V Bienal da SBM
Sociedade Brasileira de Matemática
UFPB - Universidade Federal da Paraíba
18 a 22 de outubro de 2010

COLORINDO MAPAS

Gésica Peixoto Campos * & Izabelly Marya Lucena da Silva †

1 Introdução

Vamos começar com a seguinte dinâmica:
Em uma entrevista um estilista especializado em cores da moda afirmou que:

- A cor azul combina com a vermelha;
- A cor vermelha combina com a rosa;
- A cor verde combina com todas as outras cores da tendência.

Sabendo que as cores da tendência são azul (az), verde (vd), rosa (rs), vermelha (vm) e amarela (am).

Exercício: Como representar de forma simples as escolhas do especialista?

A forma de representação mais simples que podemos fazer é um artifício matemático chamado grafo.

1.1 Grafos

Definição 1.1. *Grafo é um conjunto de pontos (chamados comumente de vértices) e arestas que são curvas que conectam dois desses vértices não mais de uma vez.*

Para construir o grafo relacionaremos os vértices às cores e as arestas à associação que ele vez com as cores. Assim obtemos o grafo:

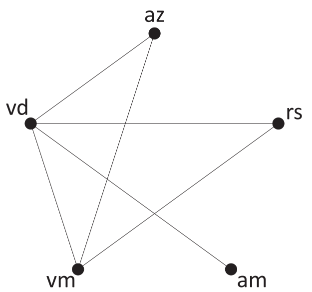

Figura 1: Grafo que representa o problema anterior

Mas você concorda com o estilista? Agora vamos tentar fazer outras relações de cores.

*Universidade Federal de Pernambuco, UFPE, PE, Brasil, gesica.pcampos@bol.com.br
†Universidade Federal de Pernambuco, UFPE, PE, Brasil, izabellymarya@ig.com.br

2 Qual a correspondência entre coloração de mapas e grafos?

Como na dinâmica os grafos vão servir para facilitar a compreensão e a visualização. Ao pintarmos o mapa, a cada região associaremos um vértice e as devidas vizinhanças às arestas do grafo, portanto um mapa pode ser representado por um grafo.

2.1 Grafo dual

Dado um mapa (no sentido usual de mapa), façamos:

1. Faremos um grafo associado ao mapa da seguinte maneira, chamaremos de vértice um ponto do mapa que é fronteira de três regiões diferentes e as arestas são as fronteiras entre das regiões duas a duas. Ver figura 2b.
2. Demarca - se um novo vértice no interior de cada face do grafo associado ao mapa, em seguida, para cada duas regiões vizinhas, com alguma aresta em comum, desenha-se uma aresta ligando as duas regiões, cortando a fronteira comum de ambos. Ver figura 2c.

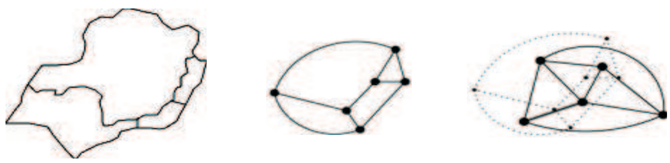

Figura 2: (a) Mapa da Regiâo Sudeste; (b) Grafo associado ao mapa; (c) Grafo dual do mapa

Exercício: Construa o grafo dual dos mapas de acordo com o exemplo anterior.

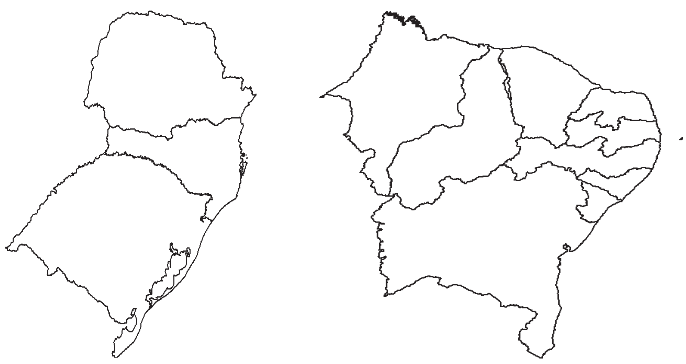

Figura 3: Mapas das Regiões Sul e Nordeste

2.2 Planaridade

Um grafo é chamado de planar quando pode ser representado no plano de tal forma que suas arestas não se cruzem (exceto nos vértices). Por exemplo:

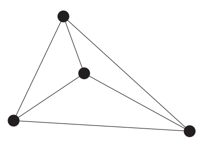

Figura 4: Exemplo de grafo planar

Exercício: Construir alguns os possíveis grafos com 3, 4, 5 e 6 vértices.

Teorema 2.1. *Um grafo planar sobre n vértices tem no máximo 3n - 6 arestas.*

Teorema 2.2. *Todo grafo planar tem pelo menos um vértice de grau no máximo 5 (grau: quantidade de aresta que sai do vértice).*

Será que todo grafo é planar?
Não. Como vimos no exercício anterior existe um tipo de grafo com cinco vértices (K_5) e outro com seis ($K_{3,3}$) que não são planares e segundo o teorema de Kuratowski todo grafo que possui na sua composição um dos dois não é planar.

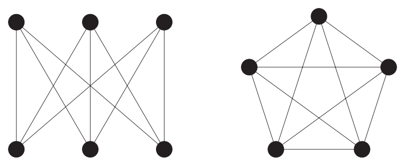

Figura 5: $K_{3,3}$ e K_5

3 Coloração de mapas

Teorema 3.1 (Teorema das quatro cores)**.** *Todo mapa pode ser colorido com quatro ou menos cores, respeitando-se a condição de que países vizinhos, com alguma linha de fronteira em comum, tenham cores diferentes.*

Mas para ser mais fácil iremos começar com o seguinte teorema: "Todo mapa pode ser colorido com cinco cores".
Exercício: Vamos tentar pintar o mapa do Brasil com esse teorema.

Figura 6: Mapa do Brasil

Agora vamos generalizar, demonstrando para todo mapa.

Primeiro passo: Construir o grafo dual do mapa.

Para a demonstração valer, o grafo dual tem que ser planar.

Exercício: Mostre que todo mapa tem um grafo dual relacionado a ele e o grafo vai ser sempre planar.

Segundo passo:

Dem.: Para facilitar esta demonstração iremos considerar coloração de vértices de grafos, isto é, vértices ligados pela mesma aresta não podem ter a mesma cor. Nomenclatura: $\mathcal{G}$ = grafo; $d(x)$ = grau do vértice x.

Obs.: Grafo planar com menos de 5 vértices pode pintar trivialmente.

Suponha que todos grafos com t vértices sejam coloridos com 5 cores. Temos que mostrar que grafo planar com $t+1$ vértices é colorível com 5 cores.

Por hipótese, o grafo $\mathcal{G} \setminus x$ pode ser colorido com 5 cores.

- Se $d(x) < 5$, então sobra pelo menos uma cor para colorir x, assim satisfazendo o teorema.
- Se $d(x) = 5$, então considere a arrumação representada pela Figura 7:

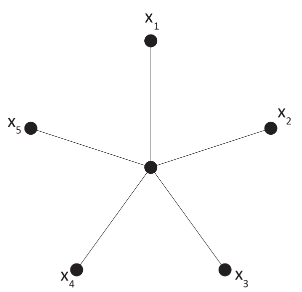

Figura 7: O vértice x_i está pintado com a cor i

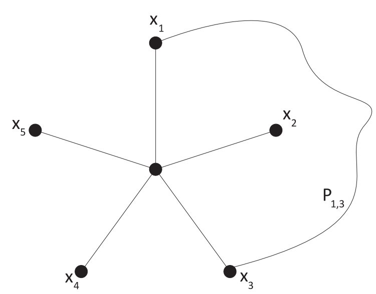

Figura 8: O ciclo $C_{1,3}$

Considere $C_{1,3}$ o subgrafo de $\mathcal{G} \setminus x$ induzido pelos vértices de cor 1 e 3. Podem os vértices x_1 e x_3 estarem em componentes distintas? Sim. Porém, se isso ocorre, então na componente que contém x_1 poderíamos trocar a cor 1 pela cor 3, ficando assim a cor 1 livre pra pintar x.

Então suponhamos que x_1 e x_3 estão na mesma componente. Logo, existe um caminho $P_{1,3}$ que liga x_1 à x_3 (ver Figura 8). Unindo $P_{1,3}$ a x obtemos o ciclo $C_{1,3}$. Notemos que os vértices x_2 e x_4 ficaram em regiões diferentes do ciclo. Suponhamos sem perda de generalidade que x_2 pertence ao $intC_{1,3}$ e x_4 pertence ao $extC_{1,3}$.

Olhemos agora para $P_{2,4}$. Se x_2 e x_4 estivessem na mesma componente teríamos um absurdo, pois $P_{2,4}$ e $C_{1,3}$ teriam um vértice em comum, podendo ser duas possibilidades: Um vértice y que pertence a interseção de $C_{1,3}$ e $P_{2,4}$, assim y tem cor 2 ou 4 e y tem cor 1 ou 3 (absurdo!); ou x pertence a $P_{2,4}$ e a $C_{1,3}$ assim podendo pintá-lo com uma das cores, o que não pode ocorrer por hipótese.

Então x_2 e x_4 estão em componentes distintas e, por exemplo, podemos trocar a cor 2 pela cor 4 na componente que contém x_2, deixando a cor 2 livre pra pintar x.

O teorema das quatro cores foi demonstrado em 1976 por Appel e Haken, mas sua prova usou computadores muito intensamente para verificar um enorme número de casos e ainda hoje precisa-se deles para a sua demonstração. Por sua complexidade não demonstraremos o teorema das quatro cores.

4 Curiosidade

Em 1º de abril de 1975, Martin Gardner publicou, na revista americana Scientific American, um mapa que, segundo ele, não era possível ser colorido com apenas quatro cores.

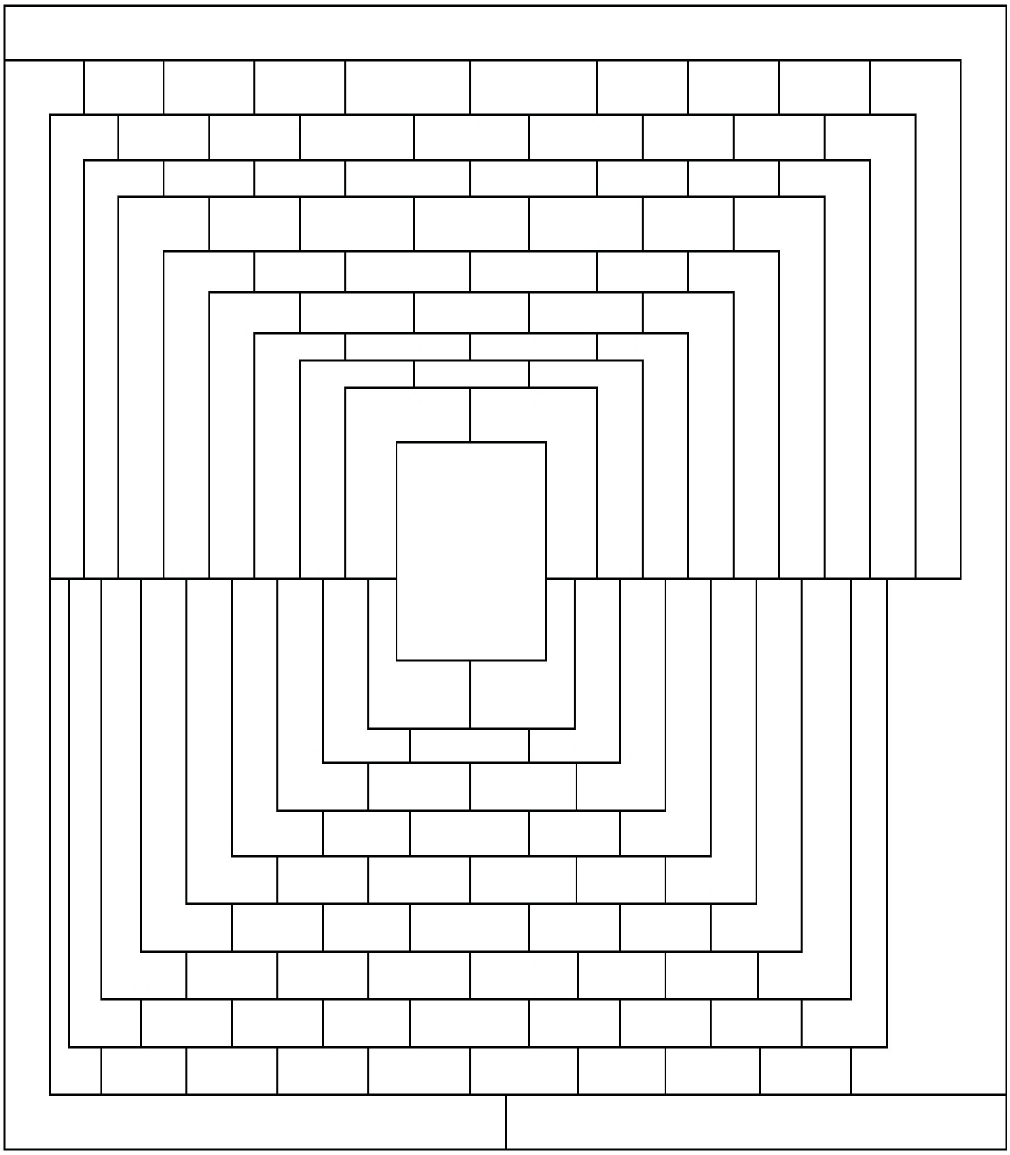

Figura 9: Mapa de Martin Gardner

Este mapa foi de muita confusão entre os matemáticos durante muitos anos, chegaram até a desacreditar no teorema das quatro cores. Mas esse mapa é só uma mentirinha de primeiro de abril.

Exercício: Tentar pintar o mapa de acordo com o teorema das quatro cores.

Referências

[1] LOVÁSZ, L. & PELIKÁN, J. & VESTERGOMBI, K. - *Matemática Discreta*, SBM, 2003.

[2] HARARY, F. - *Graph theory*, Addison - Wesley Publishing company, 1969.

[3] SAMPAIO, J.C.V. *Quatro Cores e Matemática*, II Bienal da SBM , UFBA, 2004.
site: http://www.bienasbm.ufba.br/M35.pdf.

[4] *http://www.atractor.pt/matviva/geral/t5cores/T4C.htm.*

[5] *http://www.congresscentral.com.br/cnmac2009/pub/arquivos/585_a976_PolyUFF.pdf.*

[6] *http://pt.wikipedia.org/wiki/Sete_pontes_de_Koenigsberg.*

[7] *http://algoritmos.tiagomadeira.net/os-grafos-e-o-orkut.*

[8] *http://www.ici.unifei.edu.br/luisfernando/arq_pdf/palestras/tres_problemas_sobre_grafos.pdf.*