V Bienal da SBM
Sociedade Brasileira de Matemática
UFPB - Universidade Federal da Paraíba
18 a 22 de outubro de 2010

IRRACIONAIS: QUE BICHO É ESSE?

Alessandra da Silva Ferreira * & Lucimarcos José da Silva †

1 Números Racionais

Antes de começarmos o estudo dos números irracionais é importante primeiro saber o que é um numero racional. Todo mundo que já ouviu falar que os números racionais são números que podem ser escritos na forma p/q onde q e p são inteiros e ainda com uma pequena restrição, porem muito importante, de que q deve ser diferente de zero. Esses números racionais são conhecidos do homem desde muito tempo, mas não com a simbologia atual. Os povos da antiguidade os conheciam de uma forma geométrica. Então vamos agora à abordagem de um tipo desses números que são conhecidos por frações decimais, que são números racionais que pode ter seu denominador escrito como uma potência de dez. Por exemplo, temos:

$$\frac{13}{10}, \frac{31}{100}, \frac{327}{10000}$$

1. Encontre frações decimais equivalentes às frações $\frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{1}{20}, \frac{7}{40}$

2. A fração $\frac{2}{3}$ pode ser escrita como uma fração decimal? E a fração $\frac{4}{15}$? Justifique a sua resposta no quadro abaixo. Formule respostas para as seguintes questões:

*Universidade Federal de Pernambuco , DMAT, PE, Brasil, Alessandra.sferreira@ufpe.br
†Universidade Federal de Pernambuco , DMAT, PE, Brasil, lucimarcos.silva@ufpe.br

3. Que critério devemos usar para obtermos uma fração decimal equivalente a uma fração dada, caso ela exista?

4. Explique a igualdade $\frac{1}{4} = 0,25$. Esta é a mudança da representação na forma de fração para a forma decimal.

5. Qual é a fração decimal equivalente à fração $\frac{1}{4}$?

6. Quais números decimais podem ser escritos como frações decimais?

7. Sabemos que a fração $\frac{2}{11}$ não pode ser escrita como uma fração decimal. Use o algoritmo da divisão para efetuar a divisão de 2 por 11, com uma aproximação de décimos de milésimos.

Que erro se comete se utilizarmos o quociente desta divisão em vez da fração $\frac{2}{11}$? Se tomarmos aproximações

além dos décimos de milésimos, o que vai acontecer com o resto?

O que se pode concluir a partir dos questionamentos acima?

Do que foi visto acima, podemos dizer que existem números decimais com infinitas casas decimais periódicas. Chamamos esses números de dízimas periódicas.

Formalmente podemos dizer que um número decimal $\alpha = 0, a_1a_2 \ldots$ chama-se uma dízima periódica simples, de período $\alpha = 0, a_1a_2 \ldots a_n$, quando os primeiros p algarismos após a vírgula se repetem indefinidamente na mesma ordem. As dízimas periódicas são chamadas de compostas quando após a vírgula há uma parte que não se repete, seguida por uma parte periódica.

Quando escrevemos $\frac{2}{11} = 0,1818\ldots$ não está se afirmando que $\frac{2}{11} = 0,1818$. As reticências no fim do símbolo $0,1818\ldots$ significam que ele não representa uma única fração decimal mas uma sequência infinita de frações decimais $0,18;\ 0,1818;\ 0,181818$; etc., as quais são valores próximos de $\frac{2}{11}$. A periodicidade só aparece quando se procura escrever uma fração não decimal sob a forma decimal.

Há uma dificuldade em se determinar o período de algumas dízimas periódicas. Uma calculadora não nos ajuda muito, pois se efetuarmos uma divisão direta, a máquina nos mostrará entre 8 e 12 dígitos, dependendo da máquina que se está utilizando. Se quisermos usar um computador é necessário fazer um programa usando uma linguagem de programação científica para determinar tal período. Por exemplo, a fração $\frac{1}{17}$ possui 16 algarismos no período e a fração $\frac{1}{43}$ possui 42 algarismos na parte periódica.

O problema que temos que resolver agora é: dada uma dízima periódica, determinar a fração que a gera, chamada de fração geratriz da dízima.

Um número decimal $\alpha = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, pode ser escrito na forma:

$$\alpha = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \ldots$$

Por exemplo, $5,672 = 5 + \frac{6}{10} + \frac{7}{100} + \frac{2}{1000} = \frac{5672}{1000}$.

Da mesma forma, se $\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ for uma dízima periódica, pode-se também representá-lo como uma fração.

Comecemos com o número $\alpha = 0,999\ldots$. Este número pode ser escrito da forma:

$$\alpha = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots$$

Afirmamos que $\alpha = 1$. Com efeito, os valores aproximados de α são:

$\alpha_1 = 0,9;\ \alpha_2 = 0,99;\ \alpha_3 = 0,999$, etc. Dessa forma, $1 - \alpha_1 = 0,1;\ 1 - \alpha_2 = 0,01;\ 1 - \alpha_3 = 0,001$ e, mais geralmente, $1 - \alpha_n = 10^{-n}$.

Sendo assim, tomando n suficientemente grande, a diferença $1 - \alpha_n$ pode tornar-se tão pequena quanto se deseje. Portanto, os números decimais $\alpha_n = 0,999...9$ são valores cada vez mais próximos de 1, ou seja, têm 1 como limite.

A igualdade ... costuma causar perplexidade a algumas pessoas. A maneira de dirimir o aparente paradoxo é esclarecer que o símbolo $0,999\ldots$ na realidade significa o número cujos valores aproximados são $0,9;\ 0,99;\ 0,999$; etc. E, como vimos acima, esse número é 1.

Encaremos a igualdade $1 = 0,999\ldots$ de outra maneira.

Representemos a dízima $0,999\ldots$ por x, isto é:

$$x = 0,999\ldots \qquad (1),$$

Multiplicando ambos os membros por 10 obtemos:

$$10x = 9,999\ldots = 9 + 0,999\ldots$$

Subtraindo-se a equação (1) desta, vamos ter:

$$9x = 9\ldots \quad \text{ou} \quad x = 1$$

Isto é mais argumento que justifica a igualdade $1 = 0,999\ldots$

Vamos, agora, estabelecer regras para a determinação da geratriz de uma dízima periódica.

Vimos acima que podemos escrever: $0,999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \cdots + \frac{9}{10^n} + \cdots = 1$.
Assim, dividindo-se todos os membros dessas igualdades por 9 obtemos:

$$0,111\ldots = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{10^n} + \cdots = \frac{1}{9}$$

Portanto, para todo algarismo a , tem-se

$$0,aaa\ldots = \frac{a}{10} + \frac{a}{100} + \cdots = \frac{a}{9}$$

- Escreva as frações geratrizes das dízimas $0,222\ldots,\ 0,777\ldots$

Observemos, agora, que $\frac{9}{10} + \frac{9}{100} = \frac{99}{100}, \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} = \frac{99}{10000}$, etc.
Assim,

$$1 = \left(\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2}\right) + \left(\frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4}\right) + \cdots = \frac{99}{100} + \frac{99}{100^2} + \cdots = 99\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \cdots\right).$$

Como,

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + \cdots = \frac{1}{99}$$

Daí resulta, por exemplo, que

$$0,373737\ldots = \frac{37}{100} + \frac{37}{100^2} + \frac{37}{100^3} + \cdots = 37\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + \cdots\right) = \frac{37}{99}$$

Enuncie a regra para a obtenção da fração geratriz de uma dízima periódica simples.

Tomemos agora o número $\alpha = 0,35172172172\ldots$, que é uma dízima periódica composta. Então,

$$\begin{aligned} 100\alpha &= 35,172172172\ldots = 35 + 0,172172172\ldots = 35 + \tfrac{172}{999} \\ &= \tfrac{35\cdot 999+172}{999} = \tfrac{35\cdot(1000-1)+172}{999} \\ &= \tfrac{3500+172-35}{999} = \tfrac{35172-35}{999} \end{aligned}$$

Logo $\alpha = \frac{35172-35}{99900}$.

- Enuncie a regra para a obtenção da fração geratriz de uma dízima periódica composta.

- Encontre a fração geratriz (irredutível) de cada uma das seguintes dízimas periódicas:

  [a)] $0,1212\ldots$

  [b)] $3,143143\ldots$

  [c)] $0,3200200\ldots$

  [d)] $23,40165165\ldots$

O que vimos acima pode ser resumido dizendo: "expressões decimais periódicas (simples ou composta) representam números racionais".

A recíproca deste fato, "todo número racional é representado por uma expressão decimal finita (que acaba em zeros) ou periódica", é mais simples de vermos.

Dividindo-se ambos os membros da igualdade $1 = 0,999\ldots$ por $10,\ 100,\ 1000,\ 10000$, etc., obtém-se:

$$\begin{array}{lcl} 0,1 & = & 0,0999\ldots \\ 0,01 & = & 0,00999\ldots \\ 0,001 & = & 0,000999\ldots \\ 0,0001 & = & 0,0000999\ldots \\ & \text{etc.} & \end{array}$$

$$3 = 2 + 1 = 2 + 0,999\ldots = 2,999\ldots$$

$$6,8 = 6,7 + 0,1 = 2 + 0,0999\ldots = 6,7999\ldots$$

$$0,102 = 0,101 + 0,001 = 0,101 + 0,000999\ldots = 0,101999\ldots$$

Se tivermos uma dízima com uma sucessão infinita de noves, podemos escrever reciprocamente:

$$0,46999\ldots = 0,46 + 0,00999\ldots = 0,46 + 0,01 = 0,47$$

$$18,0999\ldots = 18 + 0,0999\ldots = 18 + 0,1 = 18,1$$

Decidir quantas representações decimais existem para um dado número, é uma questão de interpretação. Além de escrever $0,43$ como $0,42999\ldots$, podemos também escrever este número nas formas:

$$0,430;\ 0,4300;\ 0,43000;\ 0,430000;\ldots$$

Estas, no entanto, são variações tão triviais de $0,43$, que não são contadas como representações distintas. Quando falamos da representação decimal infinita de um número, como $0,43$, queremos dizer $0,42999\ldots$ e não, $0,43000\ldots$

2 Números irracionais

Vamos agora tratar dos Números Irracionais.

Uma questão com que lidavam os matemáticos gregos do final do século V a.C., era a de comparar grandezas de mesma espécie, como dois segmentos de reta, duas áreas ou dois volumes. No caso de dois segmentos de reta AB e CD , dizer que a razão $\frac{AB}{CD}$ é um número racional $\frac{m}{n}$, significava para eles (e ainda significa para nós) que existe um terceiro segmento EF , tal que AB fosse m vezes EF e CD n vezes EF . No exemplo temos, $\frac{AB}{CD} = \frac{7}{3}$.

No tempo de Pitágoras ($580 - 500$ a.C., aproximadamente), pensava-se que os números racionais fossem suficientes para comparar segmentos de reta. Isto é, dados dois segmentos AB e CD seria sempre possível encontrar um terceiro segmento EF contido um número inteiro de vezes em AB e outro número inteiro de vezes em CD, situação esta que descrevemos, dizendo que EF é um *submúltiplo comum* de AB e CD. Uma simples reflexão nos mostra que esta idéia é bastante razoável: se EF não serve, tome outro segmento menor, e assim por diante.

A intuição geométrica parece dizer-nos que sempre existirá um certo segmento EF , talvez muito pequeno, satisfazendo aos propósitos desejados.

Dois segmentos nessas condições são ditos *comensuráveis*, justamente por ser possível medi-los ao mesmo tempo com a unidade EF. Embora seja geometricamente bastante intuitiva a idéia descrita acima, não é verdade que dois segmentos quaisquer sejam comensuráveis. Em outras palavras, existem segmentos AB e CD sem unidade comum EF. Estes são chamados de segmentos *incomensuráveis*. Esta descoberta representou um momento de crise no desenvolvimento da Matemática.

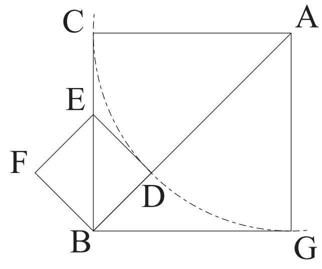
Foram os próprios pitagóricos que descobriram grandezas incomensuráveis e, ao que tudo indica, isto se fez através de um argumento geométrico, com o apresentado a seguir, demostrando que o que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos incomensuráveis.

Representemos um quadrado com diagonal $d = AB$ e lado $a = AC$ (veja figura na página seguinte). Suponhamos que a e d sejam comensuráveis. Então existirá um terceiro segmento de comprimento α que é submúltiplo comum de a e d. Fazemos agora a seguinte construção: traçamos o arco CD com centro em A e o segmento ED tangente a esse arco em D, tal que $AD = AC$. Então, os triângulos retângulos ACE e ADE são congruentes, pois os catetos AC e AD são iguais e a hipotenusa AE é comum. Logo, também são iguais os catetos CE e DE. Também, $DE = BD$, pois o ângulo $E\widehat{D}B$ é reto e $E\widehat{B}D$ mede $45°$. Logo o ângulo $D\widehat{E}B$ também mede $45°$ e o triângulo EBD é isósceles.

Assim,

$d = AB = AD + BD = a + BD \quad (1)$ $a = BC = BE + EC = BE + BD \quad (2)$

Como o segmento α é submúltiplo comum de a e d, concluímos, por (1), que α também é submúltiplo de BD. Daqui e de (2), segue-se que α também é submúltiplo de BE.

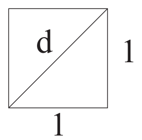


Provamos assim que se houver um segmento α que seja submúltiplo de $d = AB$ e $a = AC$, então o mesmo segmento α será submúltiplo de BE e de BD, segmentos esses que são a diagonal e o lado do quadrado $BDEF$. Ora a mesma construção geométrica que nos permitiu passar do quadrado original ao quadrado $BDEF$ pode ser repetida com este último para chegarmos a um quadrado menor ainda, e assim por diante, indefinidamente, esses quadrados vão se tornando arbitrariamente pequeno, pois como é fácil ver, as dimensões de cada quadrado diminuem em mais da metade quando passamos de um deles o seu sucessor.

Dessa maneira, provamos que o segmento α deverá ser submúltiplo comum do lado e da diagonal de um quadrado tão pequeno quanto desejemos. Evidentemente isto é um absurdo! Somos, pois levados a rejeitar a suposição inicial de que o lado AC e a diagonal AB do quadrado original sejam comensuráveis. Concluímos pois que o *lado e a diagonal de qualquer quadrado são grandezas incomensuráveis.*

Vamos mostrar agora, com argumentos puramente algébricos, que a diagonal de um quadrado de lado são incomensuráveis.

A demonstração deste fato é a seguinte: se o lado a e a diagonal d fossem comensuráveis, tomando o lado como unidade, obteríamos para comprimento da diagonal o número $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros, $q \neq 0$, primos entre si.



O teorema de Pitágoras aplicado a um dos triângulos retângulos formado, resulta:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

Ou seja, $\frac{p^2}{q^2} = 2$. Daí $p^2 = 2q^2$.

Esta última igualdade é um absurdo. Com efeito, os inteiros p^2 e q^2 contêm cada um dos seus fatores primos um número par de vezes, pois estão elevados à potência 2. Por conseguinte, $2q^2$ tem um número impar de fatores iguais a 2 e, assim, não pode ser igual a p^2.

O que é, então, um número irracional? A resposta não é muito simples. Enquanto um número racional tem uma expressão "exata"como quociente $\frac{p}{q}$ de dois números inteiros, um número irracional fica determinado quando se conhecem seus valores aproximados (que são números racionais).

O matemático grego Eudóxio (408? – 355? a.C.) foi que desenvolveu, de maneira brilhante, um argumento com o qual foi possível superar as dificuldades dos incomensuráveis, usando números racionais. Em linguagem moderna, essa teoria se resume assim: para reconhecermos um número irracional x, basta conhecer números racionais menores que x (aproximações por falta) e números racionais maiores que x (aproximações por excesso).

Por exemplo, $\sqrt{2}$, número positivo cujo quadrado é 2, tem por aproximações por falta e por excesso,

$$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$$

Isto significa que:

$$(1,414)^2 < 2 < (1,415)^2$$

O erro cometido (por falta ou por excesso) é inferior a 1 milésimo $(1,414 - 1,415 = 0,001)$. Assim, $1,414$ (ou $1,415$) é um valor aproximado de $\sqrt{2}$ com 3 algarismos decimais exatos.

Como todo número racional $\frac{p}{q}$ pode ser expresso como uma fração decimal ou por uma fração não decimal, podemos caracterizar os números irracionais como aqueles que possuem expressões que nem são finitas nem periódicas.

"Use a calculadora para encontrar raízes aproximadas com 3 casas decimais para: $\sqrt{23}$, $\sqrt{119}$, $\sqrt{12346}$.

OBS. Não use a tecla $\sqrt{}$. Escreva o seu procedimento.

Dois números que causaram uma grande perplexidade aos matemáticos foram os números π e e. As demonstrações que π e e são irracionais não são triviais, envolvendo cálculo avançado.

Costuma-se fazer experimentos utilizando recipientes cilíndricos para se ter a prova da existência da constância da razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro da circunferência. Esta razão é uma forma de definir o número π.

O número e, por sua vez, tem a sua importância no Cálculo Diferencial e Integral. A seguir, temos os 70 primeiros algarismos decimais de π e de e:

$\pi = 3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164$

$e = 2,7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240766$

Algumas curiosidades e fatos sobre os números π e e:

No século XVIII surgiu um eminente matemático chamado Leonard Euler. Foi ele que introduziu os símbolos π e e. Sem muitos recursos ele calculou um valor aproximado de e até a 23ª casa decimal. Para isto ele usou séries. Algumas dessas são:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

Outros matemáticos escreveram expressões para π. Algumas delas são:

$$\pi = 2\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \cdots}}}}\right) \qquad \text{(Francois Vieta - 1592)}$$

$$\pi = 4\left(\frac{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times \cdots}{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times \cdots}\right) \qquad \text{(John Wallis - 1655)}$$

$$\pi = 4 \times \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{3\times 3}{2 + \frac{5\times 5}{2 + 7\times 7 \ldots}}}} \qquad \text{(William Brouncker - 1658)}$$

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots\right) \qquad \text{(Gottfried Leibniz - 17??)}$$

$$\pi = \frac{6}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3\times 3} + \frac{1}{3^2\times 3} + \frac{1}{3^3\times 7} + \frac{1}{3^4\times 9} + \cdots\right) \qquad \text{(Abram Sharp - 1717)}$$

Podemos gerar números irracionais como os a seguir:

$$0,101001000100001000001000000100000001000000001000000000 1\ldots$$

$$0,102003000400005000006000000700000008000000009000000000\ldots$$

$$0,112123123412345123456123456712345678123456789 12345678910\ldots$$

0,12345678910111213141516171819202122232425262728293031323334353637383934041424344546
47484950515253545556575859606162636465666768697071727374757677787980818283848586878889909
19293949596979899100101102103104105106107108109110111112113114115116117118119120121122123
12412512612712812913013113213313413513613713813914014114214314414514614714814915015151215
31541551561571581591601616216316416516616716816917017172173174175176177178179180181182183
18418518618718818919019119219319419519619719819920020120220320420520620720820921021121221
32142152162172182192202212222232242252262272282292302312322332342352362372382392402412422
43244245246247248249250251252253254255256247258259260261262263264265266267268269270271272
27327427527627727827928028128228328428528628728828929029129229329429529629729829930030130
23033043053063073083093103113123133143153163173183193203213223233243253263273283293303313
32333334335336337338339340341342343344345 ...

Referências

[1] AABOE, A. - *Episódios da História Antiga da Matemática.*, Coleção Fundamentos da Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 1984.

[2] ÁVILA, G. - *Grandezas Incomensuráveis e Números Irracionais*, Revista do Professor de Matemática, Nº 5, 2º Semestre de 1984, São Paulo.

[3] BOYER, C.B. - *História da Matemática*, Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 1976.

[4] LIMA, E.L. - *Meu Professor de Matemática e outras histórias.*, IMPA/VITAE, Rio de Janeiro, 1991.

[5] LIMA, E.L. - *A Matemática do Ensino Médio*, Volume 1, Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 1998.

[6] RADEMACHER, H. - *The Enjoyment of Mathematics: Selections from Mathematics for the Amateur.*, Dover, New York, 1996.

[7] SILVA, P.L.F. - *Números Decimais: Um Breve Estudo.*, Monografia de Graduação de Curso de Licenciatura em Matemática UFPE, Recife, 2001.