ǫ11

V Bienal da SBM
Sociedade Brasileira de Matemática
UFPB - Universidade Federal da Paraíba
18 a 22 de outubro de 2010

NO ENSINO MÉDIO, UMA FORMA ALTERNATIVA PARA A DERIVADA.

RENATO JOSÉ DO NASCIMENTO JÚNIOR * & MYRLENE OLIVEIRA NASCIMENTO †

A Equação da Reta Tangente Descoberta de uma Maneira Particular

1 Uma Questão Desafiadora

Determine a equação da reta que é tangente à curva de equação $y = (x+3)(x+1)x(x-5)$ em exatamente dois pontos. Para resolver essa questão, qualquer estudante apaixonado pelo Cálculo começaria, sem dúvida, calculando a derivada de y em relãção à x. O que faremos aqui é discutir um método algébrico de resolução dessa questão.

Na forma em que a equação está escrita, nós facilmente encontramos suas raízes, que são $-3, -1, 0$ e 5. Além disso, fazendo um simples "estudo de sina" da função $y = f(x)$, determinamos onde a função é crescente ou decrescente. É claro que precisaríamos saber que a função é contínua para poder traçar um esboço do seu gráfico com maior segurança. No entanto, lembro ao leitor que quando pedimos para que nosso aluno do nono ano esboce o gráfico de uma função do segundo grau já estamos fazendo com que esse jovem estudante já suponha que funções polinomiais são contínuas. Esse não é um pecado muito grande, pois sabemos que funções polinomiais são mesmo contínuas.

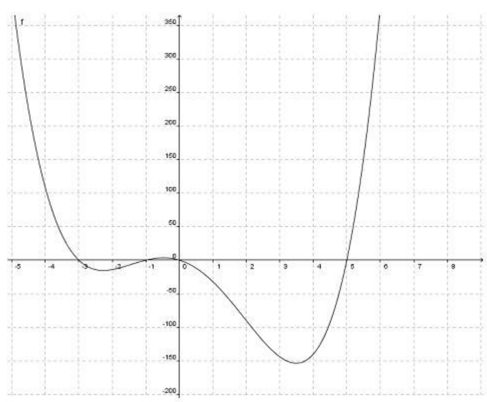

Figura 1: Esboço

Após apreciar um pouco a figura obtida, é fácil concluir que qualquer reta contida no plano do gráfico cortarta a curva em no máximo quatro pontos. Também podemos perceber que a solução do problema é única.

*Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, IFCE, CE, Brasil, renatojunior69@gmail.com
†Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, IFCE, CE, Brasil, myrlene.oliveira@yahoo.com.br

2 Uma Análise Interessante

De acordo com o enunciado da questão, estamos interessados em uma reta que cortea curva em exatamente dois pontos. Correto? Geometricamente, sim. Já algebricamente, temos que fazer uma análise um pouco mais profunda.

Começemos com um exemplo mais simples. Dada uma parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$ e uma reta com equação $ax + by + c = 0$, façamos uma análise de suas posições relativas no plano. Observe:

Vemos, então, que o sistema $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + n \end{cases}$ pode ter no máximo duas soluções. Mas o que acontece na situação 3 que aparece na Figura 2? Afirmamos, apelando um pouco para sua intuição, que nessa situaçãoo o sistema possui uma solução dupla. Isto é, quando substituirmos y por $mx + n$ em $y = ax2 + bx + c$ encontraremos uma equação do segundo grau com discriminante nulo e raízes duplas iguais.

3 Uma Resolução Diferente

De posse do raciocínio descrito anteriormente, resolveremos agora a questão proposta. Desejamos que, durante a resolução do sistema $\begin{cases} y = (x+3)(x+1)x(x-5) \\ y = mx + n \end{cases}$ encontremos uma equação polinomial do quarto grau com duas raízes iguais a α e duas iguais a β.

Fazendo alguns cálculos, vemos que $y = (x+3)(x+1)x(x-5) \Leftrightarrow y = x^4 - x^3 - 17x^2 - 15x$. Além disso, quando substituimos y por $mx + n$, encontramos a equação

$$x^4 - x^3 - 17x^2 - (15 + m)x - n = 0$$

Para que a equação ?? satisfaça as condições que desejamos, ela deve ser da forma

$$(x-\alpha)^2(x-\beta)2 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2(\alpha+\beta)x^3 + (\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2)x^2 - 2\alpha\beta(\alpha+\beta)x + \alpha^2\beta^2 = 0$$

Comparando os coeficientes das equações acima, encontramos:

$$\begin{cases} x^4 : 1 = 1 \\ x^3 : -1 = -2(\alpha+\beta) \\ x^2 : -17 = \alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 \\ x^1 : -(15+m) = -2\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ x^0 : -n = \alpha^2\beta^2 \end{cases}$$

Analisando o sistema $\begin{cases} -2(\alpha+\beta) = -1 \\ {}^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 = -17 \end{cases}$, concluimes que $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$ e $\alpha\beta = \frac{-69}{8}$. Com a posse dessas informações e com as equações obtidas da comparação dos coeficientes de x^1 e x^0, determinamos que $m = \dfrac{-189}{8}$ e $n = \dfrac{-4671}{64}$.

Dessa forma, encontramos a solução para o nosso problema: $y = \dfrac{-189}{8}x - \dfrac{-4671}{64}$.

Referências

[1] BOYER, C.B. - *História da Matemática.*, 2ª Edição, São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

[2] ÁVILA, G.S.S. - *O ensino de Cálculo no 2.° grau.*, Revista do Professor de Matemática, n.°18. Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.