V Bienal da SBM
Sociedade Brasileira de Matemática
UFPB - Universidade Federal da Paraíba
18 a 22 de outubro de 2010

MÁGICAS MATEMÁTICAS COM MATRIZES E CARTAS

ROGÉRIO CÉSAR DOS SANTOS *

1 Resumo

Este trabalho destina-se a mostrar algumas mágicas intrigantes, retiradas de [1], que podem ser explicadas pela álgebra básica, de nível fundamental. As primeiras referem-se à construção de matrizes mágicas, e as últimas referem-se a truques com cartas de baralho.

2 Como construir matrizes mágicas em segundos

Na Revista do Professor de Matemática, RPM número 59, na seção o leitor pergunta, foi esclarecida a seguinte mágica: escolhendo-se quaisquer 6 números da matriz abaixo, de linhas e colunas distintas, a soma deles será sempre 111:

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

Exemplo: $13 + 26 + 9 + 4 + 23 + 36 = 111$. Lá, foi dada a demonstração, a qual vamos supor conhecida. Nesta primeira parte apresento outras duas formas de construir matrizes mágicas, de maneira rápida.

PRIMEIRA FORMA- Esta primeira forma é bem semelhante a que foi mencionada acima. Mas não é necessário que dê 111. Mais ainda, você pode pedir ao ouvinte da mágica que ele escolha o valor resultante, e até mesmo o tamanho da matriz. E você, em segundos, a constrói! Exemplo: ele te pede que a soma dê 87, e que a matriz seja 4 por 4. Você, em segundos, e de cabeça, constrói a matriz seguinte.

22	24	23	25
14	16	15	17
18	20	19	21
27	29	28	30

Agora faça você mesmo o teste, escolhendo quaisquer 4 números de linhas e colunas distintas, e verá que a soma será sempre 87. Exemplo: $18 + 29 + 23 + 17 = 87$. Observe que, na matriz, o menor número que lá aparece é o 14. Depois, aparecem os seguintes: 15, 16, 17, até o 30, exceto o 26. Depois explico porque o 26 foi excluído. Primeiro, precisamos entender porque começamos com o 14. Vamos denotar por n a ordem da matriz, por x o seu menor elemento, e por S a soma dos n elementos escolhidos de linhas e colunas distintas.

*Unb , Planaltina - DF, Brasil, rogerc16@hotmail.com

Bom, uma matriz n por n possui n^2 elementos. A princípio, os elementos formarão uma P.A. de razão 1, cujo primeiro elemento é x. Disse a princípio, por causa de algumas exceções, como foi o 26 do nosso exemplo que quebra a sequência. Então, o segundo elemento será $x+1$, o terceiro $x+2$, até o último, $x+(n^2-1)$. Imagine que vamos pegar somente n elementos de linhas e colunas distintas, e somá-los. Como existem n formas de fazermos essa escolha sem repetir elementos, a soma comum S dos elementos escolhidos será a soma de todos os elementos da matriz, dividida por n. Logo, usando a fórmula da soma de n^2 termos de uma P.A., cujo primeiro termo é igual a x, e último termo é igual a $x+(n^2-1)$, temos: $S = [(x+[x+(n^2-1)]) \times n^2/2]/n = (2xn+n^3-n)/2 = xn+(n^3-n)/2$. Logo, $x = \{S - [(n^3-n)/2]\}/n$, que é uma fórmula fácil de decorar para realizar a mágica.

No nosso exemplo, temos n = 4 e S = 87. Então, $x = (S-30)/4 = (87-30)/4 = 57/4 = 14+(1/4)$. Porém, vamos evitar a parte decimal 1/4. Ao invés de começarmos preenchendo com $14+(1/4)$, comeąmos com 14 e, após preencher toda a matriz com os demais termos da P.A. 15, 16, 17, 18, ..., 29, escolhemos uma das linhas (no nosso exemplo a última) para somar 1 a seus elementos. Por termos ignorados 1/4 de todos os números, cada coluna teria $4 \times (1/4) = 1$ de déficit, por isso foi preciso somar este 1 a um único elemento de cada coluna para compensar. No nosso caso, escolhemos a última linha, e por isso o 26 foi excluído e o 30 foi acrescentado à matriz.

Comecei com o 14 na segunda linha, primeira coluna; depois o 15 na terceira coluna, o 16 na segunda coluna e o 17 na quarta coluna. Daí, fui para a terceira linha, seguindo a mesma ordem das colunas. Depois para a primeira linha, e depois para a quarta linha. Poderíamos começar com o 14 em qualquer lugar, e também seguir qualquer ordem das colunas. O importante é que, para todas as linhas, a ordem das colunas seja a mesma.

Se a parte decimal fosse 3/4, cada coluna ficaria com um déficit de $4 \times (3/4) = 3$. Logo, precisaríamos somar 3 unidades a cada elemento de alguma linha para compensar.

Outro exemplo: $x = 15$ e $n = 3$. Então, $x = (S-12)/3 = (15-12)/3 = 1$. Comecemos então com $x = 1$ na terceira linha, segunda coluna, depois, $x = 2$ na terceira coluna e $x = 3$ na primeira coluna. Depois continuamos na primeira linha, seguindo a mesma ordem das colunas. Em seguida para a segunda linha. Como x é inteiro, não precisaremos somar nenhum valor em nenhuma linha. A matriz fica assim:

6	4	5
9	7	8
3	1	2

Exemplo: $9+1+5 = 15$; ou $6+7+2 = 15$. Se $n = 5$, então $x = (S-60)/5$. O leitor certamente saberá encontrar a fórmula de x para qualquer outro valor de n maior ou igual a 2.

Cabe aqui a seguinte observação: para cada escolha de n, deve-se ter o cuidado de x não ser negativo, ou seja, deve-se pedir para o ouvinte que escolha um S maior do que 12 no caso de $n = 3$, maior do que 30 no caso de $n = 4$, maior do que 60 no caso de $n = 5$, e assim por diante.

SEGUNDA FORMA- Esta segunda forma é completamente diferente da anterior, porém mais fácil e rápida de ser construída. Peça para que o ouvinte escolha a soma pretendida S e a ordem da matriz n. Por exemplo, se ele escolher $n = 5$ e $S = 117$, então você, rapidamente, produzirá a seguinte matriz:

12	0	27	10	10
42	30	57	40	40
26	14	41	24	24
22	10	37	20	20
16	4	31	14	14

Escolhendo-se quaisquer 5 números de linhas e colunas distintas, a soma dará 117. Exemplo: $42+4+27+20+24 =$

117. Perceba que esta matriz não a mesma lógica interna das anteriores. Então, como ela foi formada de maneira tão rápida?

Primeiro, você escolhe uma linha e uma coluna para distribuir 117 unidades, de tal forma que o elemento interseção seja o zero. No nosso caso, escolhi a primeira linha e a segunda coluna, de forma que o elemento da primeira linha e da segunda coluna seja 0.

Então, distribuí 117 unidades nos demais elementos desta primeira linha e desta segunda coluna: $12+27+10+10=59$ na primeira linha, e $30+14+10+4=58$ na segunda coluna, totalizando 117.

Pronto, cada elemento que resta preencher nas demais linhas e colunas é a soma dos dois respectivos elementos daquela primeira linha e daquela segunda coluna, conforme ilustrado a seguir:

12	**0**	**27**	**10**	**10**
$12+30$	**30**	$27+30$	$10+30$	$10+30$
$12+14$	**14**	$27+14$	$10+14$	$10+14$
$12+10$	**10**	$27+10$	$10+10$	$10+10$
$12+4$	**4**	$27+4$	$10+4$	$10+4$

Então, escolhendo-se 5 números de linhas e colunas distintas, garante-se que todos os números da primeira linha e todos os da segunda coluna serão somados, logo, tem que dar 117. Na escolha acima: $(12+30)+(0+4)+(27+0)+(10+10)+(10+14) = 42+4+27+20+24 = 117$. O elemento da primeira linha e segunda coluna será somado duas vezes, por isso ele deve ser o zero, a fim de não aumentar o resultado final 117.

Por fim observo que, ao realizar as duas formas da mágica, a maioria dos ouvintes descobre alguma lógica na primeira forma, mas jamais vi alguém descobrir a lógica da segunda forma.

3 Truques com cartas

1. Para cima e para baixo

Pegue um baralho tradicional com 52 cartas e arrume um monte com 20 cartas viradas para cima e 32 viradas para baixo. Entregue o monte a um espectador e peça a ele que embaralhe as cartas mantendo as faces viradas como estavam. Agora, peça a ele que entregue a você as 20 cartas superiores, ou então as 20 inferiores, ele escolhe. Ele terá então 32 cartas em mãos, algumas das quais voltadas para cima e outras voltadas para baixo. Você terá um monte de 20 cartas, também com algumas viradas para cima e outras para baixo. Agora, a mágica: a quantidade de cartas viradas para cima no monte dele é a mesma na sua mão! Como?

É bem simples. Podemos até mudar os números: suponha n cartas no total, sendo que m estão viradas para cima e, portanto, $n-m$ para baixo. O espectador embaralha as n cartas. Você vai pedir a ele que entregue a você m cartas, sejam as de cima, seja as de baixo, tanto faz. Observe que a quantidade de cartas que você terá em mãos, m, é a mesma quantidade de cartas que, no início, estavam viradas para cima, mas não serão necessariamente as mesmas.

No seu monte, existirão k cartas viradas para cima, e $m-k$ cartas viradas para baixo. No monte dele, existirão $m-k$ cartas viradas para cima. Observe que a quantidade de cartas viradas para cima na mão dele é igual a quantidade de cartas viradas para baixo na sua mão, isto é, $m-k$. Agora, uma pequena trapaça: você pedirá a ele que conte quantas cartas estão viradas para cima no monte dele, e, enquanto ele conta, você vira o seu monte de cabeça para baixo, sem que ele veja. Assim, você também terá $m-k$ cartas viradas para cima!

2. Soletrando

Deixe que o espectador embaralhe o monte de 52 cartas, com as faces viradas para baixo, de um baralho tradicional e peça a ele que retire, no máximo, 12 cartas das de cima do monte. Suponha que seja n o número de cartas retiradas, quantidade essa desconhecida para você. Em seguida, deixe que ele veja, no monte restante, a n-ésima carta, de cima para baixo. Vamos chamá-la de carta Mágica, também desconhecida para você. Agora, peça a ele que escolha dois nomes próprios compostos. Exemplo: Gustavo André e João Pedro. Isso para garantir que a soma de todas as letras (contando as repetições) que formam os dois nomes seja maior que 12. Em seguida, você retira do monte restante várias cartas, uma por uma, ao mesmo tempo em que soletra os dois nomes. Tire a primeira, G, a segunda, U, a terceira, S, etc. até a última, O (de Pedro). Cada carta retirada deve ser colocada sobre a anterior, num montinho à parte.

Agora, devolva essas cartas retidas ao monte principal, com as faces voltadas para baixo. Observe que, ao realizar essa operação, as cartas referentes às letras dos nomes foram invertidas em sua posição.

A seguir, peça a ele que coloque as n cartas que estavam com ele sobre o monte. Peça que ele repita o procedimento anterior, isto é, que soletre os dois nomes, ao mesmo tempo em que retira as cartas, uma a uma. Então, ao retirar a última, ele verá que a que restou por cima do monte, é exatamente a carta Mágica. Como? Vejamos.

Ao retirar n cartas, $n < 12$ o monte fica com $52 - n$ cartas. Desse monte restante, ele olhará a n-ésima carta Mágica, de cima para baixo. Soletrando os nomes próprios, você vai retirar m, $m > 12$, cartas. Desse modo, a carta Mágica será necessariamente retirada. Ao serem repostas sobre o monte, essas m cartas estarão com suas posições invertidas de modo que a carta Mágica será a $(m - n + 1)$-ésima carta do monte, de cima para baixo. Quando o espectador repuser as n cartas que estavam na mão dele, a carta Mágica ficará sendo a $(m + 1)$-ésima carta do monte de cima para baixo. Assim, quando o espectador retirar as m cartas, soletrando os nomes próprios, a primeira carta no monte restante será a carta Mágica.

3. O trio secreto

Peça ao espectador que embaralhe o monte de 52 cartas de um baralho convencional e então que retire 3 cartas quaisquer. Em seguida você dá uma olhada no monte, sem alterar a sua ordem, anota alguma coisa (número e naipe de uma carta) num pedaço de papel e coloca o papel dobrado no bolso dele.

Agora você pede a ele que coloque as três cartas retiradas sobre a mesa com as faces viradas para cima. Você pega o monte e coloca em cima de cada uma das três cartas uma quantidade de cartas igual a que falta para completar 15. Por exemplo, se uma das cartas é um valete (número 11), você coloca 4 cartas em cima dela; se for um 2, você coloca 13 cartas. Peça então ao espectador que some os valores das três cartas inicialmente escolhidas por ele. Você retira do monte restante uma quantidade de cartas igual a essa soma. Agora peça ao espectador que olhe a primeira carta do monte restante e compare com a que está anotada no papel no bolso dele. As cartas são as mesmas! Como? Essa mágica fica para você explicar. [Sugestão: a *olhada* inicial no baralho é para verificar qual é a $(52 - 3 - 3 \times 15)$-ésima (4^a) carta do monte, carta essa que será escrita no papel que vai para o bolso do espectador.]

Referências

[1] GARDNER, M. - *Divertimentos matemáticos.*, Segunda edição, São Paulo, IBRASA, 1967.