Duas Alegorias e um Teorema: o Impossível, o Indeterminado, o Inconsistente e o Independente em Matemática

Prof. Dr. Samuel Gomes da Silva
(IM – UFBA)

Departamento de Matemática – Instituto de Matemática
Universidade Federal da Bahia

João Pessoa – Paraíba

Outubro de 2010

Esta é, sem dúvida nenhuma, uma palestra “in”... Nosso objetivo é discutir as noções de

Impossível

Indeterminado

Inconsistente

Independente

em Matemática !!!

Esta palestra é uma adaptação da palestra **Qual é o valor de zero elevado a zero ? (ou: o impossível, o indeterminado, o inconsistente e o independente em matemática**, apresentada em duas oportunidades em Salvador (na UFBA) em 2009 – uma delas durante um Café Cultural, organizado pelos alunos de graduação –, e também em Ilhéus (na UESC) e em Recife (na UFRPE).

Aproveito a oportunidade para agradecer aos colegas Maité Kulesza (UFRPE) e Nestor Centurión (UESC) pela oportunidade de divulgar (e desenvolver) este trabalho !!!

Cuidado !!!

Esta palestra nasceu num ambiente "bastante liberal" de um Café Cultural, então algumas precauções tem que ser tomadas...

- Utilizaremos várias vezes algumas palavras "especiais" (algumas de uso comum, outras não) em vários contextos, sem fazer definições precisas (o que em geral devemos evitar em apresentações técnicas !!!).
- Com isso, muitas vezes poderá parecer que estamos perdendo a clareza ou o foco do que estaremos falando a respeito ! Ou mesmo poderá parecer que não estamos falando de Matemática – mas garanto que não é o caso...
- O objetivo desta palestra é, antes de tudo, "levantar poeira" nas cabeças dos estudantes. Ao final talvez algumas partículas ainda estarão voando, mas certas coisas demoram mesmo para decantar !!!

Cuidado !!!

Esta palestra nasceu num ambiente "bastante liberal" de um Café Cultural, então algumas precauções tem que ser tomadas...

- Utilizaremos várias vezes algumas palavras "especiais" (algumas de uso comum, outras não) em vários contextos, sem fazer definições precisas (o que em geral devemos evitar em apresentações técnicas !!!).
- Com isso, muitas vezes poderá parecer que estamos perdendo a clareza ou o foco do que estaremos falando a respeito ! Ou mesmo poderá parecer que não estamos falando de Matemática – mas garanto que não é o caso...
- O objetivo desta palestra é, antes de tudo, "levantar poeira" nas cabeças dos estudantes. Ao final talvez algumas partículas ainda estarão voando, mas certas coisas demoram mesmo para decantar !!!

Cuidado !!!

Esta palestra nasceu num ambiente “bastante liberal” de um Café Cultural, então algumas precauções tem que ser tomadas...

- Utilizaremos várias vezes algumas palavras “especiais” (algumas de uso comum, outras não) em vários contextos, sem fazer definições precisas (o que em geral devemos evitar em apresentações técnicas !!!).
- Com isso, muitas vezes poderá parecer que estamos perdendo a clareza ou o foco do que estaremos falando a respeito ! Ou mesmo poderá parecer que não estamos falando de Matemática – mas garanto que não é o caso...
- O objetivo desta palestra é, antes de tudo, “levantar poeira” nas cabeças dos estudantes. Ao final talvez algumas partículas ainda estarão voando, mas certas coisas demoram mesmo para decantar !!!

Cuidado !!!

- De certo modo, esta palestra segue os princípios de um grande brasileiro, o apresentador de TV Abelardo Barbosa, o Chacrinha (1917-1988):
- **"Eu vim para confundir, e não para explicar !"**
- ... Em resumo, espero que todos saiam com mais dúvidas do que respostas...

Cuidado !!!

- De certo modo, esta palestra segue os princípios de um grande brasileiro, o apresentador de TV Abelardo Barbosa, o Chacrinha (1917-1988):
- **“Eu vim para confundir, e não para explicar !”**
- ... Em resumo, espero que todos saiam com mais dúvidas do que respostas...

Cuidado !!!

- De certo modo, esta palestra segue os princípios de um grande brasileiro, o apresentador de TV Abelardo Barbosa, o Chacrinha (1917-1988):
- **“Eu vim para confundir, e não para explicar !”**
- ... Em resumo, espero que todos saiam com mais dúvidas do que respostas...

Quão poderosa é a Matemática ?

- As pessoas em geral (não apenas os estudantes e profissionais de Matemática) tendem a ter uma visão bastante "sólida e confiante" no poder da Matemática, e na certeza absoluta de suas conclusões – certeza, inclusive, da existência dessas conclusões. Dado um problema matemático, existirá uma solução para ele !!! Basta achar (ou criar) uma demonstração...
- **Hilbert:** "Não existe **ignorabimus** em Matemática !!!"
- Vamos resumir essa "crença" em uma frase, escrita numa linguagem bem simples – sem nenhuma expressão filosófica em latim... –, com a qual imagino que uma boa parte de vocês concorda (talvez, todos concordem !!!):

Quão poderosa é a Matemática ?

- As pessoas em geral (não apenas os estudantes e profissionais de Matemática) tendem a ter uma visão bastante "sólida e confiante" no poder da Matemática, e na certeza absoluta de suas conclusões – certeza, inclusive, da existência dessas conclusões. Dado um problema matemático, existirá uma solução para ele !!! Basta achar (ou criar) uma demonstração...
- **Hilbert:** "Não existe **ignorabimus** em Matemática !!!"
- Vamos resumir essa "crença" em uma frase, escrita numa linguagem bem simples – sem nenhuma expressão filosófica em latim... –, com a qual imagino que uma boa parte de vocês concorda (talvez, todos concordem !!!):

Quão poderosa é a Matemática ?

- As pessoas em geral (não apenas os estudantes e profissionais de Matemática) tendem a ter uma visão bastante "sólida e confiante" no poder da Matemática, e na certeza absoluta de suas conclusões – certeza, inclusive, da existência dessas conclusões. Dado um problema matemático, existirá uma solução para ele !!! Basta achar (ou criar) uma demonstração...
- **Hilbert:** "Não existe **ignorabimus** em Matemática !!!"
- Vamos resumir essa "crença" em uma frase, escrita numa linguagem bem simples – sem nenhuma expressão filosófica em latim... –, com a qual imagino que uma boa parte de vocês concorda (talvez, todos concordem !!!):

Você concorda com essa frase ?

A "crença"

"A matemática é uma ciência exata, que nos fornece **sempre** respostas corretas, verdadeiras e únicas".

A idéia de "resposta única e verdadeira" (com a qual as pessoas tendem a concordar na frase acima) vem, possivelmente, do fato que todos acreditamos fortemente nos princípios lógicos do Terceiro Excluído e da Não-Contradição.

Voltaremos à essa frase várias vezes durante esta palestra. De certa forma, nosso objetivo é **"atacar a crença que temos nessa frase !"**

Estamos interessados em discutir o poder da Matemática, e, para tanto, vamos pensar um pouco em suas eventuais limitações, em dois níveis de discussão:

- O que é “impossível” **na** Matemática ?
  (“dentro da matemática”)

- O que é “impossível” **para** a Matemática ?
  (“olhando a matemática de fora”)

(Notar que, conforme prometido, já estamos usando uma palavra bastante complicada, sem defini-la formalmente: a palavra **impossível**...)

Existem "limitações" para a Matemática ?

Estamos interessados em discutir o poder da Matemática, e, para tanto, vamos pensar um pouco em suas eventuais limitações, em dois níveis de discussão:

- O que é "impossível" **na** Matemática ?
  ("dentro da matemática")
- O que é "impossível" **para** a Matemática ?
  ("olhando a matemática de fora")

(Notar que, conforme prometido, já estamos usando uma palavra bastante complicada, sem defini-la formalmente: a palavra **impossível**...)

Seria a Matemática... Onipotente ?

Para algumas pessoas, vale a seguinte frase:

Eis aí a única entidade onipotente !

Onipotente, só Deus !

Com o perdão dos mais religiosos (pela eventual blasfêmia de trazer Deus à baila !), lembro que existe até uma famosa demonstração de que "a existência de Deus é equivalente ao Axioma da Escolha"... (Meyer)

Pois bem – vamos à primeira **alegoria** desta palestra ! Vamos discutir um pouco a onipotência de Deus – e tentar trazer alguma lição para nosso estudo da Matemática...

O Paradoxo da Onipotência

O objetivo deste paradoxo é contestar (ou discutir) a onipotência de Deus, e o mesmo vem sendo estudado desde o século XII. Ele se baseia na seguinte pergunta (ou em variações dela):

Sim ou não ?

Deus pode construir uma pedra tão pesada que ele próprio não consiga levantá-la ?

Existem variações interessantes desse paradoxo. Por exemplo:

- O que acontece quando uma força irresistível encontra um objeto inamovível ?
- Ou, para quem passa madrugadas assistindo a programas de propaganda na televisão: quem ganha, as facas Ginsu ou as meias Vivarina ???

O Paradoxo da Onipotência

O objetivo deste paradoxo é contestar (ou discutir) a onipotência de Deus, e o mesmo vem sendo estudado desde o século XII. Ele se baseia na seguinte pergunta (ou em variações dela):

Sim ou não ?

Deus pode construir uma pedra tão pesada que ele próprio não consiga levantá-la ?

Existem variações interessantes desse paradoxo. Por exemplo:

- O que acontece quando uma força irresistível encontra um objeto inamovível ?
- Ou, para quem passa madrugadas assistindo a programas de propaganda na televisão: quem ganha, as facas Ginsu ou as meias Vivarina ???

O Paradoxo da Onipotência

Para qualquer resposta que se dê (positiva ou negativa) para a pergunta sobre Deus e a pedra, conclui-se que Deus **não é** onipotente.

- Se Deus não pode construir essa pedra que ele mesmo não consegue levantar, **então existe algo que Ele não pode fazer** - construir essa pedra que Ele próprio não pode levantar.
- Se Deus pode construir essa pedra, **então existe algo que Ele não pode fazer** - levantar essa pedra.

Como os defensores da idéia de onipotência de Deus podem se opor a esse paradoxo ? Vamos levantar alguns argumentos utilizados. Alguns não nos ajudarão na sequência – mas outros sim !!!

Tentando "escapar" do Paradoxo...

Uma maneira é considerar que, diante da questão da onipotência de Deus, falar em "pedra tão pesada que ele não possa levantar" seria algo tão sem sentido como "um círculo quadrado". Essa foi a posição de C. S. Lewis, de quem citamos a seguinte frase:

C. S. Lewis, 1898-1963, autor de "Crônicas de Nárnia"

"Combinações de palavras que não possuam sentido não ganham sentido simplesmente colocando 'Deus pode' na frente delas."

Assim, o paradoxo seria apenas um jogo de palavras sem sentido - algo "nonsense".

Tentando "escapar" do Paradoxo...

- Uma outra maneira é considerar o seguinte "truque": se Deus é onipotente, ele pode retirar Sua própria onipotência. Então Ele construiria a pedra, retiraria a própria onipotência e, pronto, "na hora de não levantar a pedra" Ele não seria mais onipotente. Não existe mais contradição, só que Deus perde a onipotência no final... Mas perceba que Ele efetivamente **construiu** a pedra que Ele **não pôde** levantar.
- Um outro argumento é considerar que a onipotência de Deus seria relacionada a poder fazer coisas que "não fossem contra os seus princípios". Nesta interpretação, Deus, por exemplo, não poderia mentir !!!

Lula em Copenhaghe, 2009:

"Impossível só é Deus pecar"

No entanto, ele continuaria onipotente, pois continua podendo fazer "tudo que não fosse contra os Seus princípios"...

Tentando “escapar” do Paradoxo...

- Uma outra maneira é considerar o seguinte “truque”: se Deus é onipotente, ele pode retirar Sua própria onipotência. Então Ele construiria a pedra, retiraria a própria onipotência e, pronto, “na hora de não levantar a pedra” Ele não seria mais onipotente. Não existe mais contradição, só que Deus perde a onipotência no final... Mas perceba que Ele efetivamente **construiu** a pedra que Ele **não pôde** levantar.
- Um outro argumento é considerar que a onipotência de Deus seria relacionada a poder fazer coisas que “não fossem contra os seus princípios”. Nesta interpretação, Deus, por exemplo, não poderia mentir !!!

Lula em Copenhaghe, 2009:

“Impossível só é Deus pecar”

No entanto, ele continuaria onipotente, pois continua podendo fazer “tudo que não fosse contra os Seus princípios”...

- Ainda dentro desta linha de “restringir a definição de onipotência”, pode-se considerar que **não é do interesse de Deus que existam contradições**. Nesse sentido, se a pergunta fosse “Deus pode fazer com que $2 + 2 = 5$?”, a resposta seria “Não, pois não é do Seu interesse que existam contradições”. Isso estaria contra os Seus princípios !!!
- Uma outra linha é aceitar a contradição. Nesta linha, Deus pode fazer com que $2 + 2$ seja, ao mesmo tempo, 4 e 5 !!! Ou então, construir uma pedra tão grande que ele não possa levantar, mas no final levantá-la do mesmo jeito !!!

  Nesta linha, Deus poderia fazer realmente tudo, mesmo que fosse contraditório ou absurdo.

Tentando “escapar” do Paradoxo...

- Ainda dentro desta linha de “restringir a definição de onipotência”, pode-se considerar que **não é do interesse de Deus que existam contradições**. Nesse sentido, se a pergunta fosse “Deus pode fazer com que $2 + 2 = 5$?”, a resposta seria “Não, pois não é do Seu interesse que existam contradições”. Isso estaria contra os Seus princípios !!!
- Uma outra linha é aceitar a contradição. Nesta linha, Deus pode fazer com que $2 + 2$ seja, ao mesmo tempo, 4 e 5 !!! Ou então, construir uma pedra tão grande que ele não possa levantar, mas no final levantá-la do mesmo jeito !!!

  Nesta linha, Deus poderia fazer realmente tudo, mesmo que fosse contraditório ou absurdo.

Discutindo "Y pode fazer X"

Observamos que, na tentativa de restringir a onipotência de uma entidade Y, buscando evitar contradições, podemos tentar fazer duas tentativas de restrição com relação a "efetuar tarefas X" (**procure entender bem a diferença**):

- Podemos considerar Y onipotente se Y pode fazer qualquer tarefa X, desde que "X" não contrarie os princípios da lógica.
- Podemos considerar Y onipotente se Y pode fazer qualquer tarefa X, desde que "Y pode fazer X" não contrarie os princípios da lógica.

  Exercício: Ambas as restrições resolvem, isoladamente, o Paradoxo (mantendo a onipotência de Deus) ? Ou apenas uma delas ?

Discutindo “Y pode fazer X”

Observamos que, na tentativa de restringir a onipotência de uma entidade Y, buscando evitar contradições, podemos tentar fazer duas tentativas de restrição com relação a “efetuar tarefas X” (**procure entender bem a diferença**):

- Podemos considerar Y onipotente se Y pode fazer qualquer tarefa X, desde que “X” não contrarie os princípios da lógica.
- Podemos considerar Y onipotente se Y pode fazer qualquer tarefa X, desde que “Y pode fazer X” não contrarie os princípios da lógica.

  Exercício: Ambas as restrições resolvem, isoladamente, o Paradoxo (mantendo a onipotência de Deus) ? Ou apenas uma delas ?

Possivelmente, a melhor maneira de considerar o Paradoxo para nós é a seguinte:

Deus não quer contradições !

Para que não tenhamos contradições, então devem existir coisas que Deus não possa fazer - por exemplo, Deus não pode fazer com que $2 + 2 = 5$, e também Deus não pode construir uma pedra tão pesada que ele não possa levantá-la.

Ou seja: a onipotência total levaria a contradições... Em outras palavras, **a unica maneira de termos onipotência plena é admitindo contradições !!!**

Note que, no enunciado acima, estamos combinando as duas restrições em “Y pode fazer X” que consideramos; por quê ?

Quais lições podemos levar para a Matemática dessa nossa brincadeira com o Paradoxo da Onipotência ?

- Sendo Y = Matemática, podemos procurar tarefas X que sejam tais que "X" contrarie os princípios da lógica. Isto equivale àquela questão inicial: o que é impossível **na** Matemática ? (olhando de dentro).
- Sendo Y = Matemática, podemos procurar tarefas X que sejam tais que "Y pode fazer X" contrarie os princípios da lógica. Isto equivale àquela questão inicial: o que é impossível **para** a Matemática ? (olhando de fora).
- E vamos fazer mais um joguinho de palavras para introduzir a próxima pergunta...

Como todos os presentes são pessoas muito devotadas a Matemática, identifiquemos "Deus" ≡ "Matemática", e pense que "Deus pode fazer" ≡ "A Matemática pode demonstrar".

Quais lições podemos levar para a Matemática dessa nossa brincadeira com o Paradoxo da Onipotência ?

- Sendo Y = Matemática, podemos procurar tarefas X que sejam tais que "X" contrarie os princípios da lógica. Isto equivale àquela questão inicial: o que é impossível **na** Matemática ? (olhando de dentro).
- Sendo Y = Matemática, podemos procurar tarefas X que sejam tais que "Y pode fazer X" contrarie os princípios da lógica. Isto equivale àquela questão inicial: o que é impossível **para** a Matemática ? (olhando de fora).
- E vamos fazer mais um joguinho de palavras para introduzir a próxima pergunta...

Como todos os presentes são pessoas muito devotadas a Matemática, identifiquemos "Deus" ≡ "Matemática", e pense que "Deus pode fazer" ≡ "A Matemática pode demonstrar".

Quais lições podemos levar para a Matemática dessa nossa brincadeira com o Paradoxo da Onipotência ?

- Sendo Y = Matemática, podemos procurar tarefas X que sejam tais que "X" contrarie os princípios da lógica. Isto equivale àquela questão inicial: o que é impossível **na** Matemática ? (olhando de dentro).
- Sendo Y = Matemática, podemos procurar tarefas X que sejam tais que "Y pode fazer X" contrarie os princípios da lógica. Isto equivale àquela questão inicial: o que é impossível **para** a Matemática ? (olhando de fora).
- E vamos fazer mais um joguinho de palavras para introduzir a próxima pergunta...

  Como todos os presentes são pessoas muito devotadas a Matemática, identifiquemos "Deus" $\equiv$ "Matemática", e pense que "Deus pode fazer" $\equiv$ "A Matemática pode demonstrar".

- Procurando manter as analogias, a primeira restrição (evitar provar X, se X contrariar os princípios da lógica) deve se manter ! Sabemos que, em Lógica Clássica, se obtemos uma contradição o sistema se trivializa e todas as asserções seriam demonstradas ! (A não ser que se mude a Lógica subjacente e trabalhemos com uma Lógica Paraconsistente, mas isso seria assunto para outra palestra...)
- "Forçando a barra" na seguinte analogia, considere que "as verdades são coisas sólidas, concretas como uma pedra"... Nesse sentido, a questão colocada no Paradoxo da Onipotência ("pode existir alguma pedra que não possa ser levantada por Deus ?") acabaria correspondendo à seguinte pergunta...

- Procurando manter as analogias, a primeira restrição (evitar provar X, se X contrariar os princípios da lógica) deve se manter ! Sabemos que, em Lógica Clássica, se obtemos uma contradição o sistema se trivializa e todas as asserções seriam demonstradas ! (A não ser que se mude a Lógica subjacente e trabalhemos com uma Lógica Paraconsistente, mas isso seria assunto para outra palestra...)
- "Forçando a barra" na seguinte analogia, considere que "as verdades são coisas sólidas, concretas como uma pedra"... Nesse sentido, a questão colocada no Paradoxo da Onipotência ("pode existir alguma pedra que não possa ser levantada por Deus ?") acabaria correspondendo à seguinte pergunta...

Uma questão complicada !

Existe alguma verdade matemática
que não possa ser demonstrada ?

... Agora sim chegamos a algo bem complicado !...

Vamos dar seguimento à palestra discutindo inicialmente a primeira questão de limitação, que é bem mais fácil: o "impossível" **na** Matemática. Aproveitaremos para discutir também a noção de "indeterminado" em Matemática.

Mais à frente, usaremos mais uma alegoria para atacar, por fim, a questão que surgiu neste slide !!! Essa questão está associada a discussões sobre "consistência e independência em Matemática"...

O décimo-primeiro mandamento !!!

Vamos começar com o décimo-primeiro mandamento: "Não dividirás por zero". Ou seja, "não pode ocorrer zero no denominador".

O usual é simplesmente falarmos que

- **"não existe $\frac{1}{0}$"; e**
- **"não existe $\frac{0}{0}$".**

De fato: não existem números reais que estejam associados a essas expressões (e nada do que eu disser em seguida vai fazer com que eles existam...) Mas, vamos dar uma segunda olhada nisso ! Eu tenho um enorme prazer em dizer para vocês, neste momento, que existe uma grande diferença entre essas duas expressões ! Eu lhes digo que...

O impossível e o indeterminado

Tem uma diferença aí...

- $\dfrac{1}{0}$ é **impossível**.
- $\dfrac{0}{0}$ é **indeterminado**.

(lembrando ao aluno que, mesmo com essa eventual "diferenças de status", ambas expressões não estão "oficialmente" definidas...)

O aluno deve estar mais acostumado a usar as palavras "impossível" e "indeterminado" para sistemas lineares.

Para sistemas lineares...

Classificação dos Sistemas Lineares

- Um sistema linear é dito **impossível** se não admite nenhuma solução.
- Um sistema linear é dito **possível e indeterminado** se admite infinitas soluções.
- Um sistema linear é dito **possível e determinado** se admite uma única solução.

Lembre-se que um sistema é impossível quando você chega a conclusão que "as equações são contraditórias umas com as outras"; após manusearmos as equações (por triangulação, por exemplo), você chega numa expressão do tipo $0 = 1$.

Noções associadas a “impossível”

Assim,

$$
\begin{aligned}
\text{“impossível”} &\equiv \text{“não existe solução”} \\
&\equiv \text{“não acontece”} \\
&\equiv \text{“não existe”} \\
&\equiv \text{“}\textbf{contraditório}\text{”}
\end{aligned}
$$

Noções associadas a “indeterminado”

$$
\begin{aligned}
\text{“indeterminado”} &\equiv \text{“não existe uma solução única”}\\
&\equiv \text{“existe mais de uma solução”}\\
&\equiv \text{“pode acontecer de mais do que}\\
&\qquad \text{uma maneira”}\\
&\equiv \text{“}\textbf{não existe uma resposta única}\text{”}\\
&\equiv \text{“existem possibilidades diferentes,}\\
&\qquad \text{que não levam a uma contradição”}
\end{aligned}
$$

Ora, os mesmos raciocínios aparecem quando discutimos as frações com denominador zero !!!

Comecemos com $\dfrac{1}{0}$. Deixamos como exercício aos estudantes relembrar como se demonstra o seguinte

Teorema

Para todo número real x, $x.0 = 0$.

Com isso, se existisse o chamado "inverso multiplicativo do zero", $z = \dfrac{1}{0}$, teríamos $z.o = 1$, o que seria... uma contradição !

Temos então idéias semelhantes às que destacamos para os sistemas impossíveis:

- $\dfrac{1}{0}$ não existe, pois a equação $x.0 = 1$ não tem solução.
- É impossível existir um número real $z = \dfrac{1}{0}$, pois sua existência levaria a uma contradição.
- $\dfrac{1}{0}$ é algo que não pode acontecer ("a não ser que $0 = 1$").

Vamos agora usar o símbolo $\dfrac{a}{b}$ não como o símbolo de um número, e sim como o símbolo de uma conta exata... (Este é um pequeno truque que fazemos para convencer os colegas da indeterminação de $\dfrac{0}{0}$ ...)

Definição

Sejam a, b, c números reais quaisquer. Denotaremos por $\dfrac{a}{b} = c$ a situação em que $a = b.c$.

Pois bem...

Exercício. Mostre que, segundo a definição acima, **para qualquer número real** x, podemos escrever

$$\frac{0}{0} = x$$

Ou seja, $\dfrac{0}{0}$ pode ser o que você quiser... Aparecem aqui as idéias de

$$
\begin{aligned}
\text{“indeterminado”} \;&\equiv\; \text{“não existe uma solução única”}\\
&\equiv\; \text{“existe mais de uma solução”}\\
&\equiv\; \text{“pode acontecer de mais do que uma maneira”}\\
&\equiv\; \text{“}\textbf{não existe uma resposta única}\text{”}\\
&\equiv\; \text{“existem possibilidades diferentes, que não levam a uma contradição”}
\end{aligned}
$$

... exatamente como no caso dos sistemas indeterminados.

Indeterminações...

A palavra "indeterminação" também aparece em Cálculo, no estudo de limites, recordam-se ? No seu livro de cálculo possivelmente apareça a expressão "indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$".

Isso também se refere a "existência de infinitas possibilidades", ou "um limite do tipo $\frac{0}{0}$ pode ter como resultado o que você quiser".

De fato, dado um número real k qualquer previamente fixado, temos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{k.x}{x}$$

é um limite do tipo $\frac{0}{0}$ cujo resultado é k. Isso pode ser encarado como uma justificativa um pouco mais formal para a frase "$\frac{0}{0}$ pode ser o que você quiser".

Assim, ambas expressões $\frac{1}{0}$ e $\frac{0}{0}$ “não prestam”
- a primeira, porque não ocorre nunca; a segunda, porque ocorre para qualquer valor !!!

Outro caso famoso de indeterminação é o 0^0, que deu o título a versões prévias desta palestra !!!

Novamente, “não existe uma resposta única” !!! Convidamos o aluno a esboçar os gráficos de $f(x) = 0^x$, $g(x) = x^0$ e $h(x) = x^x$ e, em seguida, determinar o valor do limite dessas funções quando x tende a zero.

Para pensar em casa: Por quê $0! = 1$?

O impossível **na** Matemática é...

De acordo com a linha que estou desenvolvendo nesta palestra, estou tentando vender para vocês a idéia que o impossível, "dentro" da Matemática, é... A contradição, o contraditório, o absurdo.

Destacamos que: o interesse em manter a **consistência** em Matemática (consistência = ausência de contradição) se deve ao fato de que, em Lógica Clássica, se existe uma prova para uma contradição então todas as proposições poderiam ser demonstradas !!! Logo, tudo seria verdadeiro e falso ao mesmo tempo, trivializando o sistema !

Teríamos um gigantesco "$0 = 1$" e o universo se colapsaria a um ponto...

Assim, para X = contradição e Y = Matemática, "Y não pode fazer X", pois "X" contraria as leis da lógica !

... Restam então dois problemas pra se resolver, dentro do plano que apresentamos inicialmente, inspirados pelo Paradoxo da Onipotência...

- achar (se é que existem !) tarefas X para as quais, sendo Y = Matemática, "Y pode fazer X" contrarie as leis da lógica.
- responder à pergunta: Existem verdades matemáticas que não podem ser demonstradas ?

... Talvez a maneira com que responderemos a essas questões seja um pouco chocante... Respire fundo !!!

As duas questões serão respondidas ao mesmo tempo !!!

... Mostraremos para os colegas a seguinte

Afirmação

Sendo Y = Matemática e X a tarefa

X = exibir uma demonstração para todas as verdades matemáticas

então "Y pode fazer X" contraria as leis da Lógica (**a não ser que a Matemática seja inconsistente !**).

... Em outras palavras: se supusermos que a Matemática é consistente, então existem verdades que não podem ser demonstradas.

Essencialmente o argumento do Teorema que demonstraremos para comprovar a afirmação acima está descrito na seguinte **alegoria**...

A Máquina DIN-DIN

A Máquina DIN-DIN é uma "adaptação livre" de um quebra-cabeças lógico, proposto pelo célebre matemático, lógico e filósofo norte-americano Raymond Smullyan.

Essa adaptação é de autoria do colega Walter Carnielli (UNICAMP) e de Michael Rathjen (Leeds, UK) e foi publicada na Revista Matemática Universitária n° 12, em 1990.

Aproveito a oportunidade para agradecer a Walter Carnielli por alguns comentários feitos por ele sobre este e vários tópicos relacionados, em contatos realizados via email durante a confecção desta palestra, no final do mês de julho.

A Máquina DIN-DIN

Podemos imaginar a Máquina DIN-DIN como uma daquelas impressoras bem antigas, que faziam barulhinhos mecânicos durante a impressão...

Essa máquina possui um rolo de papel (o qual podemos supor que não acabará nunca, ou que será sempre substituído a tempo !) e imprime na folha de papel **expressões** (i.e., sequências arbitrárias de símbolos) construídas a partir de:

$$\mathsf{D},\ \mathsf{I},\ \mathsf{N} \text{ e } -$$

Algumas expressões especiais serão denominadas **sentenças**, e para estas será associada uma interpretação (ou “significado”) que nos possibilitará falar em “sentenças verdadeiras” e “sentenças falsas”.

Serão quatro tipos de sentenças:

- A sentença I-X (onde X é uma expressão qualquer) significa que **"X é imprimível"**, e será verdadeira se, e somente se, a expressão X aparece, mais cedo ou mais tarde, impressa na folha de papel.
- A sentença NI-X (onde X ...) significa que **"X não é imprimível"**, e será verdadeira se, e somente se, a expressão X nunca aparece impressa na folha de papel.
- ID-X (onde X ...) significa que **"X-X é imprimível"**, e será verdadeira se, e somente se, a expressão X-X ("dobro de X") aparece, mais cedo ou mais tarde, impressa na folha de papel.
- NID-X (onde X ...) significa que **"X-X não é imprimível"** e será verdadeira se, e somente se, a expressão X-X nunca aparece impressa na folha de papel.

(Ou seja: "I" $\equiv$ "imprime", "D" $\equiv$ "dobro" e "N" $\equiv$ "não".)

Observar que as interpretações que escolhemos são noções que estão "fora da máquina", apesar de falarem "sobre" a Máquina – no sentido de que as interpretações, a princípio, não alteram o "comportamento" da Máquina ! Nossa única hipótese nesse sentido será a chamada "Hipótese de Correção", que pressupõe que a Máquina está, de uma certa forma, "bem regulada"...

Hipótese de Correção

Quando a Máquina imprime sentenças, com certeza imprime **apenas sentenças verdadeiras**.

Note, porém – por favor !! – que não estamos assumindo que a Máquina "apenas imprime sentenças", ou que "imprime todas as sentenças verdadeiras": estamos apenas afirmando que a Máquina **não imprime sentenças falsas**.

Um fato interessante !!!

Na verdade, a partir das interpretações fixadas e da Hipótese de Correção, temos uma afirmação muito interessante para fazer !!!

Afirmação

Existem sentenças verdadeiras que a Máquina DIN-DIN **nunca vai imprimir**.

Vejamos um exemplo de sentença dessa forma...

O que diz a sentença... NID-NID ???

Consideremos agora a sentença NID-NID. Pelas interpretações dadas, NID-NID é verdadeira, se, e somente se, NID-NID é não imprimível. Ou seja:

NID-NID é verdadeira se, e somente se, não é imprimível.

Intuitivamente, NID-NID diz: **"Eu não sou imprimível"**.

Assim, temos duas opções: ou NID-NID é falsa e imprimível, ou é verdadeira e não imprimível.

A primeira alternativa não pode ocorrer (**por quê ???**).

NID-NID é verdadeira e não imprimível

... NID-NID não pode ser falsa porque, neste caso, ela seria imprimível – o que contradiz a Hipótese de Correção !!! Assumimos que a Máquina não imprime sentenças falsas !!!

Assim, NID-NID é verdadeira e, como ela própria afirma a sua não-imprimibilidade... NID-NID não é imprimível.

NID-NID é uma sentença verdadeira que não é imprimível.

Exercício. Responda: ID-NID é verdadeira ? É imprimível ? (Dica: ID-NID é a negação de...)

Encarando a Máquina como um "sistema formal", poderíamos desejar que ele tivesse uma certa propriedade de "completude", definida da seguinte maneira: **dada uma sentença S, imprimir sempre ou S ou a negação de S**. Se ocorresse isso, poderíamos dizer que a Máquina sempre **decidiria** por uma sentença entre S e negação de S.

Bem, acabamos de ver na página anterior que, considerando-se S = NID-NID, temos que nem S e nem a negação de S podem ser imprimíveis !!! Conclusão:

A Máquina DIN-DIN é um sistema formal incompleto

Existem sentenças indecidíveis para a Máquina DIN-DIN.

... Todos perceberam a analogia a ser feita ???

... Espero que todos já tenham percebido a analogia que vamos fazer...

Vamos identificar o sistema formal dado pela Máquina DIN-DIN com a Matemática, e "ser imprimível" significará "ser demonstrável". Notar que vale a Hipótese de Correção, ou seja, proposições matemáticas que podem ser demonstradas com certeza são verdadeiras...

Será que podemos adaptar os argumentos dados para a Máquina DIN-DIN e mostrar que "existem verdades matemáticas que não podem ser demonstradas" ?

A resposta é... SIM !!!

Na verdade, o argumento utilizado para a Máquina DIN-DIN é, essencialmente, o mesmo argumento utilizado para provar aquele que é talvez o mais controverso, polêmico e chocante teorema matemático do século XX...

... E esse é o teorema referenciado no título desta palestra ("Duas Alegorias e um Teorema"). Ainda não citamos o nome deste famoso teorema para não "assustar" ninguém...

No teorema a seguir, a codificação das sentenças utiliza os números naturais, por isso deve ser suposto que a teoria em questão inclua uma "porção suficiente da Aritmética".

Teorema (Gödel, 1931)

Se uma teoria consistente T é suficientemente complicada de modo a conter a Aritmética (de Peano), então T não é completa - i.e., T possui proposições indecidíveis.

Notar que a "Matemática" é, em geral, formalizada como sendo a "Teoria dos Conjuntos". Assim, aplicando o teorema acima, teremos que "se a Matemática for consistente, então devem existir proposições indecidíveis".

Seja T a teoria consistente em questão. Vamos mostrar que existe uma sentença verdadeira que não pode ser demonstrada. **“Para se manter a consistência, algumas pedras não poderão ser levantadas”.**

Como T contém uma parte suficiente da Aritmética (nesse ponto de vista, alguns autores dizem que T é “suficientemente complicada a ponto de...”), vamos aritmetizar a tal teoria, de modo que cada afirmação representar (e ser representada por) uma afirmação aritmética.

Essa parte é a chamada “construção dos números de Gödel”. Observamos que os números de Gödel são capazes também de codificar a noção de “demonstração em T”.

Trabalhando muito cuidadosamente com sua codificação, Gödel foi capaz de construir uma sentença G, a chamada **sentença de Gödel**, que satisfaz a seguinte propriedade:

A Sentença de Gödel

G é verdadeira se, e somente se, G não é demonstrável.

Em outras palavras, podemos intuitivamente encarar G como uma **sentença que declara sua própria não-demonstrabilidade**.

(Alguns autores dizem que, nesta parte da demonstração, Gödel fez uma "variação diabólica" do Paradoxo do Mentiroso, o qual consiste em discutir o valor de verdade da afirmação "Esta frase é falsa". Enquanto no Paradoxo do Mentiroso realmente chegamos a um paradoxo, com a sentença de Gödel não se chega a um paradoxo, como veremos a seguir...)

Pois bem: afirmamos que G não pode ser demonstrada na teoria T !!!

De fato: como sempre sabemos que vale a "correção", se T demonstrasse G teríamos que G é verdadeira, e portanto não-demonstrável.

Só que aí teríamos que, a partir de T, conclui-se que "T demonstra G" e, ao mesmo tempo, "T não demonstra G". Isso é um absurdo, pois supomos que a teoria T é... Consistente !!! T não pode concluir duas conclusões contraditórias !!!

Portanto G não pode ser demonstrada – e, como ela afirma exatamente sua não-demonstrabilidade, temos que G é verdadeira (pois afirma um fato verdadeiro) e não pode ser demonstrada.

Pense agora na **afirmação aritmética que codificou a sentença de Gödel G**. Seja S essa afirmação aritmética. Pela codificação feita, podemos afirmar que S é uma afirmação sobre os números naturais que é verdadeira e que não pode ser demonstrada – sendo portanto uma "verdade matemática não-demonstrável".

Novamente usando a Correção, conclui-se facilmente que essa afirmação S é **indecidível**.

Conclusão !!!

Existem proposições indecidíveis para a Matemática (a não ser que a Matemática seja ela própria inconsistente.).

Neste sentido, o Teorema da Incompletude mostrou que Hilbert estava errado – existem **ignorabimus** em Matemática !!!

Se existem proposições indecidíveis em Matemática, como fica aquela nossa "crença" do início da palestra, sobre o poder da Matemática ?

A "crença"

"A matemática é uma ciência exata, que nos fornece **sempre** respostas corretas, verdadeiras e únicas".

... Acabamos de verificar que não podemos garantir o **"sempre"** em nossa crença. Dada uma proposicão indecidível I, a pergunta "vale I, sim ou não ?" não possui uma resposta que possa ser demonstrada !!!

... Isso te incomoda muito ?? Sim ou não ??

Será que S é o único exemplo de proposição indecidível ?

O Primeiro Teorema da Incompletude nos fornece um exemplo "concreto" de proposição indecidível para a Matemática. Será este o único exemplo ? Ou existem outros exemplos, obtidos por outras técnicas ?

A resposta é: sim, existem outros exemplos, obtidos por outras técnicas (e que não envolvem "auto-referências").

Existem técnicas muito importantes que usam a noção de **construção de modelos**.

Vamos ter que introduzir algumas noções de **semântica** e **sintática**...

Alguns termos técnicos...

- Uma teoria T é dita **consistente** se T não nos leva a contradições – i.e., não existe uma afirmação φ tal que T prova φ e T prova a negação de φ.
- Uma afirmação φ é dita **consistente** com uma teoria T se T, acrescentada de φ, é uma teoria consistente.
- Uma afirmação φ é dita **independente** de uma teoria T se tanto φ como a negação de φ são consistentes com T.
- Um **modelo** para T é uma "estrutura" (conjunto ou classe) no qual a teoria pode ser "interpretada".
- Uma afirmação φ é dita uma **consequência semântica de T** se φ for verdadeira em todos os modelos de T.
- Uma afirmação φ é dita uma **consequência sintática de T** se existe uma demonstração de φ dentro da teoria T.
- Uma teoria T é dita **completa** se, dada uma afirmação φ qualquer, então ou T prova φ ou T prova a negação de φ.

Alguns termos técnicos...

- Uma teoria T é dita **consistente** se T não nos leva a contradições – i.e., não existe uma afirmação φ tal que T prova φ e T prova a negação de φ.
- Uma afirmação φ é dita **consistente** com uma teoria T se T, acrescentada de φ, é uma teoria consistente.
- Uma afirmação φ é dita **independente** de uma teoria T se tanto φ como a negação de φ são consistentes com T.
- Um **modelo** para T é uma "estrutura" (conjunto ou classe) no qual a teoria pode ser "interpretada".
- Uma afirmação φ é dita uma **consequência semântica de T** se φ for verdadeira em todos os modelos de T.
- Uma afirmação φ é dita uma **consequência sintática de T** se existe uma demonstração de φ dentro da teoria T.
- Uma teoria T é dita **completa** se, dada uma afirmação φ qualquer, então ou T prova φ ou T prova a negação de φ.

Alguns termos técnicos...

- Uma teoria T é dita **consistente** se T não nos leva a contradições – i.e., não existe uma afirmação φ tal que T prova φ e T prova a negação de φ.
- Uma afirmação φ é dita **consistente** com uma teoria T se T, acrescentada de φ, é uma teoria consistente.
- Uma afirmação φ é dita **independente** de uma teoria T se tanto φ como a negação de φ são consistentes com T.
- Um **modelo** para T é uma "estrutura" (conjunto ou classe) no qual a teoria pode ser "interpretada".
- Uma afirmação φ é dita uma **consequência semântica de T** se φ for verdadeira em todos os modelos de T.
- Uma afirmação φ é dita uma **consequência sintática de T** se existe uma demonstração de φ dentro da teoria T.
- Uma teoria T é dita **completa** se, dada uma afirmação φ qualquer, então ou T prova φ ou T prova a negação de φ.

Alguns termos técnicos...

- Uma teoria T é dita **consistente** se T não nos leva a contradições – i.e., não existe uma afirmação φ tal que T prova φ e T prova a negação de φ.
- Uma afirmação φ é dita **consistente** com uma teoria T se T, acrescentada de φ, é uma teoria consistente.
- Uma afirmação φ é dita **independente** de uma teoria T se tanto φ como a negação de φ são consistentes com T.
- Um **modelo** para T é uma "estrutura" (conjunto ou classe) no qual a teoria pode ser "interpretada".
- Uma afirmação φ é dita uma **consequência semântica de T** se φ for verdadeira em todos os modelos de T.
- Uma afirmação φ é dita uma **consequência sintática de T** se existe uma demonstração de φ dentro da teoria T.
- Uma teoria T é dita **completa** se, dada uma afirmação φ qualquer, então ou T prova φ ou T prova a negação de φ.

Alguns termos técnicos...

- Uma teoria T é dita **consistente** se T não nos leva a contradições – i.e., não existe uma afirmação φ tal que T prova φ e T prova a negação de φ.
- Uma afirmação φ é dita **consistente** com uma teoria T se T, acrescentada de φ, é uma teoria consistente.
- Uma afirmação φ é dita **independente** de uma teoria T se tanto φ como a negação de φ são consistentes com T.
- Um **modelo** para T é uma "estrutura" (conjunto ou classe) no qual a teoria pode ser "interpretada".
- Uma afirmação φ é dita uma **consequência semântica de T** se φ for verdadeira em todos os modelos de T.
- Uma afirmação φ é dita uma **consequência sintática de T** se existe uma demonstração de φ dentro da teoria T.
- Uma teoria T é dita **completa** se, dada uma afirmação φ qualquer, então ou T prova φ ou T prova a negação de φ.

Alguns termos técnicos...

- Uma teoria T é dita **consistente** se T não nos leva a contradições – i.e., não existe uma afirmação φ tal que T prova φ e T prova a negação de φ.
- Uma afirmação φ é dita **consistente** com uma teoria T se T, acrescentada de φ, é uma teoria consistente.
- Uma afirmação φ é dita **independente** de uma teoria T se tanto φ como a negação de φ são consistentes com T.
- Um **modelo** para T é uma "estrutura" (conjunto ou classe) no qual a teoria pode ser "interpretada".
- Uma afirmação φ é dita uma **consequência semântica de T** se φ for verdadeira em todos os modelos de T.
- Uma afirmação φ é dita uma **consequência sintática de T** se existe uma demonstração de φ dentro da teoria T.
- Uma teoria T é dita **completa** se, dada uma afirmação φ qualquer, então ou T prova φ ou T prova a negação de φ.

Alguns termos técnicos...

- Uma teoria T é dita **consistente** se T não nos leva a contradições – i.e., não existe uma afirmação φ tal que T prova φ e T prova a negação de φ.
- Uma afirmação φ é dita **consistente** com uma teoria T se T, acrescentada de φ, é uma teoria consistente.
- Uma afirmação φ é dita **independente** de uma teoria T se tanto φ como a negação de φ são consistentes com T.
- Um **modelo** para T é uma "estrutura" (conjunto ou classe) no qual a teoria pode ser "interpretada".
- Uma afirmação φ é dita uma **consequência semântica de T** se φ for verdadeira em todos os modelos de T.
- Uma afirmação φ é dita uma **consequência sintática de T** se existe uma demonstração de φ dentro da teoria T.
- Uma teoria T é dita **completa** se, dada uma afirmação φ qualquer, então ou T prova φ ou T prova a negação de φ.

Ou seja: a noção de consequência semântica procura capturar a idéia de **“verdade segundo interpretações”**, enquanto que a de consequência sintática procurar capturar a idéia de **“verdade segundo demonstrações”**.

Notar que, com os novos termos introduzidos, podemos dizer que o Primeiro Teorema da Incompletude de Gödel nos diz, a grosso modo, que não podemos exigir, ao mesmo tempo, consistência e completude !!!

Teorema da Incompletude - Enunciado resumido

Teorias consistentes que contém a Aritmética não são completas.

Observando o princípio **ex falso quodlibet**, o qual garante que a partir de contradições podemos deduzir qualquer afirmação, o estudante mais interessado poderá verificar os seguintes Fatos e seus Corolários !!!

Fatos

- T é consistente se, e só se, existe alguma afirmação que não pode ser demonstrada.
- φ é consequência semântica de T se, e só se, T + negação de φ não tem modelo.
- φ é consequência sintática de T se, e só se, a negação de φ não é consistente com T.

Observando o princípio **ex falso quodlibet**, o qual garante que a partir de contradições podemos deduzir qualquer afirmação, o estudante mais interessado poderá verificar os seguintes Fatos e seus Corolários !!!

Fatos

- T é consistente se, e só se, existe alguma afirmação que não pode ser demonstrada.
- φ é consequência semântica de T se, e só se, T + negação de φ não tem modelo.
- φ é consequência sintática de T se, e só se, a negação de φ não é consistente com T.

Alguns Fatos e Corolários !!!

Observando o princípio **ex falso quodlibet**, o qual garante que a partir de contradições podemos deduzir qualquer afirmação, o estudante mais interessado poderá verificar os seguintes Fatos e seus Corolários !!!

Fatos

- T é consistente se, e só se, existe alguma afirmação que não pode ser demonstrada.
- φ é consequência semântica de T se, e só se, T $+$ negação de φ não tem modelo.
- φ é consequência sintática de T se, e só se, a negação de φ não é consistente com T.

Alguns Fatos e Corolários !!!

Consequências

- φ é consistente com T se, e só se,
  T não prova a negação de φ.
- φ é independente de T se, e só se, φ é indecidível
  (i.e., T não prova nem φ e nem a negação de φ).

A terminologia "proposição indecidível" foi a originalmente utilizada por Gödel em 1931.

Em textos mais atuais, a terminologia utilizada é a de **independência**. O termo **decidibilidade** também tem um outro sentido em Computação Teórica, aplicado a teorias e não a afirmações, e portanto esse sentido é diferente do uso que estamos dando nesta palestra.

Alguns Fatos e Corolários !!!

Consequências

- φ é consistente com T se, e só se, T não prova a negação de φ.
- φ é independente de T se, e só se, φ é indecidível (i.e., T não prova nem φ e nem a negação de φ).

A terminologia "proposição indecidível" foi a originalmente utilizada por Gödel em 1931.

Em textos mais atuais, a terminologia utilizada é a de **independência**. O termo **decidibilidade** também tem um outro sentido em Computação Teórica, aplicado a teorias e não a afirmações, e portanto esse sentido é diferente do uso que estamos dando nesta palestra.

Vamos agora apresentar os Teoremas que mostram que as noções semântica e sintática de “verdade” coincidem...

Teorema da Correção - Enunciados Equivalentes

- Se φ é consequência sintática de T, então φ é consequência semântica de T.
- Teorias que possuem modelo são consistentes.
- Se existe um modelo de T no qual φ é verdadeira, então φ é consistente com T.

Observação: Os enunciados acima são (facilmente !) equivalentes, assim, para provar o Teorema da Correção, basta provar qualquer um dos enunciados (normalmente, demonstra-se o segundo enunciado).

Vamos agora apresentar os Teoremas que mostram que as noções semântica e sintática de "verdade" coincidem...

Teorema da Correção - Enunciados Equivalentes

- Se φ é consequência sintática de T, então φ é consequência semântica de T.
- Teorias que possuem modelo são consistentes.
- Se existe um modelo de T no qual φ é verdadeira, então φ é consistente com T.

Observação: Os enunciados acima são (facilmente !) equivalentes, assim, para provar o Teorema da Correção, basta provar qualquer um dos enunciados (normalmente, demonstra-se o segundo enunciado).

Vamos agora apresentar os Teoremas que mostram que as noções semântica e sintática de "verdade" coincidem...

Teorema da Correção - Enunciados Equivalentes

- Se φ é consequência sintática de T, então φ é consequência semântica de T.
- Teorias que possuem modelo são consistentes.
- Se existe um modelo de T no qual φ é verdadeira, então φ é consistente com T.

Observação: Os enunciados acima são (facilmente !) equivalentes, assim, para provar o Teorema da Correção, basta provar qualquer um dos enunciados (normalmente, demonstra-se o segundo enunciado).

Teorema da Completude - Enunciados Equivalentes

- Se φ é consequência semântica de T, então φ é consequência sintática de T.
- Teorias consistentes possuem modelo.
- Se φ é consistente com T, então existe um modelo de T no qual φ é verdadeira.

Observação: Os enunciados acima são (facilmente !) equivalentes, assim, para provar o Teorema da Completude, basta provar qualquer um dos enunciados (normalmente, demonstra-se o segundo enunciado).

O Teorema da Completude é **muito importante**, exatamente por fazer "a ponte" entre as visões sintática e semântica da noção de verdade.

Teorema da Completude - Enunciados Equivalentes

- Se φ é consequência semântica de T, então φ é consequência sintática de T.
- Teorias consistentes possuem modelo.
- Se φ é consistente com T, então existe um modelo de T no qual φ é verdadeira.

Observação: Os enunciados acima são (facilmente !) equivalentes, assim, para provar o Teorema da Completude, basta provar qualquer um dos enunciados (normalmente, demonstra-se o segundo enunciado).

O Teorema da Completude é **muito importante**, exatamente por fazer "a ponte" entre as visões sintática e semântica da noção de verdade.

Teorema da Completude (Gödel, 1930)

Teorema da Completude - Enunciados Equivalentes

- Se φ é consequência semântica de T, então φ é consequência sintática de T.
- Teorias consistentes possuem modelo.
- Se φ é consistente com T, então existe um modelo de T no qual φ é verdadeira.

Observação: Os enunciados acima são (facilmente !) equivalentes, assim, para provar o Teorema da Completude, basta provar qualquer um dos enunciados (normalmente, demonstra-se o segundo enunciado).

O Teorema da Completude é **muito importante**, exatamente por fazer "a ponte" entre as visões sintática e semântica da noção de verdade.

Como consequência do Teorema da Correção, temos o método de "construção de modelos" como ferramenta para provar a consistência de afirmações matemáticas.

Construção de Modelos

Para mostrar que uma afirmação φ é consistente com uma teoria T, basta exibir um modelo de T no qual φ seja verdadeira.

Segue que, para mostrar que φ é independente de T usando construção de modelos, devemos ser capazes de construir **dois modelos de T**: uma para φ e outro para a negação de φ.

O estudante fica convidado a refletir sobre como a técnica de construção de modelos foi usada, por exemplo, na verificação de que o Quinto Postulado de Euclides é independente dos demais axiomas da Geometria ! (Dica: Pensar nas geometrias não-euclidianas...)

Uma observação: no caso em que T = Matemática = Teoria dos Conjuntos, diremos simplesmente "φ é consistente" ou "φ é independente" (não precisaremos colocar "com T"/"de T" no final, ficará subentendido).

... Na verdade, em alguns casos é super fácil !!!

Considere, por exemplo, T como sendo a Teoria dos Anéis, e considere a afirmação (da linguagem da Teoria de Anéis)

$$\varphi \equiv \text{“Existe } x \text{ tal que } x^2 = 2\text{”}$$

... Será que a Teoria dos Anéis é capaz de conseguir decidir φ - i.e., existe como provar φ ou a sua negação ?

Essa afirmação é independente da Teoria dos Anéis !

Existem modelos de T onde φ é verdadeira... Basta considerar como modelo o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$!

E existem modelos de T onde onde φ é falsa ! Basta considerar como modelo o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$...

Assim, φ é uma proposição independente da Teoria dos Anéis !

Conclusão

A Teoria dos Anéis (ou mesmo a Teoria dos Corpos) não é capaz de decidir se a afirmação "Existe x tal que $x^2 = 2$" é verdadeira ou falsa.

E voltemos apensar em nossa "crenca"...

A "crença"

"A matemática é uma ciência exata, que nos fornece **sempre** respostas corretas, verdadeiras e **únicas**".

... Podemos encarar a pergunta "Existe x tal que $x^2 = 2$" como uma "pergunta que tem duas respostas"...

Existe x tal que $x^2 = 2$?

A resposta é SIM para os números reais
e é NÃO para os números racionais.

... Isso te incomoda muito ?? Sim ou não ?? Note que, para afirmações que sejam independentes de T, a noção de "verdade" depende fortemente do modelo escolhido para se trabalhar... Isso é consequência do Teorema da Completude !!!

Juntando Completude e Incompletude

Observamos que existem duas nocões diferentes de incompletude envolvidas nos Teoremas da Completude e da Incompletude.

A **completude semântica de T** consiste em que toda afirmação que é consequência semântica de T possa ser demonstrada, se tornando assim, também, consequência sintática.

A **completude sintática de T** consiste na decidibilidade de qualquer afirmação, demonstrando-se ou a afirmação ou a sua negação.

Assim, por exemplo, podemos dizer que a Matemática é completa semanticamente e incompleta sintaticamente.

Exercício. Combinando os Teoremas da Completude e da Incompletude, mostre que se uma teoria possui proposições indecidíveis então essa teoria possui modelos essencialmente diferentes entre si.

Indeterminado $\equiv$ Independente e Impossível $\equiv$ Inconsistente !!!

Voltando agora às nossas analogias com sistemas lineares e frações com denominador zero (?), podemos encarar os problemas independentes de uma teoria, esses que dependem do modelo escolhido, como "afirmacões possíveis e indeterminadas".

Agora, a idéia de "várias respostas possíveis para uma equação" aparece na forma de "vários modelos possíveis para uma afirmação".

Poderíamos então apresentar uma classificação das afirmações de uma teoria (consistente), de um modo semelhante à classificação dos sistemas lineares...

Classificando as afirmações !!!

Classificação das afirmações de uma teoria consistente T

- **Afirmações possíveis e determinadas**: são as consequências sintáticas da teoria. Pelo Teorema da Completude, são exatamente as afirmações que valem em todos os modelos de T.
- **Afirmações possíveis e indeterminadas**: são as afirmações independentes de T. Novamente pelo Teorema da Completude, existirão modelos em que serão verdadeiras e modelos em que serão falsas.
- **Afirmações impossíveis**: são as afirmações inconsistentes com a teoria. Notar que são, exatamente, as negações das afirmações possíveis e determinadas. Não possuem modelo.

Classificando as afirmações !!!

Classificação das afirmações de uma teoria consistente T

- **Afirmações possíveis e determinadas**: são as consequências sintáticas da teoria. Pelo Teorema da Completude, são exatamente as afirmações que valem em todos os modelos de T.
- **Afirmações possíveis e indeterminadas**: são as afirmações independentes de T. Novamente pelo Teorema da Completude, existirão modelos em que serão verdadeiras e modelos em que serão falsas.
- **Afirmações impossíveis**: são as afirmações inconsistentes com a teoria. Notar que são, exatamente, as negações das afirmações possíveis e determinadas. Não possuem modelo.

Classificando as afirmações !!!

Classificação das afirmações de uma teoria consistente T

- **Afirmações possíveis e determinadas**: são as consequências sintáticas da teoria. Pelo Teorema da Completude, são exatamente as afirmações que valem em todos os modelos de T.
- **Afirmações possíveis e indeterminadas**: são as afirmações independentes de T. Novamente pelo Teorema da Completude, existirão modelos em que serão verdadeiras e modelos em que serão falsas.
- **Afirmações impossíveis**: são as afirmações inconsistentes com a teoria. Notar que são, exatamente, as negações das afirmações possíveis e determinadas. Não possuem modelo.

Estamos nos aproximando do final da palestra. Vamos falar de um problema clássico da matemática, o "Primeiro Problema de Hilbert" - a **Hipótese do Contínuo**.

Por um argumento clássico de Cantor (o chamado "argumento diagonal"), sabemos que "existem mais números reais do que números naturais" - i.e., $\mathbb{R}$ é um conjunto não-enumerável.

A cardinalidade de $\mathbb{N}$ é denotada por $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Por razões técnicas que não vêm ao caso (mas que serão discutidas no minicurso de combinatória), a cardinalidade de $\mathbb{R}$ é denotada por $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$.

Um último estudo de caso: a Hipótese do Contínuo

Assim, a expressão "$\mathbb{R}$ é não-enumerável" traduz-se na desigualdade

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$$

Essa desigualdade é, inclusive, um caso particular do chamado **Teorema de Cantor**: para qualquer conjunto X vale $|X| < 2^{|X|}$.

Sabe-se, no entanto, que existe "o menor cardinal não-enumerável", o qual é denominado $\aleph_1$. Qual é a pergunta natural agora ???

???

A pergunta é: **será que a cardinalidade da reta coincide com esse primeiro cardinal que é não-enumerável ???**

Cantor conjecturou que a resposta à pergunta acima seria positiva. Essa afirmação - "a cardinalidade da reta é igual ao primeiro cardinal não-enumerável" é a chamada Hipótese do Contínuo !!!

Hipótese do Contínuo:

$$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$$

O que nos leva a uma **nova pergunta natural**...

Será que Cantor estava certo ?

Isto é – será que a Hipótese do Contínuo é verdadeira ???

Agora, todas as suas crenças matemáticas serão colocadas à prova...

- Se você ainda mantém a crença (do início da palestra) de que a matemática dá resposta únicas, corretas e verdadeiras, então você encara a Hipótese do Contínuo como algo que é OU verdadeiro OU falso.

  Nesse ponto de vista, a busca por essa resposta seria uma busca por essa "verdade imutável dos fatos", algo que pode ser simplesmente (?) "checado" (bastaria ter acesso à "realidade").

- **Porém**, se você foi atento à essa palestra, você sabe que muitas teorias possuem proposições indecidíveis – inclusive, algumas **obrigatoriamente** possuem proposições indecidíveis (a saber, as consistentes que incluem a Aritmética).

Agora, todas as suas crenças matemáticas serão colocadas à prova...

- Se você ainda mantém a crença (do início da palestra) de que a matemática dá resposta únicas, corretas e verdadeiras, então você encara a Hipótese do Contínuo como algo que é OU verdadeiro OU falso.

  Nesse ponto de vista, a busca por essa resposta seria uma busca por essa "verdade imutável dos fatos", algo que pode ser simplesmente (?) "checado" (bastaria ter acesso à "realidade").

- **Porém**, se você foi atento à essa palestra, você sabe que muitas teorias possuem proposições indecidíveis – inclusive, algumas **obrigatoriamente** possuem proposições indecidíveis (a saber, as consistentes que incluem a Aritmética).

Agora, todas as suas crenças matemáticas serão colocadas à prova...

Assim...

- da mesma forma que a Teoria dos Anéis não consegue decidir se "Existe x tal que $x^2 = 2$" é verdadeiro ou falso (pois ambas possibilidades são consistentes)...
- poderia ocorrer o caso da Matemática (= Teoria dos Conjuntos) não conseguir decidir se "$2^{\aleph_0} = \aleph_1$" é verdadeiro ou falso.
- O que o(a) nobre colega acha que está acontecendo ?

8-)

Agora, todas as suas crenças matemáticas serão colocadas à prova...

Assim...

- da mesma forma que a Teoria dos Anéis não consegue decidir se "Existe x tal que $x^2 = 2$" é verdadeiro ou falso (pois ambas possibilidades são consistentes)...

- poderia ocorrer o caso da Matemática ($=$ Teoria dos Conjuntos) não conseguir decidir se "$2^{\aleph_0} = \aleph_1$" é verdadeiro ou falso.

- O que o(a) nobre colega acha que está acontecendo ?

8-)

Agora, todas as suas crenças matemáticas serão colocadas à prova...

Assim...

- da mesma forma que a Teoria dos Anéis não consegue decidir se "Existe x tal que $x^2 = 2$" é verdadeiro ou falso (pois ambas possibilidades são consistentes)...
- poderia ocorrer o caso da Matemática (= Teoria dos Conjuntos) não conseguir decidir se "$2^{\aleph_0} = \aleph_1$" é verdadeiro ou falso.
- O que o(a) nobre colega acha que está acontecendo ?

8-)

A Hipótese do Contínuo é independente dos Axiomas da Teoria dos Conjuntos

Fato

A Hipótese do Contínuo é uma proposição indecidível para a Matemática.

Tanto a Hipótese do Contínuo como sua negação são afirmações consistentes !!! Ou seja, existem modelos nos quais ela vale e modelos nos quais ela não vale !!!

O próprio Gödel (nos anos 30) mostrou que a Hipótese do Contínuo é consistente ("modelo construtível de Gödel").

Nos anos 60, Cohen mostrou que a negação da Hipótese do Contínuo é consistente ("invenção do método de forcing").

Uma última pergunta !!!

"E eu com isso ???"

Se eu não trabalho diretamente com Lógica ou com Teoria dos Conjuntos, eu tenho que saber algo sobre proposições indecidíveis ?

Na verdade... Sim. Qualquer matemático deve estar, pelo menos, ciente da existência de problemas indecidíveis para a Matemática, pois **qualquer problema matemático que resiste muito tempo à solução pode "esconder" algum resultado de consistência ou de independência**.

E os Problemas do Milênio ?

A versão "Século XXI" dos Problemas de Hilbert (Paris, 1900), são os **Problemas do Milênio**, sete problemas para os quais o Instituto Clay oferece 1 milhão de dólares por sua solução. Um desses prêmios já foi recusado por Grigori Perelman, que provou a Conjectura de Poincaré... Mais ainda existem seis milhões de dólares em jogo !!!

O que queremos destacar aqui é o seguinte fato: é possível que alguns dos "Problemas do Milênio", como a **Hipótese de Riemann**, ou **P vs NP**, sejam afirmações independentes da Teoria dos Conjuntos. Se for o caso, um matemático pode literalmente gastar sua vida inteira procurando uma demonstração que... Não existe (leiam "Tio Petros e a Conjectura de Goldbach" !!!).

Note que mesmo uma única prova de consistência já seria um avanço tremendo para esses problemas. Se alguém provar que a Hipótese de Riemann é consistente, **já fica impossível demonstrarmos que a mesma é falsa**.

Alguns comentários mais sutis...

- Os Teoremas de Completude e de Incompletude estão enunciados para uma determinada **Lógica** específica, a saber: Lógica Finitária de Primeira Ordem (em particular, todas as demonstrações são supostas finitas). Se a Lógica subjacente é mudada, esses teoremas não são mais necessariamente válidos.
- Existe o chamado Segundo Teorema da Incompletude de Gödel, o qual garante que teorias consistentes que incluam a Aritmética **não podem provar a sua própria consistência**. Muitos autores entendem que este segundo teorema enterrou completamente o chamado **Programa de Hilbert**, o qual seria provar a consistência da Matemática por métodos finitos.
- O esboço de demonstração que apresentamos para o Primeiro Teorema da Incompletude utiliza alguns argumentos semânticos, como a noção de "verdade". No entanto, a prova original de Gödel, feita com alguns cuidados adicionais, é puramente sintática.

Alguns comentários mais sutis...

- Os Teoremas de Completude e de Incompletude estão enunciados para uma determinada **Lógica** específica, a saber: Lógica Finitária de Primeira Ordem (em particular, todas as demonstrações são supostas finitas). Se a Lógica subjacente é mudada, esses teoremas não são mais necessariamente válidos.
- Existe o chamado Segundo Teorema da Incompletude de Gödel, o qual garante que teorias consistentes que incluam a Aritmética **não podem provar a sua própria consistência**. Muitos autores entendem que este segundo teorema enterrou completamente o chamado **Programa de Hilbert**, o qual seria provar a consistência da Matemática por métodos finitos.
- O esboço de demonstração que apresentamos para o Primeiro Teorema da Incompletude utiliza alguns argumentos semânticos, como a noção de "verdade". No entanto, a prova original de Gödel, feita com alguns cuidados adicionais, é puramente sintática.

Alguns comentários mais sutis...

- Os Teoremas de Completude e de Incompletude estão enunciados para uma determinada **Lógica** específica, a saber: Lógica Finitária de Primeira Ordem (em particular, todas as demonstrações são supostas finitas). Se a Lógica subjacente é mudada, esses teoremas não são mais necessariamente válidos.
- Existe o chamado Segundo Teorema da Incompletude de Gödel, o qual garante que teorias consistentes que incluam a Aritmética **não podem provar a sua própria consistência**. Muitos autores entendem que este segundo teorema enterrou completamente o chamado **Programa de Hilbert**, o qual seria provar a consistência da Matemática por métodos finitos.
- O esboço de demonstração que apresentamos para o Primeiro Teorema da Incompletude utiliza alguns argumentos semânticos, como a noção de "verdade". No entanto, a prova original de Gödel, feita com alguns cuidados adicionais, é puramente sintática.

Alguns comentários mais sutis...

- Algumas pessoas afirmam que o Teorema da Incompletude de Gödel mostra que "nenhum sistema lógico pode ser completo" e procurar aplicá-lo para objetos díspares como "a mente humana", "a Constituição", "a Bíblia" ou "o sistema solar". Essas aplicações são completamente nonsense, pois para nenhum desses sistemas podemos verificar as duas hipóteses principais do Teorema da Incompletude: ser uma teoria consistente e que inclua a Aritmética !!!

Alguns comentários mais sutis...

- Temos que tomar um certo cuidado com afirmações do tipo "Pelo Primeiro Teorema da Incompletude de Gödel, existem afirmações matemáticas que não podem ser demonstradas, como por exemplo a Hipótese do Contínuo". Apesar de correta, essa frase parece dar a entender que a independência da Hipótese do Contínuo seria um corolário do Primeiro Teorema de Incompletude (o que não é o caso, sua independência foi obtida por construção de modelos). O que o Teorema da Incompletude de Gödel garante é que, para teorias em certas condições, existem proposições **aritméticas** indecidíveis. A princípio, alguém poderia construir uma teoria consistente para "números naturais e fantasmas", de modo que a mesma fosse (sintaticamente) completa no que se refere a... Fantasmas.

Alguns comentários mais sutis...

- Alguns filósofos procuram interpretar, a partir da **demonstração** do Teorema da Incompletude, que nenhum computador pode superar a mente humana – pois nós, humanos, podemos verificar que a Sentença de Gödel é verdadeira, enquanto um computador não pode. Esse argumento, conhecido como argumento de Lucas/Penrose, está longe de ser consenso entre os filósofos da matemática.
- "Ser não-demonstrável" é sempre uma afirmação relativa a uma teoria específica. Existem maneiras de "estender" a Teoria dos Conjuntos de modo a demonstrar certas proposições indecidíveis para a teoria usual – por exemplo, supor a existência de cardinais inacessíveis, os chamados **grandes cardinais**. No entanto, pelo Segundo Teorema da Incompletude de Gödel, não é possível demonstrar, na Teoria dos Conjuntos usual, sequer a consistência da existência desses cardinais.

Alguns comentários mais sutis...

- Alguns filósofos procuram interpretar, a partir da **demonstração** do Teorema da Incompletude, que nenhum computador pode superar a mente humana – pois nós, humanos, podemos verificar que a Sentença de Gödel é verdadeira, enquanto um computador não pode. Esse argumento, conhecido como argumento de Lucas/Penrose, está longe de ser consenso entre os filósofos da matemática.
- “Ser não-demonstrável” é sempre uma afirmação relativa a uma teoria específica. Existem maneiras de “estender” a Teoria dos Conjuntos de modo a demonstrar certas proposições indecidíveis para a teoria usual – por exemplo, supor a existência de cardinais inacessíveis, os chamados **grandes cardinais**. No entanto, pelo Segundo Teorema da Incompletude de Gödel, não é possível demonstrar, na Teoria dos Conjuntos usual, sequer a consistência da existência desses cardinais.

Sugestões de Leitura

- W. A. Carnielli e Michael Rathjen, "Combinatória e indemonstrabilidade, ou o 13o trabalho de Hércules", Mathematica Universitária n. 12, 1990, Sociedade Brasileria de Matemática, pp.23-41.
- R. Smullyan, "Gödel incompleteness theorems", Oxford University Press, 1992.
- T. Franzén, "Gödel's theorem: an incomplete use to its use and abuse". A. K. Peters, 2005.

Agradeço a todos pela atencão !!!

Espero sinceramente que tenham aproveitado esta palestra !

Até a próxima !

Vamos discutir Lógica e Teoria dos Conjuntos ?

samuel@ufba.br