V Bienal da SBM
Sociedade Brasileira de Matemática
UFPB - Universidade Federal da Paraíba
18 a 22 de outubro de 2010

Solução Geral da Equação de Hamilton-Jacobi Unidimensional

Maria Lewtchuk Espindola *

1 Introdução

A importância prática e conceitual da equação de Hamilton-Jacobi pode ser apontada de maneira extensiva: como um conceito fundamental em Mecânica Clássica, veja Arnold [1]; como uma ferramenta prática para resolver equações diferenciais, como em Chodos [2]; como uma base para a quantização, que pode ser visto em Dureau [3]; como uma aproximação de ordem zero no método WKB, veja por exemplo Schiff [4]; etc...

As soluções da equação de Hamilton-Jacobi são usualmente determinadas como soluções integrais pelo método de separação de variáveis. Mas soluções gerais destas equações são mais importantes, não somente por seu significado conceitual, como podemos ver exposto em Dirac [5], mas porque geram uma infinidade de soluções integrais.

O caráter desta equação - uma equação diferencial parcial não linear - faz com que a procura por uma solução geral seja quase sempre uma tarefa insuperável, estando indisponível até agora, algum procedimento que aplicado a essas equações resulte numa solução geral. • Citando referências: Sneddon [6]; Forsyth [7].

É o propósito deste artigo apresentar uma solução para este problema centenário no caso unidimensional.

O procedimento apresentado para resolver a equação de Hamilton-Jacobi é uma extensão do método desenvolvido para as EDPs, lineares ou não, dos tipos:

$$F(p,q)=0; \quad F(f(x)p,q)=0 \quad (ou \quad F(u_x,h(y)u_y)=0),$$

onde $p=\frac{\partial u}{\partial x}$, $q=\frac{\partial u}{\partial y}$ e $u=u(x,y)$, como apresentado em Espindola [8].

Apresentaremos primeiramente este método de obtenção de soluções gerais, para, na sequência extendê-lo a equação diferencial parcial de Hamilton-Jacobi, como pode ser visto em Espindola [9].

Tanto o método de Charpit, como outros métodos, fornecem somente uma solução integral aplicados a este tipo de EDPs.

- Citando referências: Sneddon [6]; Forsyth [7]; Courant [10].

No método desenvolvido obtém-se infinitas soluções integrais, i.e., a solução geral na forma implícita e em determinados casos a solução geral de forma explícita.

O procedimento desenvolvido tem como base uma transformação de Legendre e a utilização de um teorema para formas diferenciais Pfaffianas, que fornece a condição para que estas se tornem integráveis, veja Sneddon [6].

*Universidade Federal da Paraíba, DM, PB, Brasil, mariia@mat.ufpb.br

2 Solução Geral para a EDP $\mathbf{F(p,q)=0}$

Considere a EDP de primeira ordem $F(p,q)=0$, onde $p=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $q=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ e $u=u(x,y)$. A forma diferencial Pfaffiana para u é

$$du = p\,dx + q\,dy. \tag{2.1}$$

Aplicando uma transformação de Legendre obtemos

$$d(xp+yq) - du - xdp - ydq = 0.$$

Desde que $dF = F_p dp + F_q dq = 0$, logo

$$dp = -(F_q/F_q)dq$$

e então

$$d(xp+yq) - du + \left(x\frac{F_q}{F_p} - y\right)\,dq = 0\,. \tag{2.2}$$

Sendo esta uma forma diferencial Pfaffiana pode ser aplicado o teorema, veja Sneddon [6]:

Teorema 2.1. *A condição necessária e suficiente para que a forma diferencial Pfaffiana* $\vec{X}\cdot\vec{dr}=0$ *seja integrável é que* $\vec{X}\cdot rot\,\vec{X}=0.$

Que neste caso resulta em

$$\vec{X}\cdot rot\,\vec{X} = -\left(\frac{\partial}{\partial(xp+yq)} + \frac{\partial}{\partial u}\right)\left(x\frac{F_q}{F_p} - y\right) = 0,$$

que integrada fornece

$$u - xp - yq = \phi(q). \tag{2.3}$$

Substituindo na equação (2) obtém-se

$$\left(x\frac{F_q}{F_p} - y\right) = -\phi'(q). \tag{2.4}$$

A solução geral da equação diferencial é dada pela equação (3) na qual q é determinado a partir de (4). Esta é uma solução geral desde que ela possui uma função arbitrária $\phi(q)$, i.e., a cada forma arbitrária de $\phi(q)$ a equação (4) e a EDP original formam um sistema de equações algébrico que determina $q=q(x,y)$ e $p=p(x,y)$, que uma vez substituídos em (3) fornecem uma solução da EDP.

Em alguns casos podemos explicitar $p=f(q)$ (ou $q=g(p)$) e a solução geral da EDP a partir de (3) fica

$$u = x\,f(q) + yq + \phi(q), \tag{2.5}$$

com a condição que é obtida de (4)

$$xf_q + y = -\phi'(q). \tag{2.6}$$

Um exemplo da aplicação do método no caso em que podemos explicitar p é a equação

$$F(p,q) = p - Bq + A = 0,$$

onde A,B são constantes. Portanto $p=f(q)=Bq-A$, e $f_q=B$ a solução será de (5)

$$u = xp + yq - \phi(q) = x(Bq-A) + yq - \phi(q),$$

onde devemos substituir $q=q(x,y)$ determinada a partir de (6).

Neste caso (6) fica

$$xf_q + y = Bx + y = \phi'(q),$$

logo

$$q = \psi(Bx+y)$$

e a solução geral da EDP é dada por

$$u = Ax + (Bx + y)\,\psi(Bx + y) - \phi^{-1}(\psi(Bx + y)) = Ax + \Phi(Bx + y).$$

Como outro exemplo consideramos a EDP não linear $p^n - q^m = A$, onde A é constante. Explicitando temos $p = (A + q^m)^{1/n} = f(q)$, logo

$$f_q = \frac{m}{n}(A + q^m)^{(1-n)/n} q^{m-1}$$

e de (5) a solução geral é

$$u = x(A + q^m)^{1/n} + yq - \phi(q),$$

onde de (6)

$$\phi'(q) = \frac{mx}{n}(A + q^m)^{(1-n)/n} q^{m-1} + y.$$

Portanto teremos uma solução integral a cada escolha de $\phi(q)$.

3 Solução Geral para a EDP $F(f(x)p, q) = 0$ (ou $F(p, h(y)q) = 0$)

Utilizando um procedimento idêntico ao da seção anterior, explicitamos a partir da EDP $p = G(q)/f(x)$ substituímos na forma diferencial e aplicamos uma transformação de Legendre, obtendo

$$du = d[H(x)G(q) + yq] - [H(x)G'(q) + y]dq,$$

onde $H(x) = x/f(x)$.

Esta é uma forma diferencial Pfaffiana e a sua condição de integrabilidade obtida a partir do Teorema 2.1 é

$$H(x)G'(q) + y = \phi'(q). \tag{3.7}$$

Portanto a solução geral da EDP será

$$u = H(x)G(q) + yq - \phi(q), \tag{3.8}$$

onde $\phi(q)$ é uma função arbitrária que uma vez escolhida irá determinar o valor de $q = q(x, y)$ a partir da equação (7).

De maneira análoga se obtém a solução geral de $F(p, h(y)q) = 0$. Se

$$q = G(p)/h(y)$$

então a solução geral é dada por

$$u = xp + G(p)H(y) - \phi(p),$$

onde $H(y) = y/h(y)$ e a condição de integrabilidade

$$\phi'(p) = G'(p)H(y) + x$$

.

Como uma observação final o procedimento acima descrito está sendo extendido a EDPS de primeira ordem lineares ou não dos tipos $u = f(p, q)$, $F(u, p, q) = 0$, $F(p, q, x) = 0$ ou $G(p, q, y) = 0$ e EDPS de segunda ordem p-harmônicas.

4 Solução Geral da Equação de Hamilton-Jacobi

Considere a equação mais geral de Hamilton-Jacobi para um sistema conservativo não relativístico unidimensional

$$a(x)\ \frac{\partial S}{\partial x} + V(x) - \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

onde $S = S(x,t)$ é a função principal de Hamilton, ou equivalentemente,

$$ap^2 + V - q = 0, \tag{4.9}$$

onde $p = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$ e $q = \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}$.

Portanto

$$dS = p\,dx + q\,dt = d(p\,x + q\,t) - x\,dp - t\,dq, \tag{4.10}$$

onde utilizamos uma transformação semelhante a de Legendre.

Substituindo p obtido a partir de (14) obtemos

$$dS = d\left(\frac{x\sqrt{a(q-V)}}{a} + qt\right) - \frac{x(a'V - aV' - qa')}{2\sqrt{a(q-V)}}dx - \left(t + \frac{x}{2\sqrt{a(q-V)}}\right)dq, \tag{4.11}$$

onde $a' = da/dx$ e $V' = dV/dx$. Integrando

$$S(x,t) = x\sqrt{(q-V)/a} + qt - F(x,q), \tag{4.12}$$

sendo F tal que

$$\frac{\partial F}{\partial q} = t + \frac{x}{2\sqrt{a(q-V)}}, \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x(a'V - aV' - qa')}{2\sqrt{a(q-V)}} \equiv H(x,q). \tag{4.14}$$

A integração da Eq. (14) conduz a

$$F(x,q) = \int H(x,q)dx + G(q)$$

, onde G é uma função arbitrária. Usando este resultado em (13) obtemos a equação que define a variável $q = q(x,t)$, para cada escolha arbitrária da função G:

$$\int \frac{\partial H}{\partial q}dx + G'(q) = y + \frac{x}{2\sqrt{a(q-V)}}. \tag{4.15}$$

Então a função $S = S(x,t)$, fornecida por (12) é uma solução geral.

É interessante ressaltar que no método de separação de variáveis aplicados a equação de Hamilton-Jacobi as soluções usuais são obtidas fazendo a hipótese de que $q = constante$, i.e., $dq = 0$, portanto

$$S(x,t) = W(x) + C(t)$$

.

5 Exemplo

Como exemplo vamos considerar uma partícula livre descrita pela equação de Hamilton-Jacobi como $ap^2 - q = 0$ ($a = constante$). A partir de (12) se obtém a solução

$$S = x\sqrt{q/a} + qt - F.$$

onde a função F é determinada pela solução do sistema obtido de (13) e (14)

$$F'(q) = t + \frac{x}{2\sqrt{aq}}.$$

Esta equação fornece a cada escolha da função arbitrária F a variável $q = q(x,t)$.

Por exemplo, se $F = Cq$ então $q = x^2/4a(C-t)^2$, logo

$$S(x,t) = x^2/4a(C-t)$$

. Esta solução foi previamente obtida utilizando dados do movimento da partícula, veja em Saletan [11], o que é desnecessário no nosso método.

A solução $S(x,t) = x\sqrt{C/a} + Ct$ obtida pelo método de separação de variáveis é obtida substituindo $dq = 0$ em (11).

Outro exemplo interessante é a equação de Hamilton-Jacobi correspondente ao problema do oscilador harmônico que (em unidades convenientes) é dada por

$$p^2 + x^2 - q = 0.$$

Sua solução é

$$S(x,t) = qt + \frac{1}{2}x\sqrt{q-x^2} + \frac{q}{2}\,sen^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}}\right) - G(q),$$

onde $q = q(x,t)$ é obtido da equação

$$t + \frac{1}{2}x\sqrt{q-x^2} = G'(q) + \frac{q}{2}\,sen^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}}\right),$$

para cada escolha da função arbitrária G.

A solução com variáveis separáveis $(q = C)$ é

$$S(x,t) = \frac{1}{2}x\sqrt{C-x^2} + Ct - \frac{C}{2}\,sen^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{C}}\right).$$

6 Conclusão

O procedimento apresentado para resolver a equação de Hamilton-Jacobi é uma extensão do apresentado nas seções 2 e 3, veja em Espindola [9, 10]. A condição de integrabilidade da forma Pfaffiana (3), como pode ser visto em Sneddon [6], resulta nas equações (13) e (14).

A extensão do método para equações de Hamilton-Jacobi bi e tridimensionais e a formulação geral do método para este tipo de equações diferenciais parciais está dentro das possíveis abordagens posteriores.

Na extensão do método apresentado nas seções 2 e 3 podemos obter soluções para EDPs de segunda ordem de um dos tipos

$$F(r,s) = 0 \quad e \quad F(s,t) = 0, \quad r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad e \quad t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

desde que estas podem ser transformadas nas EDPs acima.

Outra extensão possível é para EDPs de primeira ordem com diversas variáveis

$$F(p_1,\ldots,p_n,q_1,\ldots,q_n) = 0, \quad p_i = \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2}, \quad q_i = \frac{\partial^2 u}{\partial {y_i}^2},$$

$$u = u(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n).$$

Agradecimentos

Agradeço ao Dr. Nelson Lima Teixeira (in memoriam) e ao Dr. Oslim Espindola (in memoriam) pelas profícuas discussões.

Referências

[1] Arnold, V. - *Méthodes Mathématiques Classique*, MIR, Moscou, 1976.

[2] Chodos, A. e Sommerfield, E. C. M. - *Practical use of the Hamilton-Jacobi Equation*, J. Math. Phys., **24**, 271, 1983.

[3] Dureau, L. D. - *Hamiltonian Operator in Generalized Coordinates*, Am. J. Phys., **33**, 895, 1965.

[4] Schiff, L. I. - *Quantum Mechanics*, MCGRAW-HILL, Kogakusha, 1968, Cap. 8.

[5] Dirac, P. A. M. - *The Hamiltonian Form of Field Dynamics*, Can. J. Math., **3**, 1, 1951.

[6] Sneddon, I. - *Elements of partial differential equations.*, McGraw-Hill, Kogakusha, First edition, 1957.

[7] Forsyth, A. R. - *A treatise on differential equations.*, McMillan, London, First edition, 1903.

[8] Espindola, M. L. - *Método de Solução das EDPS :* $F(u_x, u_y) = 0$; $F(f(x)u_x, u_y) = 0$; $F(u_x, h(y)u_y) = 0$, **84**, Res. II ENAMA, 2008.

[9] Espindola, M. L. - *Solução Geral da Equação de Hamilton-Jacobi Unidimensional*, **64**, Res. III ENAMA, 2009.

[10] Courant, R. e Hilbert, D. - *Methods of Mathematical Physics.*, INTERSCIENCE, New York, 1962, cap. 2.

[11] Saletan, E. J. e Cromer, A. H. - *Theoretical Mechanics*,WILEY, New York, 1971.