V Bienal da SBM
Sociedade Brasileira de Matemática
UFPB - Universidade Federal da Paraíba
18 a 22 de outubro de 2010

POLINÔMIOS COM COEFICIENTES DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

VIVIANE DE JESUS LISBOA * & ISLANITA CECÍLIA ALCANTARA DE ALBUQUERQUE †

Resumo

Procuramos aqui abordar o conteúdo de polinômios: definição, história, ensino, além de novos tópicos. Eventos aqui retratados envolvendo situações intrigantes e inesperadas. Como a história de dois matemáticos, que realizaram imensa contribuição aos estudos em Matemática. Por fim, verificam-se novas ou possíveis realizações envolvendo polinômios.

Palavras-chave: Polinômio, raiz, história, ensino.

1 Introdução

A história dos polinômios coincide com a história da matemática. Ambas sem data de nascimento ou "cidade" natal. O pensamento matemático é desenvolvido pelo ser humano desde a época primitiva. Pode-se pensar nele presente há 50.000 anos, quando o homem dava forma aos barcos que o levaram à Austrália e planejavam as quantidades de recursos a serem transportados durante a viagem. Ou mesmo há 2.000.000 de anos quando o homo-hábilis quebrava pedras para dar-lhe formas úteis. Veremos aqui, numa abordagem algébrica, características das soluções de equações polinomiais de graus 2 ou 3 com coeficientes da sequência de Fibonacci.

2 Definição

Conhecer as definições é extremamente necessário no estudo de todo e qualquer conteúdo matemático, em nosso caso precisamos conhecer os polinômios reais de grau 2 e 3.

Os polinômios são expressões algébricas cuja forma canônica é: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ (n natural, e $a_i \in IR$, para todo $0 \leq i \leq n$), também definido como função racional inteira da variável. O maior expoente (n) da incógnita de uma expressão algébrica em sua forma canônica é dito grau do polinômio.

Equações envolvendo expoentes negativos ou fracionários não são polinômios, portanto não faz sentido algum falar em grau, já que essa noção está diretamente ligada à de polinômios.

Outra definição para polinômios de coeficientes reais remete a seqüências: o conjunto dos polinômios de coeficientes reais, denotado por P, é um conjunto de sequências quase nulas[1], no qual estão definidas a adição, multiplicação e igualdade.

3 Um pouco de História

No decorrer da história vários problemas envolvendo polinômios (equações polinomiais) instigaram a curiosidade de grandes matemáticos como Nicoló Fontana (Tartáglia), Ludovico Ferrari, Isaac Newton dentre muitos outros.

Parte muito interessante dessa história envolve as equações polinomiais de 4º grau.

*Universidade Federal da Paraíba, Mestrado em Matemática, PB, Brasil, vjlisboa@yahoo.com.br
†Universidade Federal da Paraíba, Mestrado em Matemática, PB, Brasil, santacecilia@oi.com.br
[1]Sequências quase nulas: aquelas nas quais a partir de um determinado termo todos os subseqüentes são nulos

Antigamente eram comuns disputas entre os matemáticos da época, nas quais se trocavam desafios. Numa dessas ocasiões um certo Zuanne de Tonini da Coi submeteu Gregori Cardano (grande “escritor” de matemática da época) a uma questão que envolvia a equação

$$x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$$

Após várias tentativas sem êxito, Cardano passou a questão ao jovem Ferrari que, num lampejo de gênio, encontrou o método geral para a solução das equações de 4º grau, que foi publicado por Cardano no maior compendio algébrico (matemático) da época, Ars Magna.

Há ainda um intrigante episódio sobre grandes e, em vida, não reconhecidos matemáticos: Niels Henrik Abel e Évariste Galois.

(a) Gregori Cardano

(b) Niels Henrik Abel

(c) Évariste Galois

Figura 1: Matemáticos na História da Matemática. Fonte: Garbi

Ambos são grandes matemáticos de vida trágica, o primeiro aos 24 anos morreu de tuberculose, dois dias antes de chegar uma carta do amigo garantindo o emprego, tão esperado, em Berlim. O segundo em um duelo, travado por conta de uma ”coquette”, morreu aos 20 anos após ter realizado grandes e marcantes contribuições à Teoria dos

Grupos (nome primeiramente usado por ele). Desconhecidos um do outro desenvolveram raciocínio idêntico para provar a impossibilidade de um método geral para a resolução das equações polinomiais de grau maior que 4.

4 O ensino de polinômios

O estudo de matemática nos ensinos fundamental e médio é baseado na aritmética, geometria e álgebra. Polinômio, como conteúdo basicamente algébrico, é trabalhado na 6ª e 7ª séries do ensino fundamental e muito utilizado a partir daí envolvendo outros conteúdos nas séries seguintes. Na verdade trata-se de um conteúdo onipresente em matemática, por isso é de suma importância que os alunos o dominem com segurança. Hoje em dia, muitas vezes, são deixadas de lado partes essenciais do estudo de polinômios, como o pleno domínio da fatoração, raízes racionais, somas e produtos de raízes, gráficos e polinômios irredutíveis. É comprovada a falta de compreensão do que vem a ser encontrar raízes de uma equação polinomial, além do abuso de fórmulas como a de Bháskara como relata Coxford. Os próprios livros didáticos expressam maior ênfase no processo/método que no conceito (utilizando exercícios maçantes e repetitivos), diferentemente da proposta do PCN (Parâmetros curriculares nacionais) que sugere a ênfase no conceito e em sua importância e não em gravar métodos de resolução.

5 Algo mais

Ainda há muitos tópicos envolvendo polinômios que podem ser profundamente pesquisados ou vislumbrados. Dentre estes as raízes de uma equação polinomial de 2º grau onde seus coeficientes pertencem a dados conjuntos ou em determinada sequência, por exemplo à "Sequência de Fibonacci".

Seja a equação geral

$$ax^2 + bx + c$$

com a, b, c números da Sequência de Fibonacci, por conseguinte, $0 < a < b$ e $c = a+b$. Vale lembrar que a Sequência de Fibonacci é formada pela soma de seus elementos dois a dois anteriores, iniciando-se por 1 $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$, e que, ao se montar a equação, os elementos não devem sair desta ordem.

As raízes da equação anteriormente proposta, utilizando a resolução da equação do 2º grau, são

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{a^2}$$

uma vez que $c = a + b$, temos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a\,(a+b)}}{a^2}$$

de modo que para ter duas raízes reais o termo sob o radical (Δ) deve ser positivo. Se $a = b$ (caso dos coeficientes 1, 1, 2)

$$\Delta = b^2 - 4b^2 - 4b^2 = -7b^2 < 0 \qquad \therefore x \in IR$$

Para os demais casos $a < b$, suponhamos $\Delta > 0$, logo

$$b^2 - 4a^2 - 4ab > 0$$

$$\Rightarrow b^2 > 4a^2 + 4ab$$

como b pertence à seqüência de Fibonacci, termo subseqüente a a,

$$b = a + d$$

onde d é o termo anterior a a

$$(a+d)^2 > 4a^2 + 4a(a+d)$$

$$a^2 + 2ad + d^2 > 7a^2 + 4ad + a^2$$

Absurdo, já que $a^2 > d^2$. Logo $\Delta < 0$, por conseguinte as raízes da equação quadrática de coeficientes pertencentes à Sequência de Fibonacci não são reais. $\square$

O que não quer dizer que seja válido para toda seqüência crescente, vejamos agora esta seqüência $(1, 9, 10, 19, 31, ...)$. Crescente não?

Mas se tomarmos os elementos 1, 9, 10 e formarmos uma equação ($x^2 + 9x + 10 = 0$) suas raízes serão reais, pois seu $\Delta = 41$ (convidamos o leitor a verificar).

No caso dos polinômios de grau 3, análogo aos de grau 2, temos uma fórmula para encontrar os zeros do polinômio, chamada "Fórmula de Cardano", porém esta a penas se aplica às cúbicas da forma $x^3 + px + q = 0$, a saber:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2}}$$

Utilizando tal fórmula podemos observar que para as cúbicas com coeficientes pertencentes à Seqüência de Fibonacci (SF), no mesmo sistema das quadráticas anteriormente apresentadas, não possuem raízes todas reais.

De fato, consideremos a equação

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

fazendo a substituição $x = y - \frac{b}{3a}$, obtemos a equação equivalente, desprovida do termo quadrático (convidamos o leitor a realizar tais cálculos)

$$y^3 + y\left(\frac{3ac - b^2}{3a^2}\right) + \frac{2b^3 - 9abc + 27da^2}{27a^3} = 0$$

substituindo na fórmula, o Δ (termo sob o radical quadrático) será

$$\Delta = \left(\frac{2b^3 - 9abc + 27da^2}{54a^3}\right)^2 + \left(\frac{3ac - b^2}{9a^2}\right)$$

para que $\Delta < 0$ (e assim, teremos 3 raízes reais)

$$\frac{3ac - b^2}{9a^2} < 0$$

já que o termo quadrático é positivo para todos os valores reais

$$\Rightarrow 3ac < b^2$$

Como a,b,c,$d \in$ SF, $a \leq b$, $c = a + b$, $d = b + c$. Substituindo

$$3a(a + b) < b^2$$

para $a = b$

$$6b^2 < b^2 \qquad \longrightarrow\!|\!\longleftarrow$$

Para $a < b$, $\exists e \in$ SF, tal que $e < a$, $b = e + a$, assim

$$3a(a + a + e) < (a + e)^2$$

$$3(2a^2 + ae) < a^2 + 2ae + e^2 \qquad \longrightarrow\!|\!\longleftarrow$$

$\therefore \Delta > 0$, por conseguinte tais cúbicas não possuem 3 raízes reais, mas sim 2 complexas e uma real. $\square$

Concluímos estão que equações polinomias de graus 2 ou 3 com coeficientes da sequência de Fibonacci possuem raízes conplexas.

Podemos então ver quanto pode ser pesquisado sobre equações polinomiais, e quantas surpresas estas pesquisas nos reservam. Em espacial as pesquisas referentes às raízes de equações com características específicas. Como é o caso das apresentadas aqui.

Referências

[1] BOYER, C. B. - *História da Matemática*, São Paulo, Edgard Blucher, 1986.

[2] COXFORD, A. F. SHULT, A. P. - *As idéias da Álgebra*, São Paulo. Atual Editora LTDA, 1997.

[3] EVES, H.-*Introdução à História da Matemática*, Campinas, SP. UNICAMP, 2004.

[4] GARBI, G. G.-*O romance das equações algébricas: A História da Álgebra*, São Paulo. Makron Books, 1997.

[5] IEZZI, G.-*Álgebra III: números complexos, polinômios, equações algébricas*, São Paulo. Editora Moderna ltda, 1973.