**V Bienal da SBM**
**Sociedade Brasileira de Matemática**
**UFPB - Universidade Federal da Paraíba**
**18 a 22 de outubro de 2010**

# Funções geradoras e aplicações em partições de inteiros

Diego de Jesus Ferreira *
, Mateus Alegri †

Neste trabalho vamos apresentar o conceito de funções geradoras, sendo esta uma poderosa ferramenta que é útil para resolver problemas de contagem, particularmente problemas envolvendo a escolha e arranjo de objetos com repetições e restrições. Este conceito foi introduzido por Abraham de Moivre em 1730, e largamente utilizado por Leonard Euler quando ele estudava partições de números inteiros. O conceito de partições e uma extensão deste, sobrepartições de inteiros são largamente utilizados na teoria de códigos quânticos e em algumas partes de mecânica estatística. Seguindo Euler vamos encontrar a função geradora para partições de inteiro sem restrições nas suas partes, a partir de partições em partes distintas.

**Definição 0.1.** *A função geradora da sequência* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *é uma série de potências formal:*
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$, *onde* $q \in \mathbb{C}$.

De fato, $q$ é uma indeterminada, e não nos concernimos em estudar a convergência desta série de potências, e sim o coeficiente de $q^n$, para $n \geq 0$, ver [Euler?].

**Definição 0.2.** *Uma partição de um inteiro* $n$ *é uma soma não ordenada de inteiros positivos tais que* $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_s = n$. *Convencionamos* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_s$.

**Exemplo 0.1.** *Para* $n = 7$, *temos as seguintes partições:* $7$, $6+1$, $5+2$, $5+1+1$, $4+3$, $4+2+1$, $4+1+1+1$, $3+3+1$, $3+2+2$ $3+2+1+1$, $3+1+1+1+1$, $2+2+2+1$, $2+2+1+1+1$, $2+1+1+1+1+1$, $1+1+1+1+1+1+1$.

**Exemplo 0.2.** *Suponha que queremos exibir todas as possíveis partições consistindo de uma parte par e uma ímpar, cada parte menor que* $7$. *Podemos escrever cada uma delas (no total de 9); entretanto, podemos obtê-las de um produto de polinômios:*

$$(q^2 + q^4 + q^6)(q^1 + q^3 + q^5) =$$
$$q^{2+1} + q^{2+3} + q^{2+5} + q^{4+1} + q^{4+3} + q^{4+5} + q^{6+1} + q^{6+3} + q^{6+5} =$$
$$q^3 + 2q^5 + 3q^7 + 2q^9 + q^{11}.$$

*Sendo este a função geradora para esta classe de partições. Note que a segunda linha exibe exatamente em seus expoentes todas as partições com uma parte par, uma ímpar, e cada menor que* $7$.

Vamos em seguida obter a função geradora para partições irrestritas a partir da função geradora para partições em partes distintas.

*Universidade Federal do Sergipe , DMAI, SE, Brasil, ferreirajdiego@hotmail.com
†Universidade Federal do Sergipe, DMAI, SE, Brasil, malegri@ufs.br

# 1 Resultados

**Lema 1.1.** *A função geradora para partições de $n$ em partes distintas é:*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n), \quad |q|<1 \tag{1.1}$$

**Prova:**

Seja $n$ um inteiro positivo e consideremos uma partição $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_s$ em que $\lambda_i \neq \lambda_j$, para $i \neq j$, generalizando o exemplo anterior, cada parte de $\lambda$ pode ser escolhida como um expoente de $q$ na expansão de

$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)...(1+q^n)...$, pela arbitrariedade de $\lambda$, a função geradora para partições de inteiros em partes distintas é:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n) \tag{1.2}$$

Por questões de convergência consideramos o número complexo $|q|<1$. $\square$

**Teorema 1.1.** *A função geradora para partições de inteiros é:*

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^n)}, \quad |q|<1 \tag{1.3}$$

**Prova:**

Suponha que permitiremos que uma parte qualquer de uma partição possa repetir até $d$ vezes. A função geradora para partições em que as partes podem repetir até $d$ vezes é:

$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n+q^{2n}+...q^{dn}) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-q^{(d+1)n}}{1-q^n}$.

A ultima parte da igualdade é devida fórmula para soma geométrica finita. Pela arbitrariedade de $d$, podemos fazer $d \mapsto \infty$ e assim obtemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}p(n)q^n = \prod_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-q^n)} \tag{1.4}$$

Onde $p(n)$ é a função que associa a cada $n$ ao seu número de partições irrestritas.

$\square$

A muitas identidades que podem ser interpretadas em termos de partições de inteiros, como as famosas identidades de Rogers-Ramanujan:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^n)} = \frac{1}{(q;q^5)_\infty(q^4;q^5)_\infty}. \tag{1.5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+n}}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^n)} = \frac{1}{(q^2;q^5)_\infty(q^3;q^5)_\infty}. \tag{1.6}$$

O lado direito da primeira identidade é a função geradora para partições em partes congruentes a 1 e 4 módulo 5, enquanto o lado esquerdo é a função geradora para partições em que a diferença entre partes consecutivas é pelo menos 2.

Analogamente a segunda identidade diz que o número de partições em que a diferença entre partes é pelo menos 2 e a menor parte é pelo menos 2, é igual ao número de partições em que as partes são congruas a 2 e a 3 módulo 5.

## Referências

[1] Andrews, G.E., Askey, R., Roy, R. - *Special Functions.*, Cambridge University Press,1999.

[2] Andrews,G.E.,Eriksson,K. - *Integer Partitions.*, Cambridge University Press,2004.

[3] Euler,L. - *De partitione numerorum, Introductio in Analysin Infinitorum, Caput XVI.*, Leonardi Euleri Opera Omnia, A. Kratzer, F. Rudio (Eds.), Teubner, Leipzig, 1911.

[4] Pak, I. - *Partition Bijections, a Survey.*, Ramanujan Journal, vol. 12, 5-75, 2006.

[5] Santos, J.P.O., Mello, M.P., Murari, I.T.C. - *Introdução à análise combinatória.*, Ciência Moderna, vol2, 1999.

[6] Slater, L.J. - *Further identities of the Rogers-Ramanujan type*, Proc. London Math. Soc.(2) 54(1952).