V Bienal da SBM
Sociedade Brasileira de Matemática
UFPB - Universidade Federal da Paraíba
18 a 22 de outubro de 2010

Solução Geral da Equação de Hamilton-Jacobi Unidimensional

Maria Lewtchuk Espindola *

Resumo

Um procedimento para encontrar a solução geral da equação de Hamilton-Jacobi unidimensional, é desenvolvido baseado em uma transformação de Legendre e o teorema para formas diferenciais Pfaffianas. Como a solução obtida depende de uma função arbitrária, logo temos uma solução geral. Este é uma extensão do método para a obtenção de soluções gerais de EDPs, lineares ou não, dos tipos: $F(u_x, u_y) = 0$; $F(f(x)u_x, u_y) = 0$ (ou $F(u_x, h(y)u_y) = 0$).

A importância prática e conceitual da equação de Hamilton-Jacobi pode ser apontada de maneira extensiva: como um conceito fundamental em Mecânica Clássica, veja Arnold [1]; como uma ferramenta prática para resolver equações diferenciais, como em Chodos [2]; como uma base para a quantização, que pode ser visto em Dureau [3]; como uma aproximação de ordem zero no método WKB, veja por exemplo Schiff [4]; etc...

As soluções da equação de Hamilton-Jacobi são usualmente determinadas como soluções integrais pelo método de separação de variáveis. Mas soluções gerais destas equações são mais importantes, não somente por seu significado conceitual, como podemos ver exposto em Dirac [5], mas porque geram uma infinidade de soluções integrais.

O caráter desta equação - uma equação diferencial parcial não linear - faz com que a procura por uma solução geral seja quase sempre uma tarefa insuperável, estando indisponível até agora, algum procedimento que aplicado a essas equações resulte numa solução geral. • Citando referências: Sneddon [6]; Forsyth [7].

É o propósito deste artigo apresentar uma solução para este problema centenário no caso unidimensional.

O procedimento apresentado para resolver a equação de Hamilton-Jacobi é uma extensão do método desenvolvido para as EDPs, lineares ou não, dos tipos:

$$F(p, q) = 0; \quad F(f(x)p, q) = 0 \quad (ou \quad F(u_x, h(y)u_y) = 0),$$

onde $p = \frac{\partial u}{\partial x}$, $q = \frac{\partial u}{\partial y}$ e $u = u(x, y)$, como apresentado em Espindola [8].

Apresentaremos primeiramente este método de obtenção de soluções gerais, para, na sequência extendê-lo a equação diferencial parcial de Hamilton-Jacobi, como pode ser visto em Espindola [9].

Tanto o método de Charpit, como outros métodos, fornecem somente uma solução integral aplicados a este tipo de EDPs.

• Citando referências: Sneddon [6]; Forsyth [7]; Courant [10].

No método desenvolvido obtém-se infinitas soluções integrais, i.e., a solução geral na forma implícita e em determinados casos a solução geral de forma explícita.

O procedimento desenvolvido tem como base uma transformação de Legendre e a utilização de um teorema para formas diferenciais Pfaffianas, que fornece a condição para que estas se tornem integráveis, veja Sneddon [6].

*Universidade Federal da Paraíba, DM, PB, Brasil, mariia@mat.ufpb.br

Referências

[1] ARNOLD, V. - *Méthodes Mathématiques Classique*, MIR, Moscou, 1976.

[2] CHODOS, A. E SOMMERFIELD, E. C. M. - *Practical use of the Hamilton-Jacobi Equation*, J. Math. Phys., **24**, 271, 1983.

[3] DUREAU, L. D. - *Hamiltonian Operator in Generalized Coordinates*, Am. J. Phys., **33**, 895, 1965.

[4] SCHIFF, L. I. - *Quantum Mechanics*, MCGRAW-HILL, Kogakusha, 1968, Cap. 8.

[5] DIRAC, P. A. M. - *The Hamiltonian Form of Field Dynamics*, Can. J. Math., **3**, 1, 1951.

[6] SNEDDON, I. - *Elements of partial differential equations.*, McGraw-Hill, Kogakusha, First edition, 1957.

[7] FORSYTH, A. R. - *A treatise on differential equations.*, McMillan, London, First edition, 1903.

[8] ESPINDOLA, M. L. - *Método de Solução das EDPS :* $F(u_x, u_y) = 0$*;* $F(f(x)u_x, u_y) = 0$*;* $F(u_x, h(y)u_y) = 0$, **84**, Res. II ENAMA, 2008.

[9] ESPINDOLA, M. L. - *Solução Geral da Equação de Hamilton-Jacobi Unidimensional*, **64**, Res. III ENAMA, 2009.

[10] COURANT, R. E HILBERT, D. - *Methods of Mathematical Physics.*, INTERSCIENCE, New York, 1962, cap. 2.