Euler e os 5 números mais famosos da matemática

Arlyson Alves do Nascimento

Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia de Alagoas
IFET - AL - Campus Maceió

7 de Maio de 2010

Introdução

Nascido em 15 de Abril de 1707, em Basil, na Suíça, Euler foi sem dúvida o maior matemático do século dezoito. Com 886 trabalhos publicados, a maioria deles no final de sua vida, quando já estava completamente cego, Euler foi tão importante não apenas para a matemática, mas também a física, engenharia e astronomia, que termos como: Número de Euler, Números Eulerianos, Fórmula de Euler, significam coisas diferentes de acordo com o contexto.

Introdução

Nascido em 15 de Abril de 1707, em Basil, na Suíça, Euler foi sem dúvida o maior matemático do século dezoito. Com 886 trabalhos publicados, a maioria deles no final de sua vida, quando já estava completamente cego, Euler foi tão importante não apenas para a matemática, mas também a física, engenharia e astronomia, que termos como: Número de Euler, Números Eulerianos, Fórmula de Euler, significam coisas diferentes de acordo com o contexto.

Seu pai um padre calvinista que nutria esperanças de que seu filho o precedesse no clericato. Ele ensinou a Euler a matemática. Quando entrou na Universidade de Basel, estudou Teologia e a lingua Hebraica, e atendia a uma aula de uma hora por semana com Johannes Bernoulli. Ele fez amizade com Daniel e Nicolaus Bernoulli, e recebeu seu primeiro mestrado aos dezessete anos. Aos dezenove anos, Euler recebeu menção horosa por uma solução que enunciou a um problema posto pela academia de Paris.

Em 1735, Euler perdeu a visão de um de seus olhos, e, logo após seu retorno à Rússia, a visão em seu outro olho começou a deteriorar. Euler sempre teve uma memória excepcional, e era capaz de fazer enormes cálculos de cabeça, logo ele se preparou para sua futura cegueira aprendendo a escrever fórmulas em uma tábua e ditar matemática a seus filhos ou secretária. Ele foi cego pelos últimos 17 anos de sua vida, e durante este tempo sua produtividade somente aumentou.

Em 1735, Euler perdeu a visão de um de seus olhos, e, logo após seu retorno à Rússia, a visão em seu outro olho começou a deteriorar. Euler sempre teve uma memória excepcional, e era capaz de fazer enormes cálculos de cabeça, logo ele se preparou para sua futura cegueira aprendendo a escrever fórmulas em uma tábua e ditar matemática a seus filhos ou secretária. Ele foi cego pelos últimos 17 anos de sua vida, e durante este tempo sua produtividade somente aumentou.

Euler teve contribuições à várias áreas da ciência, incluindo dinâmica dos fluidos, toeria das órbitas lunares (marés), mecânica, "A teoria matemática do investimento"(seguros, anuidades, pensões), bem como essencialmente todas as àreas da matemática que existiam naquela época.

Em 1735, Euler perdeu a visão de um de seus olhos, e, logo após seu retorno à Rússia, a visão em seu outro olho começou a deteriorar. Euler sempre teve uma memória excepcional, e era capaz de fazer enormes cálculos de cabeça, logo ele se preparou para sua futura cegueira aprendendo a escrever fórmulas em uma tábua e ditar matemática a seus filhos ou secretária. Ele foi cego pelos últimos 17 anos de sua vida, e durante este tempo sua produtividade somente aumentou.

Euler teve contribuições à várias áreas da ciência, incluindo dinâmica dos fluidos, toeria das órbitas lunares (marés), mecânica, "A teoria matemática do investimento"(seguros, anuidades, pensões), bem como essencialmente todas as àreas da matemática que existiam naquela época.

Ele permaneceu são e alerta até o fim da sua vida, quando morreu de um derrame aos 76 anos. O trabalho ativo de Euler provocou uma tremenda demanda da academia de São Petesburgo, que continuou publicando seus trabalhos por mais de 30 anos após sua morte

A memória de Euler era lendária, assim como seus poderes de concentração. Chamado de "Análise Encarnada", ele era capaz de recitar toda a Eneida de cor, e nunca foi atrapalhado por interrupções ou distrações, de modo que muito de seu trabalho foi realizado tendo suas crianças à sua volta. Ele era capaz de realizar cálculos prodigiosos de cabeça, uma necessidade depois que ele ficou cego. Seu matemático contemporâneo, Condorcet, conta uma história aonde dois dos estudantes de Euler estavam calculando independentemente uma complicada série infinita, e chegaram a uma discussão depois de somarem dezessete termos, por uma diferença na quiquagésima casa decimal. Euler resolveu a disputa fazendo a soma de cabeça.

Preliminares

Lemma

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Demonstração

Seja $f(x) = \ln x$. Então $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, portanto $f'(1) = 1$.

Demonstração

Seja $f(x) = \ln x$. Então $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, portanto $f'(1) = 1$.
Pela definição de derivada, temos que

$$
\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\ln\,(1+x) - \ln\,(1)}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}.\ln\,(1+x) \\
&= \lim_{x \to 0} \ln\,(1+x)^{\frac{1}{x}}
\end{aligned}
$$

Demonstração

como ln é contínua

$$f'(1) = \ln\left[\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\right],$$

sabendo que $f'(1) = 1$, temos que

$$f'(1) = \ln\left[\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = 1.$$

Demonstração

como ln é contínua

$$f^{'}(1) = \ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right],$$

sabendo que $f^{'}(1) = 1$, temos que

$$f^{'}(1) = \ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = 1.$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Tome $x = \frac{1}{n}$, assim $n = \frac{1}{x}$. Como $x \to 0$, então $n \to \infty$.
Logo,

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Que representa outra maneira de observar o mesmo limite.

Tome $x = \dfrac{1}{n}$, assim $n = \dfrac{1}{x}$. Como $x \to 0$, então $n \to \infty$.
Logo,

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Que representa outra maneira de observar o mesmo limite.
Vamos expressar o número e através de uma série infinita. Visto que

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

comecemos por desenvolver o binômio $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, n inteiro.

$$
\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =& 1+\binom{n}{1}\left(\frac{1}{n}\right)^1+\binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\binom{n}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots \\
=& 1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots \\
=& 1+1+\frac{1}{2!}\left(\frac{n-1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right)+\cdots .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =& 1+\binom{n}{1}\left(\frac{1}{n}\right)^1+\binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\binom{n}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots \\
=& 1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots \\
=& 1+1+\frac{1}{2!}\left(\frac{n-1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right)+\cdots .
\end{aligned}
$$

Fazendo $n \to \infty$ os quocientes $\dfrac{n-1}{n}$, $\dfrac{n-2}{n}$, etc, todos tendem a 1, de modo que

$$
e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots .
$$

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =&1+\binom{n}{1}\left(\frac{1}{n}\right)^1+\binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\binom{n}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots\\ =&1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots\\ =&1+1+\frac{1}{2!}\left(\frac{n-1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right)+\cdots.\end{aligned}$$

Fazendo $n\to\infty$ os quocientes $\dfrac{n-1}{n}$, $\dfrac{n-2}{n}$, etc, todos tendem a 1, de modo que

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots.$$

Mas a função $f(x)=e^x$ também pode ser expressa através de uma série infinita.

Seja a expressão:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,$$

fazendo $\dfrac{x}{n}=\dfrac{1}{m}$, temos que $n=mx$.

Seja a expressão:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,$$

fazendo $\frac{x}{n}=\frac{1}{m}$, temos que $n=mx$. Portanto

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mx}=\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^x.$$

Seja a expressão:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,$$

fazendo $\frac{x}{n}=\frac{1}{m}$, temos que $n=mx$. Portanto

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mx}=\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^x.$$

Quando $n\longrightarrow\infty$, $m\longrightarrow\infty$ de modo que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^x=\left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^x=e^x.$$

Seja a expressão:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,$$

fazendo $\frac{x}{n}=\frac{1}{m}$, temos que $n = mx$. Portanto

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mx}=\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^x.$$

Quando $n \to \infty$, $m \to \infty$ de modo que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^x=\left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^x=e^x.$$

Desenvolvendo $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ pelo binômio de Newton e fazendo $n \to \infty$, temos

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots.$$

Vamos expressar as funções $\sin x$ e $\cos x$ como séries infinitas. Sabemos que a derivada $(\sin x)^{'} = \cos x$ e $(\cos x)^{'} = -\sin x$.

Vamos expressar as funções $\sin x$ e $\cos x$ como séries infinitas. Sabemos que a derivada $(\sin x)' = \cos x$ e $(\cos x)' = -\sin x$. As derivações sucessivas produzem os seguintes resultados

$$
\begin{aligned}
(\sin x)' &= \cos x \\
(\sin x)'' &= -\sin x \\
(\sin x)''' &= -\cos x \\
(\sin x)^{(4)} &= \sin x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\cos x)' &= -\sin x \\
(\cos x)'' &= -\cos x \\
(\cos x)''' &= \sin x \\
(\cos x)^{(4)} &= \cos x
\end{aligned}
$$

Vamos desenvolver $\sin x$ e $\cos x$ como séries de potências de x,

$$\sin x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + A_5 x^5 + \cdots$$

e

$$\cos x = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + B_4 x^4 + B_5 x^5 + \cdots$$

Vamos desenvolver $\sin x$ e $\cos x$ como séries de potências de x,

$$\sin x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + A_5 x^5 + \cdots$$

e

$$\cos x = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + B_4 x^4 + B_5 x^5 + \cdots$$

Como para $x = 0$, $\sin 0 = 0$ e $\cos 0 = 1$, assim $A_0 = 0$ e $B_0 = 1$.

Derivando-se sucessivamente $\sin x$ e $\cos x$ temos:

- para $\sin x$

$$\begin{aligned}
\cos x &= A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 + 5A_5x^4 + 6A_6x^5 + \cdots \\
-\sin x &= 2A_2 + 2.3A_3x + 3.4A_4x^2 + 4.5A_5x^3 + 5.6A_6x^4 + \cdots \\
-\cos x &= 2.3A_3 + 2.3.4A_4x + 3.4.5A_5x^2 + 4.5.6A_6x^3 + \cdots \\
\sin x &= 2.3.4A_4 + 2.3.4.5A_5x + 3.4.5.6A_6x^2 + \cdots
\end{aligned}$$

Derivando-se sucessivamente $\sin x$ e $\cos x$ temos:

- para $\sin x$

$$\begin{aligned}
\cos x &= A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 + 5A_5x^4 + 6A_6x^5 + \cdots \\
-\sin x &= 2A_2 + 2.3A_3x + 3.4A_4x^2 + 4.5A_5x^3 + 5.6A_6x^4 + \cdots \\
-\cos x &= 2.3A_3 + 2.3.4A_4x + 3.4.5A_5x^2 + 4.5.6A_6x^3 + \cdots \\
\sin x &= 2.3.4A_4 + 2.3.4.5A_5x + 3.4.5.6A_6x^2 + \cdots
\end{aligned}$$

- para $\cos x$

$$\begin{aligned}
-\sin x &= B_1 + 2B_2x + 3B_3x^2 + 4B_4x^3 + 5B_5x^4 + 6B_6x^5 + \cdots \\
-\cos x &= 2B_2 + 2.3B_3x + 3.4B_4x^2 + 4.5B_5x^3 + 5.6B_6x^4 + \cdots \\
\sin x &= 2.3B_3 + 2.3.4B_4x + 3.4.5B_5x^2 + 4.5.6B_6x^3 + \cdots \\
\cos x &= 2.3.4B_4 + 2.3.4.5B_5x + 3.4.5.6B_6x^2 + \cdots
\end{aligned}$$

Fazendo nestas igualdades $x = 0$ e lembrando que $\sin 0 = 0$ e $\cos 0 = 1$, deduzimos

$$\begin{array}{rclcrcl}
A_1 & = & 1 & & B_1 & = & 0 \\
A_2 & = & 0 & & B_2 & = & -1/2! \\
A_3 & = & -1/3! & & B_3 & = & 0 \\
A_4 & = & 0 & & B_4 & = & 1/4! \\
A_5 & = & 1/5! & & B_5 & = & 0 \\
A_6 & = & 0 & & B_6 & = & -1/6! \\
A_7 & = & -1/7! & & B_7 & = & 0 \\
A_8 & = & 0 & & B_8 & = & 1/8!
\end{array}$$

De modo que o desenvolvimento de $\sin x$ e $\cos x$ em séries de potências de x são:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \cdots$$

e

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \cdots$$

 Fórmula de EULER

Agora voltemos a função

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots .$$

Agora voltemos a função

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots .$$

Euler supôs x imaginário puro da forma $x = i\theta$ e entrou nesta expressão obtendo

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} \cdots \\
&= 1 + \frac{i\theta}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - \frac{i\theta^7}{7!} \cdots \\
&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} \cdots \right) + \left(\frac{i\theta}{1!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{i\theta^7}{7!} \cdots \right) \\
&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} \cdots \right) + i\left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} \cdots \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} \cdots \\
&= 1 + \frac{i\theta}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - \frac{i\theta^7}{7!} \cdots \\
&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} \cdots\right) + \left(\frac{i\theta}{1!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{i\theta^7}{7!} \cdots\right) \\
&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} \cdots\right) + i\left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} \cdots\right)
\end{aligned}
$$

e, como os polinômios entre parênteses são as séries do $\cos\theta$ e $\sin\theta$, respectivamente, concluiu que

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Tomando $\theta = \pi$ e sabendo que $\cos\pi = -1$ e $\sin\pi = 0$, obtemos a famosa fórmula que envolve os 5 números mais famosos da Matemática:

Tomando $\theta = \pi$ e sabendo que $\cos\pi = -1$ e $\sin\pi = 0$, obtemos a famosa fórmula que envolve os 5 números mais famosos da Matemática:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Referências Bibliográficas

- Garbi, Gilberto G.; *O Romance das Equações Algébricas*, 3ª ed rev. e ampl. - São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.
- Contador, Paulo R. M.; *A Matemática na arte e na vida*, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.
- Maor, Eli; *e: a história de um número*, tradução de Jorge Calife, 5ª ed. - Rio de Janeiro: Record, 2008.