V Bienal da SBM
Sociedade Brasileira de Matemática
UFPB - Universidade Federal da Paraíba
18 a 22 de outubro de 2010

O TERCEIRO SEGMENTO

A. Zumpano * & J. C. E. Santo ,†

Dados dois segmentos de medidas a e b, queremos construir um terceiro segmento de medida c que guarda a seguinte relação homotética: c está para b assim como b está para a. A construção do terceiro segmento não é tão fácil! Depende das relações métricas de um triângulo retângulo. Construa com régua e compasso o terceiro segmento c com a propriedade descrita acima. (Sugestão: a altura de um triângulo retângulo divide a hipotenusa em dois segmentos; o maior deles é o terceiro segmento procurado).

Suponha que queiramos construir o terceiro segmento da maneira mais elementar possível, qual seja; emendar os dois segmentos dados. (Gnômon). Será que existe alguma proporção que permita essa construção?

Encontremos uma proporção entre a e b de forma que o terceiro segmento c seja igual à soma $c = a + b$ e ainda, de forma que c esteja para b assim como b estiver para a. Digamos que $b = \lambda a$; então, $\dfrac{c}{b} = \dfrac{b}{a}$ se, e somente se $1 + \lambda = \lambda^2$. A única solução positiva dessa equação é

$$\lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Denotamos esse número pela letra grega φ. Imagens que guardam essa proporção em suas dimensões, por uma razão histórica, cultural ou fisiológica, têm um sabor estético singular.

Euclides, em sua obra "Os Elementos" denomina a razão φ de "média e extrema razão". No Renascimento, por influência de Kepler, ficou conhecida como razão áurea ou ainda, número de ouro, divina proporção. A denominação de Euclides é semanticamente vazia nesse contexto.

Surpreendentemente a proporção encontrada acima também permite uma subtração espetacular: $(b - a)$ estará para a assim como a estiver para b, ou seja, $a = \lambda(b - a)$.

Assim, pode-se crescer emendando pedaços sem perder a proporção intrínseca. Ainda, a subtração de dois segmentos que estão em proporção áurea também está em proporção áurea com o primeiro, assim como a soma está em proporção áurea com o segundo! Podemos esticar e encolher

*Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Matemática, MG, Brasil, zumpano@mat.ufmg.br
†Universidade Federal de Ouro Preto, Departamento de Matemática, MG, Brasil, jcesares@iceb.ufop.br

segmentos com atividades aritméticas de adição e subtração. A ubiqüidade da Razão Áurea talvez encontre aí sua gênese. O número φ, o único que proporciona simultaneamente um crescimento com característica aritmética, através da soma dos dois termos anteriores para obter o terceiro, e também geométrica, ou seja, homotética, com a razão entre os termos consecutivos igual ao número φ. Por esse motivo muito peculiar podemos nos referir ao número φ como aquele que gera uma homotetia aritmética.

Para cada par de números reais (α, β) seja $F(\alpha, \beta)$ o conjunto de todas as seqüências de números reais (u_n) tais que:

$$\alpha u_n + \beta u_{n+1} = u_{n+2} \text{ para todo } n = 0, 1, 2...$$

Verifica-se facilmente que $F(\alpha, \beta)$ é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais com a soma $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$ e a multiplicação por escalar $\lambda(u_n) = (\lambda u_n)$.

Dois vetores (u_n) e (v_n) em $F(\alpha, \beta)$ serão linearmente independentes se, e somente se, os vetores (u_0, u_1) e (v_0, v_1) forem linearmente independentes em $\mathbb{R}^2$. O espaço $F(\alpha, \beta)$ tem dimensão 2 qualquer que seja o par (α, β) de números reais.

Os espaços $F(\alpha, \beta)$ são denominados espaços de Fibonacci e seus elementos são as seqüências de Fibonacci. Comumente os elementos de $F(1, 1)$ são denominados seqüências de Lucas e, em particular, a seqüência de Lucas cujos dois primeiros termos são iguais a 1 é chamada de seqüência de Fibonacci, e seus termos são os números de Fibonacci. Não faremos aqui essas distinções, para nós uma seqüência de Fibonacci será qualquer elemento de um dos espaços $F(\alpha, \beta)$, ou seja, uma seqüência de números reais (u_n) é denominada seqüência de Fibonacci se cada um de seus termos, a partir do terceiro, for a combinação linear dos dois termos anteriores, combinação esta, estabelecida por um par (α, β) de números reais.

Faremos em seguida uma análise da estrutura global das seqüências de Fibonacci. O conhecimento dessa estrutura propicia deduções simples e elementares de resultados clássicos sobre o assunto em questão.

O discriminante de um espaço de Fibonacci $F(\alpha, \beta)$ é o número

$$\Delta = \beta^2 + 4\alpha.$$

Uma base homotética de um espaço de Fibonacci é uma base formada por duas seqüências em progressão geométrica, isto é, duas seqüências em progressão geométrica e linearmente independentes.

Perguntamos: por que seria importante a existência de uma base homotética? Simples: conhecemos o comportamento dinâmico de progressões geométricas.

Sejam a e b dois números reais não necessariamente distintos. Queremos um terceiro número c formado pela combinação linear de a e b estabelecida pelo par (α, β) cuja proporcionalidade entre ele e b seja a mesma proporcionalidade entre b e a. Em linguagem estreita e menos elucidativa temos:

$$\begin{aligned} b &= \lambda a \\ c &= \alpha a + \beta b \\ c &= \lambda^2 a. \end{aligned}$$

A proporcionalidade só será preservada se a homotetia satisfizer a equação

$$\alpha + \beta\lambda = \lambda^2.$$

Suponha que o discriminante de um espaço de Fibonacci $F(\alpha, \beta)$ seja positivo. Sendo assim, a equação $\alpha + \beta\lambda = \lambda^2$ possui duas raízes distintas; digamos, λ_1 e λ_2. Denotemos por λ_1 aquela de maior valor absoluto e por λ_2 a de menor. As raízes dão origem a uma base homotética para $F(\alpha, \beta)$, a saber, $(\lambda_1)^n$ e $(\lambda_2)^n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$

A solução geral será

$$u_n = x(\lambda_1)^n + y(\lambda_2)^n.$$

Note que a raiz λ_2 pode ser nula. Neste caso a seqüência $(\lambda_2)^n = (1, 0, 0, ...)$, ou seja, estamos convencionando que $0^0 = 1$. Trata-se aqui evidentemente do espaço $F(0, \beta)$ com $\beta \neq 0$.

Se as raízes não forem simétricas, então para toda seqüência (u_n) em $F(\alpha, \beta)$, com coordenada x diferente de zero evidentemente, temos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda_1$$

O caso mais conhecido é quando $\alpha = \beta = 1$, ou seja, o espaço $F(1, 1)$. A base homotética deste espaço é formada pelas seqüências $(\varphi)^n$ e $(\psi)^n$, em que $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ é a razão áurea e $\psi = -\dfrac{1}{\varphi}$ é a outra raiz. Temos aqui a famosa convergência da seqüência formada pelos quocientes dos números de Fibonacci consecutivos: para todo elemento (u_n) em $F(1, 1)$ a seqüência $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ converge para φ, o famigerado número áureo.

Se as raízes forem simétricas, então $\lambda_2 = -\lambda_1$ e a solução geral será dada pela fórmula abaixo:

$$u_n = x(\lambda_1)^n + y(-\lambda_1)^n = [x + (-1)^n y](\lambda_1)^n.$$

Vemos que a seqüência dos quocientes de termos sucessivos não converge, exceto quando $x = 0$ ou $y = 0$. Note que raízes simétricas implicam necessariamente a ausência do escalar β. Neste caso estamos tratando do espaço $F(\alpha, 0)$ com $\alpha > 0$.

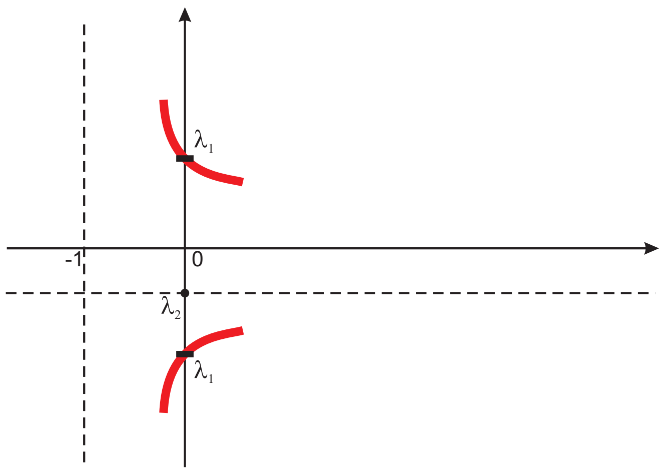
A dinâmica das seqüências dos quocientes de termos sucessivos é bem intrigante.

Vejamos:

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{x(\lambda_1)^{n+1} + y(\lambda_2)^{n+1}}{x(\lambda_1)^n + y(\lambda_2)^n} \\
&= \frac{\lambda_1 + \lambda_2 \dfrac{y}{x}\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n}{1 + \dfrac{y}{x}\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n} \\
&= \frac{\lambda_1 + \lambda_2 t}{1+t}.
\end{aligned}$$

Logo, a dinâmica da convergência é determinada pela função acima quando t converge para zero. Supondo as raízes não-simétricas com $\lambda_2 \neq 0$ temos dois casos: se $\beta > 0$, então $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$; caso β seja negativo, então ambas serão negativas. Lembre que λ_1 é a maior raiz em valor absoluto.

O desenho abaixo é elucidativo: em vermelho temos o gráfico da função $\dfrac{\lambda_1 + \lambda_2 t}{1+t}$ nos dois casos.



Vemos que quando as raízes têm sinais contrários t tende a zero oscilando e isso implica que a seqüência dos quocientes tende a λ_1 também oscilando. Mais precisamente, a subseqüência dos termos pares e a subseqüência dos termos ímpares são monótonas: uma crescente e a outra decrescente ou vice-versa, dependendo dos sinais de x e y. No caso das raízes com mesmo sinal, ambas negativas, temos convergência monótona, crescente ou decrescente, dependendo dos sinais de x e y.

Temos aqui a explicação do caráter oscilatório da seqüência dos quocientes dos números sucessivos de Fibonacci convergindo para o número áureo φ, pois estas são precisamente as seqüências do espaço $F(1,1)$.

Vamos supor agora que o discriminante seja nulo. Neste caso temos apenas uma raiz, digamos λ. Esta deficiência de raízes impede a existência de uma base homotética, pois um elemento do espaço $F(\alpha,\beta)$ é uma progressão geométrica se, e somente se a razão da progressão for uma raiz da equação $\alpha+\beta\lambda=\lambda^2$. Podemos supor que essa única raiz não é nula, pois $F(0,0)$ é um espaço que não tem interesse: todas as seqüências de $F(0,0)$ são da forma $(a,b,0,0,...)$. Devemos buscar outro elemento, além da seqüência (λ_n), para formar uma base do espaço. Não pode ser um outro elemento qualquer: algum controle na dinâmica da seqüência faz-se necessário. Para isso observamos:

$$\begin{aligned}(n+2)\lambda^2 &= n\lambda^2+2\lambda^2\\ &= n\lambda^2+\beta\lambda\\ &= n(\alpha+\beta\lambda)+\beta\lambda\\ &= n\alpha+\beta(n+1)\lambda.\end{aligned}$$

Donde,

$$\alpha n\lambda^n+\beta(n+1)\lambda^{n+1}=(n+2)\lambda^{n+2} \text{ para } n=0,1,2,\cdots$$

Assim, vemos que as seqüências $(n\lambda^n)$ e (λ^n) formam uma base para $F(\alpha,\beta)$.
A solução geral será:

$$\begin{aligned}u_n &= x(n\lambda^n)+y(\lambda^n)\\ &= (xn+y)\lambda^n.\end{aligned}$$

A solução geral nos mostra que as seqüências dos quocientes de termos sucessivos, todas elas convergem para a raiz λ de maneira crescente ou decrescente. Não há jamais oscilação.

O caso em que as duas raízes são complexas é tratado da seguinte maneira: somando e subtraindo as duas seqüências geradas pelas raízes conjugadas z e $\overline{z}$ obtemos duas seqüência linearmente independentes no espaço $F(\alpha,\beta)$, quais sejam,

$$\{1,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\} \text{ e } \{0,b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\}.$$

Em que a_n é a parte real de z^n e b_n é a sua parte imaginária.

Não há, portanto uma base homotética, mas uma base bem razoável é dada por:

$$(r^n \cos(n\theta)) \text{ e } (r^n \operatorname{sen}(n\theta)), n = 0, 1, 2, \cdots$$

A existência de raízes complexas permite fenômenos curiosos: o espaço $F(-1, -1)$ só possui seqüências de fibonacci periódicas, todas com período 3.

Uma coisa é certa: se a raiz complexa z for unitária ($|z| = 1$) e seu argumento θ for divisor de 360, então todas as seqüências de $F(\alpha, \beta)$ serão periódicas de período igual a $360/\theta$. (Divisor significa que o número $360/\theta$ é um número natural, ou seja, θ é um submúltiplo de 360. Logo, os valores para θ são: $\theta = 360/k, k = 1, 2, 3, \cdots$). Este é um fato muito simples de se perceber. Temos que a raiz complexa z será unitária se, e somente se $\alpha = -1$, pois

$$\begin{aligned} |z|^2 &= \frac{\beta^2 + |\beta^2 + 4\alpha|}{4} \\ &= \frac{\beta^2 - \beta^2 - 4\alpha}{4} \\ &= -\alpha. \end{aligned}$$

No caso do espaço $F(-1, -1)$ vemos que o argumento da raiz z é $\theta = 60^o$. Por isso o período é 3.

O quarto escuro consiste na existência de seqüências periódicas fora dessas condições! Se é que há! Também não há como conhecer a dinâmica das seqüências dos quocientes de termos sucessivos!

A razão áurea do espaço $F(\alpha, \beta)$ é um número real $r > 1$ tal que:

- A progressão geométrica (r^n) pertence ao espaço $F(\alpha, \beta)$.
- A progressão geométrica inversa (r^{-n}) pertence ao espaço $F(\alpha, -\beta)$.

Vamos verificar que um espaço de Fibonacci $F(\alpha, \beta)$ possui razão áurea se, e somente se $\alpha = 1$ e $\beta > 0$.

Para que a seqüência (r^n) pertença ao espaço $F(\alpha, \beta)$ é necessário e suficiente que r seja raiz da equação $\alpha + \beta r = r^2$. Para que (r^{-n}) pertença a $F(\alpha, -\beta)$ é necessário e suficiente que r seja raiz da equação $\alpha r^2 - \beta r = 1$. Daí, concluímos que $\alpha = 1$ e que $1 + \beta r = r^2$. Ou seja,

$$r = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4}}{2}.$$

Uma simples inspeção na igualdade nos mostra que $r > 1$ se, e somente se $\beta > 0$. Logo, o espaço $F(\alpha, \beta)$ possui uma razão áurea se, e somente se, $\alpha = 1$ e $\beta > 0$. Evidentemente a razão áurea é única, visto que uma raiz é positiva e a outra é negativa e maior do que -1. Temos assim em $F(1,\beta)$ a mesma situação de $F(1,1)$. Não podemos então defender, pelo menos com os argumentos utilizados, a singularidade do número áureo φ e seu dual $\varphi = -\frac{1}{\psi}$, pois a raiz ($\beta$-áurea) r possui, para todo β positivo, as mesmas propriedades enunciadas para a proporção divina. Se denominarmos por s a outra raiz teremos que $s = -\frac{1}{r}$. A seqüência (r^n) com n variando de menos infinito a mais infinito é uma seqüência geométrica de razão r e homoclínica, isto é, não inicia nem termina, e cada termo é a combinação linear dos dois termos anteriores determinada pelo par $(1,\beta)$. Exatamente como a seqüência (φ^n) de razão áurea φ, em que $\beta = 1$.

Exercícios

(1) Construa com régua e compasso o terceiro segmento mencionado no primeiro parágrafo do texto. Relacione-o com a média geométrica.

(2) Qual é a razão áurea do espaço $F(1,1)$?

(3) Esboce o gráfico da função $f(t) = \dfrac{a+bt}{1+t}$ para $t > -1$ e $|a| > |b| > 0$.

(4) Conclua que a seqüência do quociente dos termos consecutivos de uma seqüência em $F(1,\beta)$, $\beta > 0$, converge de maneira alternada e monótona para a razão áurea do respectivo espaço, isto é, a seqüência $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ converge para r, em que r é a razão áurea do espaço $F(1,\beta)$, os termos pares são crescentes e os termos ímpares são decrescentes, ou vice-versa. Esse fato é verdadeiro para todas as seqüências de $F(1,\beta)$ que não estão em um determinado subespaço próprio de $F(1,\beta)$. Descreva esse subespaço.

(5) Encontre uma base para cada um dos seguintes espaços de Fibonacci: $F(0,0)$; $F(0,1)$; $F(1,0)$; $F(-1,2)$ e $F(-1,1)$. Calcule o discriminante de cada um desses espaços.

(6) Verifique que toda seqüência em $F(-1,1)$ tem período 6.

(7) Descubra seqüências periódicas em $F(-1,\beta)$, com $-2 < \beta < 2$.

(8) Descubra seqüências periódicas em $F(\alpha,\beta)$, com $\beta^2 + 4\alpha < 0$ e $\alpha \neq -1$.

(9) Gnômon. Pesquise o significado dessa palavra no contexto da geometria e do crescimento do náutilo. Tente explicar o motivo da denominação gnômon para um relógio de sol. Compare reflexivamente gnômon, gnose, gnomo e ctônico. Consulte um dicionário etimológico. Procure também o significado da palavra etimologia. Leia o mito de Er no Livro X da República de

Platão. Pesquise ainda todos os nomes que aparecem no poema abaixo e o aprecie.

Cinqüenta e quatro anos mais velho do que Santo Tomás de Aquino.
Fibonacci não pôde ler a Suma Teológica.
O Reino de Nápoles não dista muito de Pisa.
Que absurdo!
Proximidade geográfica e temporal não se consubstanciam.
Também não lhe foi possível ouvir o Contraponto.
Estabat Mater, Pergolesi; Nápoles, Século XVIII!
A virgem Cloto preenche lacunas na felicidade dos de hoje.
Láquesis amplia essas lacunas dos de ontem.
Átropos garante que sempre haverá lacunas para preencher e para ampliar.