V Bienal da SBM
Sociedade Brasileira de Matemática
UFPB - Universidade Federal da Paraíba
18 a 22 de outubro de 2010

CUBOS, CUBOS E MAIS CUBOS: INVESTIGANDO PADRÕES E REGULARIDADES

DANIELA SANTA INÊS CUNHA *

Resumo

A proposta deste minicurso consiste na resolução de problemas envolvendo o cálculo de perímetros, áreas e volumes através de uma abordagem investigativa. Durante a execução das atividades, alunos do ensino fundamental e médio e professores dos respectivos níveis de ensino têm a oportunidade de elaborar suas próprias conjecturas, refiná-las e justificá-las sendo guiados pelo monitor do minicurso. As interferências do mediador são balanceadas a fim de que os estudantes possam construir seus conhecimentos de forma autônoma. As tarefas trabalham com o desenvolvimento de habilidades espaciais, com a visualização de figuras tridimensionais e com a generalização de padrões. O desenvolvimentos de tais habilidades contam com o auxílio do material concretos, onde cubinhos de madeira serão disponibilizados durante a resolução dos problemas. As atividades promovem uma conexão entre a aritmética a álgebra e a geometria e têm como suporte teórico as idéias de ensino e aprendizagem da Matemática através da resolução de problemas propostas por Polya e o uso de investigações na sala de aula idealizadas por Ponte, Brocardo e Oliveira.

Palavras-chave: Resoluçao de Problemas, Investigação Matemática; Habilidade Espacial.

1 Referenciais Teóricos

A preocupação de pesquisadores da área de educação matemática com o desenvolvimento de metodologias que promovam uma aprendizagem significativa por parte dos estudantes tem sido uma constante. George Pólya, professor e matemático, autor de diversos artigos e livros direcionados à Matemática e seu ensino, já se preocupava com o tipo de estratégia e metodologia que um professor dessa disciplina poderia recorrer para auxiliá-lo na aprendizagem dos seus alunos. Em seu livro "*How to Solve it*", traduzido para o português como "A Arte de Resolver Problemas"(PÓLYA, 1977), o autor evidencia as motivações e os procedimentos de resolução de problemas que servem como um conjunto de estratégias para auxiliar os estudantes a desenvolverem a sua própria capacidade de resolvê-los. Em 1987, em seu artigo intitulado "*Dez mandamentos para professores*", Pólya enfatiza que através da resolução de um problema o professor pode dar aos seus alunos (pelo menos algumas vezes) a oportunidade de descobrir as coisas por si mesmos, inclusive a possibilidade de encontrarem os seus próprios erros. Desde então vem sendo valorizado o ensino de Matemática através de uma metodologia de resolução de problemas. Muitos recursos neste sentido têm sido desenvolvidos visando ao trabalho em sala de aula, na forma de coleções de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividades e orientações para avaliar o desempenho em resolução de problemas. Onuchic (1999) ressalta que, na década de 1980, já havia uma consciência por parte dos estudiosos da necessidade de valorização do processo da resolução do problema, em substituição a uma preocupação exclusivista com a sua solução. Deste modo, o trabalho investigativo e a atividade de descoberta assumem relevância no processo de ensino, cujo foco passa a ser a ação do aluno durante a aquisição da aprendizagem.

Atualmente, acredita-se na idéia de que "saber Matemática"corresponde a "fazer Matemática"(NCTM, 1991 apud ABRANTES, 1999, p. 1) e muitas pesquisas vêm sendo realizadas, dentro e fora da sala de aula, na tentativa de uma apropriação mais realista deste discurso. Oliveira (1998) realizou um estudo qualitativo acompanhando duas professoras de diferentes trajetórias profissionais na realização de atividades de investigação na sala de aula,

*Universidade Federal da Bahia, BA, Brasil, danicunhamat@yahoo.com.br

estabelecendo como objetivos evidenciar o papel do professor, o tipo de conhecimento matemático exigido dele e os desafios que lhe são impostos nesse tipo de tarefa. As duas professoras que participaram da pesquisa consideraram as atividades de investigação como uma experiência enriquecedora para as suas práticas e para o trabalho dos alunos. Reconhecendo as potencialidades promovidas pelas atividades de investigação, as professoras refletiram sobre a possibilidade de tornar freqüente o uso das tarefas, mas vêem limites nesta estratégia, por questões de cumprimento do programa escolar e pelo tempo que precisa ser dedicado para a aplicação de tarefas de natureza investigativa.

Brocardo (2001) desenvolveu um projeto com a aplicação de treze tarefas de investigação em uma turma do 8º ano durante o período de um ano letivo. O enfoque da sua pesquisa se deu na maneira como os estudantes lidam com as atividades de investigação. Segundo a autora, no início do trabalho os alunos encararam o processo de coleta de dados como sendo o objetivo final da tarefa. Porém, com a realização de novas tarefas, os alunos foram se familiarizando com a investigação como um todo e alcançaram uma boa compreensão deste tipo de trabalho.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), a investigação matemática estrutura-se em quatro momentos principais. O primeiro abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. Finalmente, o último diz respeito à argumentação, à demonstração e à avaliação do trabalho realizado. Os autores afirmam, ainda, que estes momentos podem acontecer simultaneamente e cada um deles pode incluir diversas atividades, resumidas no quadro indicado na tabela 1.

Exploração e formulação de questões	Reconhecer uma situação problemática Explorar a situação problemática Formular questões
Conjecturas	Organizar dados Formular conjecturas e fazer afirmações sobre uma conjectura
Teste e reformulação	Realizar testes Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	Justificar uma conjectura Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Tabela 1: Momentos na realização de uma investigação (Ponte, Brocardo e Oliveira, 2006, p. 21)

Tendo como suporte as idéias de resolução de problemas e investigações matemáticas evidenciadas anteriormente, elaboramos, selecionamos e adaptamos uma sequência de atividades com características que as enquadram nas metodologias destacadas. Tais atividades focam no desenvolvimento de habilidades espaciais e o trabalho com a visualização de figuras no espaço, no trabalho com cálculo de perímetros, áreas e volumes de objetos tridimensionais e na descoberta de padrões e regularidades. Para tanto, contaremos com o auxílio do material concreto pela utilização de cubinhos feitos de madeira durante todo o desenvolvimento das atividades. Os cubinhos serão distribuídos para os estudantes no início do trabalho com a resolução das cinco tarefas propostas. Acreditamos que este tipo de trabalho representa uma proposta para o ensino de matemática não só dos conteúdos aqui abordados, mas podem ser repensados para diversos outros conteúdos da Matemática nos diversos níveis de ensino.

2 As atividades propostas

2.1 Atividade 1. Dobrando e Triplicando

A atividade inicial[1] consta de uma tabela que deveria ser preenchida pelos professores. Nesta tabela, estão desenhadas diferentes figuras espaciais formadas com cubinhos unitários. Solicita-se que os alunos completem a tabela calculando o perímetro e a área do topo, a área da superfície e o volume das figuras espaciais desenhadas. Cada figura da tabela aparece novamente com suas dimensões dobradas e, então, pede-se para completar os dados desta nova figura. Por fim, propõe-se aos alunos que desenhem as figuras iniciais triplicando todas as dimensões e, novamente, eles devem calcular o perímetro e a área do topo, a área da superfície e o volume das figuras triplicadas.

O objetivo desta atividade é evidenciar as diferenças entre perímetro, área e volume de figuras. A superação de freqüentes confusões relacionadas ao cálculo de perímetros, áreas e volumes é fundamental para o desenvolvimento de habilidades espaciais. O uso de cubinhos unitários permite a participação ativa dos estudantes pela manipulação dos objetos. Além disso, o modelo concreto auxilia o desenvolvimento do raciocínio espacial, uma vez que seu uso aproxima significativamente o modelo representativo do espaço tridimensional propriamente dito.

2.2 Atividade 2. O Problema de Pintura de Faces

A idéia desta atividade[2] consiste em um trabalho ativo dos alunos, através de uma abordagem investigativa, na busca por padrões numéricos que relacionam forma e quantidade. O estudo consiste na contagem de cubos acoplados entre si e o cálculo do número de faces pintadas dos mesmos após a pintura de sua superfície externa.

A quantidade de cubos acoplados vai crescendo horizontalmente e gradativamente e os estudantes são convidados a investigar padrões que relacionem a quantidade de cubos com o número de faces pintadas. Os primeiros exemplos apresentam-se já resolvidos, com o objetivo de auxiliar o aluno a compreender o processo de contagem para que ele possa, em seguida, continuá-lo. Inicialmente é fornecida a quantidade de cubinhos acoplados e pede-se que os estudantes calculem a quantidade de faces pintadas, e, em seguida, sugerimos uma generalização do cálculo. Posteriormente é pedido que os alunos efetuem o processo inverso, ou seja, dado o número de faces pintadas, pede-se que eles determinem a quantidade de cubinhos utilizados. Por último é pedido, também, uma generalização para este cálculo.

A atividade relaciona geometria e álgebra e tem o objetivo de conduzir o aluno do processo de contagem para a busca de generalização. Nessa direção, a álgebra ganha significado concreto, ao mesmo tempo em que se desenvolve a percepção espacial através do contato com os cubos produzidos com material concreto.

2.3 Atividade 3. Cubos, cubos e mais cubos

Após o desenvolvimento de habilidades espaciais promovidas pelas atividades 1 e 2, e a iniciação do trabalho investigativo possibilitado na realização da atividade 2, pretende-se propor um problema de investigação um pouco mais aberto. Inicia-se a atividade[3] com a construção de um cubo formado por cubinhos unitários. A idéia consiste em imaginar a pintura da superfície externa do cubo, investigando a quantidade de cubinhos unitários que ficarão com 0, 1, 2 e 3 faces pintadas. O problema é estendido para o cubo e e, finalmente, é pedido aos alunos que busquem uma generalização do problema para um cubo.

[1]Adaptada de: Fagan (2005), Creating an Environment for Learning with Understanding: The Learning Principle, Mathematics Teaching in the Middle School, vol 11, no 1

[2]Adaptada de: Fagan (2005), Creating an Environment for Learning with Understanding: The Learning Principle, Mathematics Teaching in the Middle School, vol 11, no 1

[3]Adaptada de: Veloso, Fonseca, Ponte & Abrantes (Orgs.), Ensino da Geometria no Virar do Milénio, Lisboa: DEFCUL, 1999.

2.4 Atividade 4. Investigando Esqueleto de Cubos

Após o desenvolvimento de habilidades espaciais promovidas pelas atividades 1 e 2, e a iniciação do trabalho investigativo possibilitado na realização da atividade 2, pretende-se propor um problema de investigação um pouco mais aberto. Inicia-se a atividade com a construção de um cubo $3 \times 3 \times 3$ formado por cubinhos unitários. A idéia consiste em imaginar a pintura da superfície externa do cubo, investigando a quantidade de cubinhos unitários que ficarão com 0, 1, 2 e 3 faces pintadas. O problema é estendido para o cubo $4 \times 4 \times 4$ e $5 \times 5 \times 5$ e, finalmente, é pedido aos alunos que busquem uma generalização do problema para um cubo $n \times n \times n$.

2.5 Atividade 5. Quantos Cubos?

O exercício em questão[4] pode ser considerado de um nível um pouco mais avançado (em relação aos anteriores) e tem como objetivo aprofundar os conhecimentos trabalhados anteriormente. A tarefa consiste em contar os cubos de todos os tamanhos existentes no cubo $n \times n \times n$. Para facilitar o encaminhamento do raciocínio, pode-se partir da contagem de todos os cubos dentro de um cubo $1 \times 1 \times 1$, $2 \times 2 \times 2$, $3 \times 3 \times 3$, $3 \times 3 \times 3$, para que se possa, em seguida, propor uma conjectura para a quantidade de cubos no cubo $n \times n \times n$.

3 O que se espera com a aplicação das atividades propostas

O objetivo deste trabalho é permitir que os estudantes percorram todas as etapas necessárias à realização de uma atividade investigativa na concepção dos autores já citados, são elas: 1- reconhecimento, exploração de uma situação problemática e formulação de questões; 2- organização de dados, formulação de questões e afirmações sobre uma conjectura; 3- realização de testes e refinamento de uma conjectura; 4- justificação de uma conjectura e avaliação do raciocínio ou resultado do raciocínio.

É esperado com o desenvolvimento das atividades que os estudantes (alunos e/ou professores) desenvolvam um trabalho investigativo, passando por todas as etapas, consideradas por Ponte, Brocardo e Oliveira, essenciais na realização de um trabalho genuinamente investigativo. Salientando a importância desse tipo de trabalho no contexto da geometria espacial, vale destacar que o bom desempenho dos estudantes nas tarefas propostas certamente irá contribuir para o desenvolvimento de algumas habilidades espaciais. Ainda sobre o desenvolvimento da visualização de figuras espaciais é importante destacar que a utilização do material concreto deve favorecer o trabalho com tais habilidades.

Um olhar mais abrangente sobre o desenvolvimento das atividades de resolução de problemas e investigação pelos estudantes nos permite afirmar que estes poderão vivenciar processos de construção matemáticos característicos da própria natureza desta ciência, no sentido de que a Matemática possui características de exploração, formulação de conjecturas e justificação destas conjecturas em sua formação. Esta vivência certamente irá possibilitar aos alunos e professores participantes o trabalho com a capacidade de justificação e validação dos resultados, característica importante para um bom entendimento da disciplina. Acreditamos que o trabalho irá influenciar positivamente direta e indiretamente a sala de aula dos professores e a concepção dos alunos a respeito Desta ciência. Supõe-se que trabalhos como este possam auxiliar professores e alunos a compreender a natureza da Matemática e, até mesmo, levá-los a se sentir produzindo Matemática.

[4] Adaptada de Litwiller e Duncan (1994), Problemas Geométricos de Contagem, Aprendendo e Ensinando Geometria, Atual Editora.

Anexos

Atividade 1

Complete a tabela com o auxílio dos cubinhos disponíveis, dobrando e triplicando todas as dimensões (comprimento, largura e altura) das figuras originais.

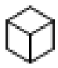
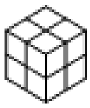
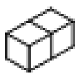
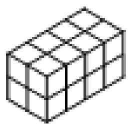
Figura	Perímetro do Topo (em unidades)	Área do Topo (em unidades quadradas)	Área da Superfície (em unidades quadradas)	Volume, nº de Cubos (em unidades cúbicas)
1. 				
 Dobrado				
Triplicado				
2. 				
 Dobrado				
Triplicado				

Figura 1: Atividade 1

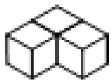
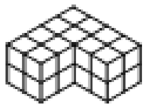
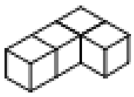
Figura	Perímetro do Topo (em unidades)	Área do Topo (em unidades quadradas)	Área da Superfície (em unidades quadradas)	Volume, nº de Cubos (em unidades cúbicas)
3. 				
 Dobrado				
Triplicado				
4. 				
Dobrado				
Triplicado				

Figura 2: Atividade 1 – parte 2

Com relação à tabela que você acabou de preencher, responda:

a) Observando a 2ª coluna da tabela, o que acontece com o perímetro ao se duplicar e triplicar uma determinada figura? Justifique.

b) Você consegue perceber outras regularidades observando as linhas ou colunas desta tabela? Em caso afirmativo, explique essas regularidades.

Atividade 2

Deseja-se pintar as faces visíveis (externas) de cubinhos unitários sempre após a união gradativa de mais um cubinho na direção horizontal. A figura a seguir mostra como devemos proceder.

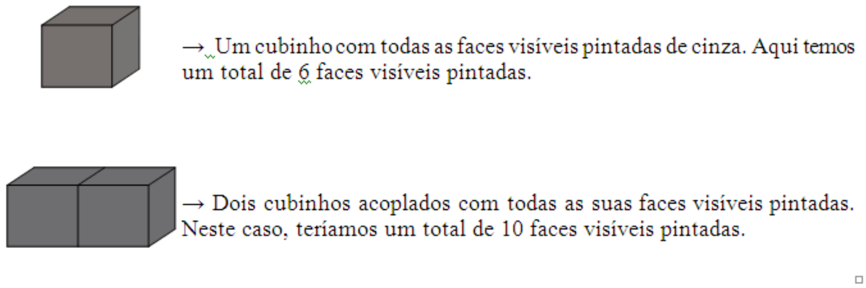


Figura 3: Atividade 2

1. E se tivéssemos três cubinhos acoplados, quantas faces visíveis teríamos para pintar? Faça o desenho para te ajudar a pensar.
2. E se tivéssemos quatro cubinhos acoplados, quantas faces visíveis teríamos para pintar?
3. E se tivéssemos cinco cubinhos acoplados, quantas faces visíveis teríamos para pintar?
4. E se tivéssemos quinze cubinhos acoplados, quantas faces visíveis teríamos para pintar?
5. E se tivéssemos 66 cubinhos acoplados, quantas faces visíveis teríamos para pintar?
6. Investigue como faríamos se tivéssemos n cubinhos acoplados.
7. E se você soubesse o número de faces visíveis que ficam pintadas, saberia dizer quantos cubinhos foram acoplados? Por exemplo, se tivéssemos um total de 86 faces visíveis pintadas, quantos cubinhos estariam acoplados?
8. E se tivéssemos um total de 286 faces visíveis pintadas, quantos cubinhos estariam acoplados? Justifique sua resposta.

Atividade 3

Cubos de diferentes dimensões são construídos a partir de cubinhos unitários (arestas mendindo 1u.c.). Imagine que queremos pintar estes cubos exteriormente de cinza conforme está representado abaixo:

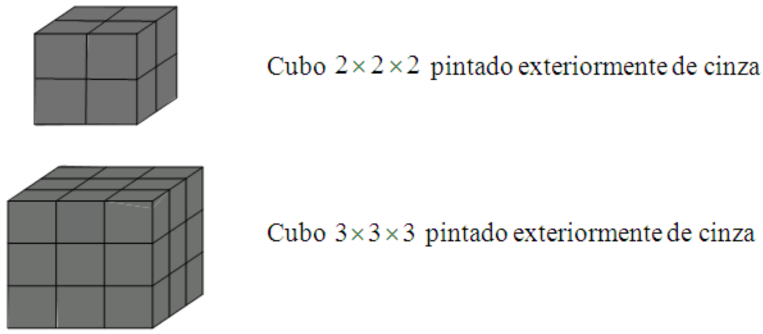


Figura 4: Atividade 3

No caso do cubo $3\times3\times3$ pintado exteriormente, quantos cubinhos unitários ficam com uma única face pintada? E com duas? E com três?... E com nenhuma?

Investigue o que aconteceria se pintássemos exteriormente um cubo $4\times4\times4$. E se pintássemos um cubo $5\times5\times5$ construído da mesma forma?

Você pode utilizar os cubinhos unitários disponíveis para auxiliar a sua investigação. Organize uma tabela com as suas descobertas sobre o número de cubinhos com 0, 1, 2, ... faces pintadas num cubo $3\times3\times3$, $4\times4\times4$ e $5\times5\times5$. Pense o que aconteceria em um cubo $n\times n\times n$. Anote as suas conclusões.

Atividade 4

Um esqueleto de cubo é uma forma que preserva a estrutura sem que seja necessário o seu preenchimento total formando um objeto maciço. As figuras abaixo mostram alguns exemplos de esqueletos de cubos.

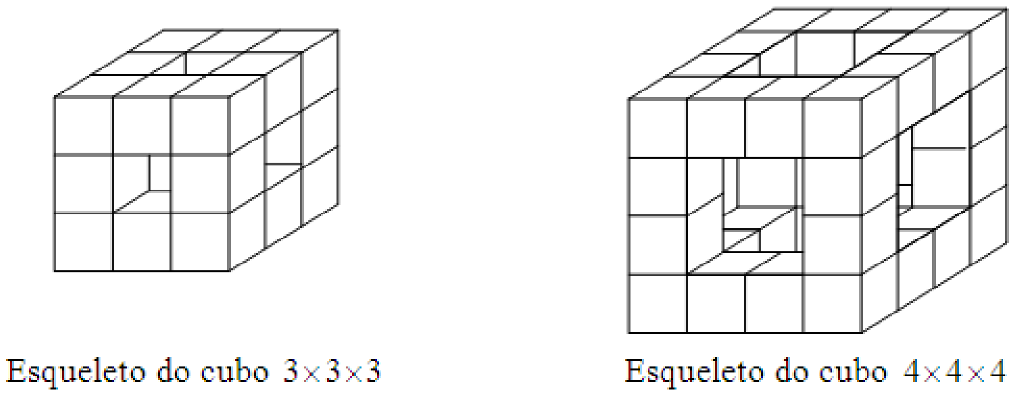


Figura 5: Atividade 4

Com base nessa idéia, responda as seguintes perguntas:

1. A próxima figura segue o mesmo padrão de formação?

2. A estrutura pode ainda ser chamada de cubo?

3. De quanto é acrescida a aresta para a formação deste próximo padrão?

4. É possível calcular o volume deste objeto?

5. Desenhe o esqueleto do cubo $2 \times 2 \times 2$. O que você pode observar?

6. Quantos cubinhos são necessários para formar o esqueleto do cubo $3 \times 3 \times 3$?

7. Quantos cubinhos são necessários para formar o esqueleto do cubo $4 \times 4 \times 4$?

8. Pode-se encontrar uma generalização que lhe permita calcular a quantidade n de cubinhos necessários para formar o esqueleto de um cubo $n \times n \times n$?

Atividade 5

Queremos contar os cubos de todos os tamanhos (medidas inteiras) formados nos cubos $1 \times 1 \times 1$, $2 \times 2 \times 2$, $3 \times 3 \times 3$, $4 \times 4 \times 4$, ...

Vamos por etapas:

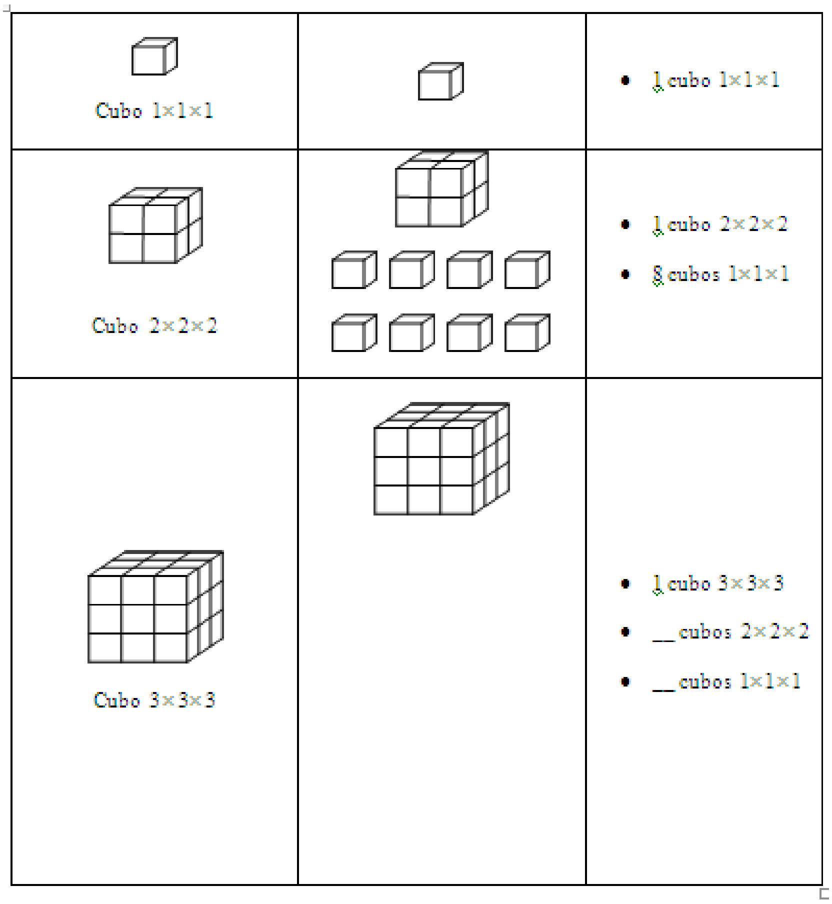


Figura 6: Atividade 5

Você seria capaz de prever quantos cubos (com a aresta de medida inteira) de todos os tamanhos existem em um cubo $n \times n \times n$? Anote suas conclusões e justificativas.

Referências

[1] ABRANTES, P - Investigações em Geometria na sala de Aula. In VELOSO, E. et al (Eds). *Ensino da geometria no virar do milênio.* Lisboa: DEFCUL, 1999.

[2] BROCARDO, J. - *As Investigações na Sala de Aula de Matemática: um projecto curricular no 8.º ano.* Tese (Doutorado). Universidade de Lisboa, 2001. Disponível em ¡http://ia.fc.ul.pt ¿Acesso em 18 de julho. 2008.

[3] OLIVEIRA, H. - *Actividades de Investigação na Aula de Matemática: aspectos da prática do professor.*Dissertação (Mestrado). Universidade de Lisboa, 1998. Disponível em ¡http://ia.fc.ul.pt ¿Acesso em 18 de julho. 2008.

[4] ONUCHIC, L. R. - Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. BICUDO, M.A.V. (org.) *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas.* São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

[5] POLYA, G. - Dez mandamentos para professores. *Revista do Professor de Matemática.* Rio de Janeiro, n.10, p. 2-10, 1987.

[6] POLYA, G. - *A Arte de Resolver Problemas.* Rio de Janeiro: Interciência, 1977.

[7] PONTE, J. P., BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. - *Investigações Matemáticas na Sala de Aula.* Belo Horizonte: Autêntica, 2006.