac{2D}{d}$ e $\cos\alpha = \dfrac{d-b}{2c}$ implicam uma relação entre as grandezas D, d,b e c:

$$\frac{D}{d} = \frac{\sqrt{4c^2 - (d-b)^2}}{2(d-b)}.$$

Observamos ainda que, por questões técnicas e de construção do veículo, o ângulo limite de rotação não pode ser tal que o raio de rotação R seja igual a d pois isso implica que a roda sofre uma rotação de 90^o. Finalmente, podemos considerar algum ponto da barra b que seria arrastado para um lado ou outro de forma a permitir a rotação das rodas. Por exemplo, as coordenadas do ponto médio X da barra b são dadas, no referencial usado anteriormente, por

$$X = \frac{1}{2}(-d + c[\cos(\alpha + a_1) - \cos(\alpha - a_2)], -c[\mathtt{sen}(\alpha + a_1) + \mathtt{sen}(\alpha - a_2)]).$$

Considere agora as rodas traseiras e suponha que elas forneçam o movimento ao carro. Ao fazer uma curva, as rodas traseiras descrevem dois arcos de circunferências concêntricas da raios R_e e R_i em que $R_e > R_i$, tais que a perpendicular às rodas que passa pelo centro de rotação contenha o eixo que liga as rodas (vejam figura 8). Portanto, os pontos de contato dessas rodas com o chão têm mesma velocidade angular.

Sendo assim, os arcos de circunferência de raio R_e e R_i devem ser percorridos durante o mesmo período de tempo. Logo, a velocidade V_e da roda externa deve ser maior do que a velocidade V_i da roda interna. De fato, já que a velocidade angular do eixo é a mesma que a velocidade angular das rodas em torno de O, temos que $\dfrac{V_i}{R_i} = \dfrac{V_e}{R_e}$ o que implica $V_e = \dfrac{V_i R_e}{R_i} > V_i$. Podemos então determinar a velocidade angular de cada roda em torno do seu eixo. Seja R o raio das rodas e θ o ângulo central do arco que elas descrevem. Temos $\theta R_e = R\omega_e$ e $\theta R_i = R\omega_i$ em que ω_i e ω_e são as velocidades angulares das rodas interna e externa, respectivamente. Segue então que a razão entre as velocidades angulares é $\dfrac{R_i}{R_e} = \dfrac{\omega_i}{\omega_e}$ e $\dfrac{R_e}{R_i}\omega_i = \omega_e$. Portanto, se o carro está percorrendo uma trajetória retilínea temos $\omega_i = \omega_e$ e, ao iniciar uma curva, devemos satisfazer $\dfrac{R_e}{R_i}\omega_i = \omega_e$. Precisamos então de um mecanismo que permita

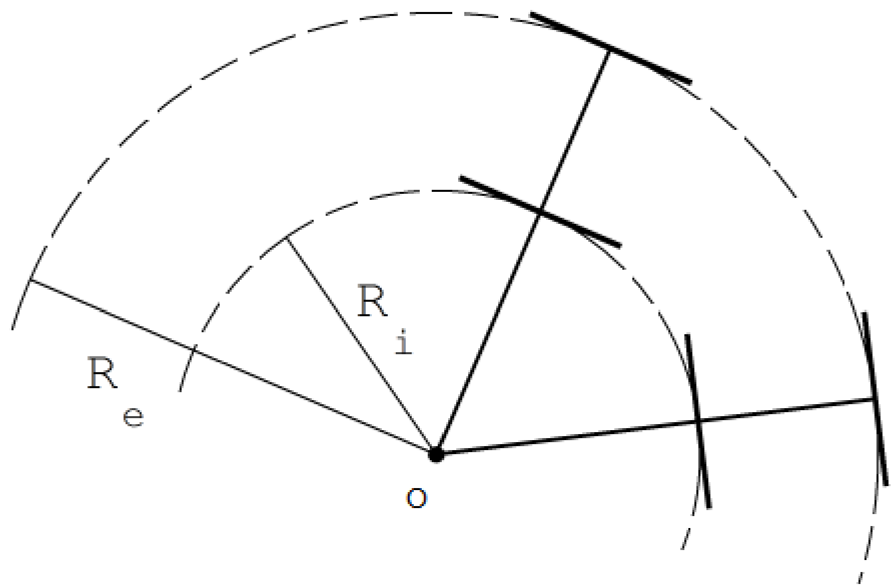

Figura 8: As rodas giram com velocidades distintas.

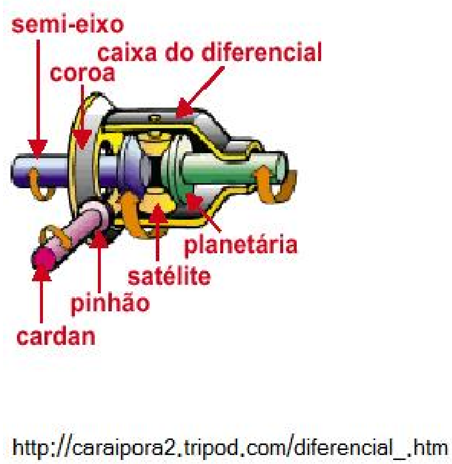

Figura 9: O diferencial.

corrigir a velocidade angular dessas rodas para que o carro não derrape ao fazer uma curva. Analisaremos agora este mecanismo, chamado diferencial. Um tipo de diferencial, usualmente encontrado em carros, está esquematizado na figura 9.

Neste esquema, a coroa e os satélites estão rigidamente conectados e giram juntos. O motor movimenta o eixo de transmissão (cardan) que, através do pinhão, movimenta a coroa. Os planetários azul e verde, que são colocados em movimento de rotação pelos satélites, movimentam as rodas traseiras do carro. Se o carro percorre uma trajetória retilínea, os satélites movimentam os dois planetários com mesma velocidade angular. Uma vez que o carro inicia uma curva, os planetários devem girar com velocidades distintas. Sendo assim, os satélites começam a girar em torno de seu eixo comum (que é perpendicular aos semi-eixos) para compensar a diferença de velocidade entre os planetários. Para simplificar, considere um esquema em que há apenas um satélite C girando em torno dos planetários A e B de mesmo raio(veja figura 10).

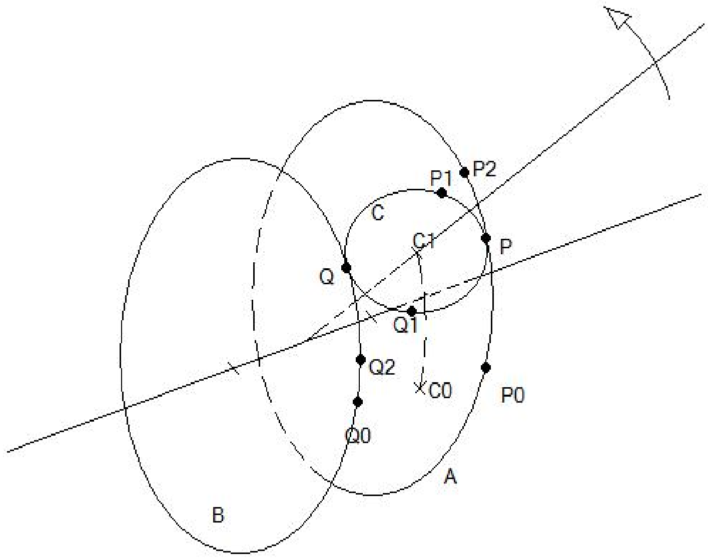

Figura 10: Esquema do diferencial simplificado.

Seja C_0 o centro do satélite C. Denote por P_0 e Q_0 os pontos de tangência de C com A e B, respectivamente, no instante inicial. Sejam P e Q os novos pontos de tangência de C com A e B, respectivamente. A rotação x do planetário A pode ser medida pelo arco P_0P_2 ou seja $x = P_0P_2 = P_0P + PP_2$. Seja z a rotação do eixo do satélite em torno do eixo dos planetários. Esta rotação é medida pelo arco $P_0P = C_0C_1 = z$. Como os discos giram sem deslizar, temos $PP_2 = PP_1 = r\theta$ em que $r = C_1P_1$ e θ é a medida, em radiano, do ângulo $P_1C_1P = Q_1C_1Q$. Assim, podemos escrever $x = z + r\theta$. Da mesma forma temos que a rotação y do planetário B pode ser medida pelo arco Q_0Q_2 ou seja $y = Q_0Q_2 = Q_0Q – QQ_2$. Como $Q_0Q = C_0C_1 = z$ e $QQ_2 = QQ_1 = r\theta$, vemos que $y = z – r\theta$. Logo obtemos a relação entre as rotações dos eixos dos planetários e do eixo do satélite como sendo $x + y = 2z$. Esta expressão confirma o que foi dito inicialmente, pois se os planetários têm mesma velocidade, $x = y$, temos $z = x$ e o satélite gira em torno dos semi-eixos com mesma velocidade angular que os planetários. Mas se os planetários giram com velocidades distintas, o satélite deverá girar em torno dos semi-eixos com uma velocidade de forma a compensar esta diferença. O interessante é que podemos usar este mecanismo para somar dois números x e y. De fato, ele tem sido usado em máquinas de calcular mecânicas com este propósito [6].

4 Aspectos pedagógicos

O objetivo é fazer com que os alunos analisem os problemas descritos anteriormente e, através dessa analise, aprendam a matemática necessária. O que propomos é um ensino através da resolução de situações problemas, possibilitando que o aluno: interprete o problema dado; experimente através do uso de material didático concreto; faça conjeturas a respeito do problema; demonstre proposições, seja através de métodos indutivos ou por deduções matemáticas; valide os resultados mostrados através do uso do material didático e, por fim, tire conclusões a respeito das possibilidades e limitações que o modelo teórico oferece em relação ao fenômeno concreto observado. Escolhemos essa metodologia pois acreditamos que esse seja um caminho natural para a construção do conhecimento. Se formos analisar o modo de como os primeiros conhecimentos geométricos foram adquiridos, veremos que, inicialmente havia a observação de um fenômeno, em seguida eram feitos alguns raciocínios indutivos acerca do assunto e a partir de um número grande de observações chegava-se a algumas conclusões [7]. Com o passar do tempo, à medida que se foram acumulando verdades geométricas, percebeu-se que muitas delas podiam ser mostradas através de uma série de raciocínios dedutivos a partir de outras verdades estabelecidas e, desta maneira, não era necessária nenhuma experiência em particular. Um exemplo interessante é o citado por Fetssov em [7]: " inúmeras observações e experiências nos convencem que por dois pontos distintos passa uma, e só uma, reta. Com base nesta verdade podemos garantir, sem precisar de nenhuma experiência, que duas retas distintas não podem ter mais que um ponto em comum. Pode-se obter essa nova verdade por um raciocínio muito simples. De fato, supondo que duas retas distintas pudessem ter dois pontos comuns, se chegaria a conclusão de que por esses dois pontos passariam duas retas distintas, o que contraria a verdade anteriormente estabelecia." Esse é o tipo de argumentação que desejamos desenvolver em nossos alunos através da metodologia que escolhemos. Acreditamos que seja necessário que ele observe, estabeleça algumas verdades e, em seguida, confirme suas hipóteses, seja através de raciocínios indutivos e várias observações, ou através de demonstrações, com um rigor matemático adequado, acerca do assunto.

5 O mini-curso

O mini-curso será dividido em três partes. Na primeiro parte, os participantes realizarão atividades com a bicicleta, que estão contidas no Caderno 1. As perguntas que motivam o estudo do movimento da bicicleta são: Você já parou para pensar em como uma bicicleta se movimenta ao realizar uma curva, e em como as rodas se comportam? Será que elas seguem a mesma trajetória? Por que? Este primeiro caderno é introdutório ao estudo do carro, pois trabalha com conceitos chave que serão exigidos nos próximos cadernos. Dando seqüência ao mini-curso, será proposto a realização do conjunto de atividades relacionadas ao movimento das rodas do carro e à geometria Ackermann. As perguntas que motivam esse estudo são: Ao realizar uma curva com um carro, o que podemos dizer a respeito da posição das rodas dianteiras? Elas giram paralelamente entre si ou não? E, por fim, realizaremos o caderno relacionado ao diferencial do carro. A pergunta que tentaremos responder ao longo da realização desta atividade é: Como podemos fazer com que as rodas traseiras de um carro possam transmitir o movimento para o carro e ainda fazer uma curva sem derrapar?

Durante o mini-curso sempre haverá espaço para discutir tanto os conceitos matemáticos e didáticos envolvidos nas atividades quanto o material didático concreto que pode ser utilizado.

6 Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio fornecido pela CAPES através do programa institucional de bolsas de iniciação à docência - PIBID.

Referências

[1] Lima E.L. - *Isometrias do plano e do espaço*, coleção do professor de matemática – SBM, 1995.
[2] Barbosa J.L.M. - *Geometria euclidiana plana*, coleção do professor de matemática – SBM.
[3] Wagner E. - *Construções geométricas*, coleção do professor de matemática – SBM.
[4] Lima E.L. - *Medida e forma em geometria*, coleção do professor de matemática – SBM.
[5] Dixon J.C. - *Suspension Geometry and Computation*, Wiley, 2009.
[6] Murray F.J. - *Mathematical Machines Vol. II: analog devices*, Columbia University Press, 1961.
[7] Fetissov A.I. - *A demonstração em geometria*, Coleção Matemática: Aprendendo e Ensinando – Atual. São Paulo 1994.