Sobre as origens das definições de produto escalar e vetorial

Alan Bruno Lopes Barbosa
Elzon Cesar Bezerra Junior
Francisco Arton Barroso de Oliveira

“Here as he walked by on the 16th
of October 1843 Sir William Rowan Hamilton in
a flash
of genius discovered the fundamental formula
for quartenion multiplication
$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ *& cut it*
in a stone of this bridge".

Sir William Rowan Hamilton (1805-1865)

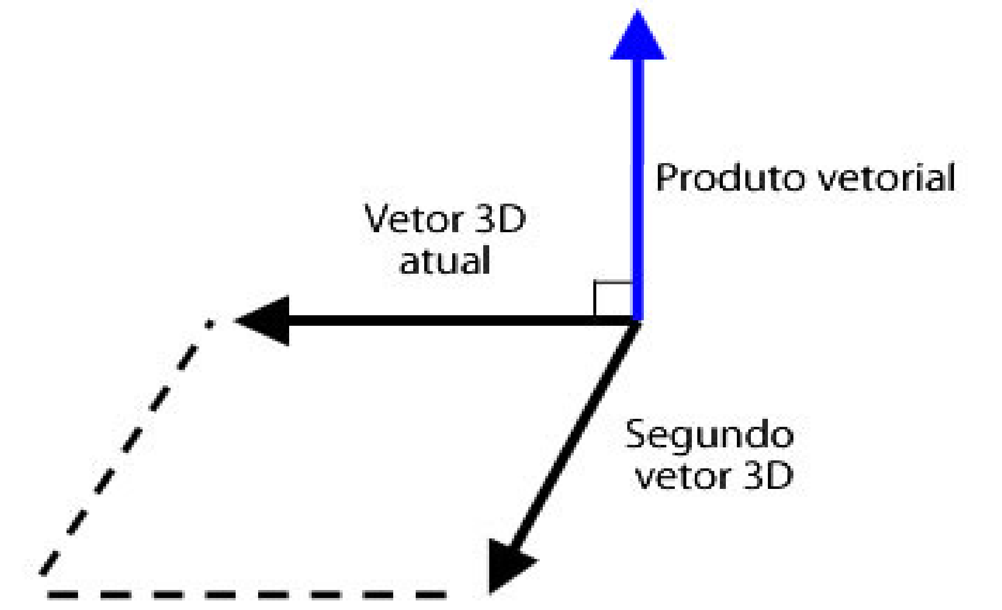
Produto Escalar(produto interno)

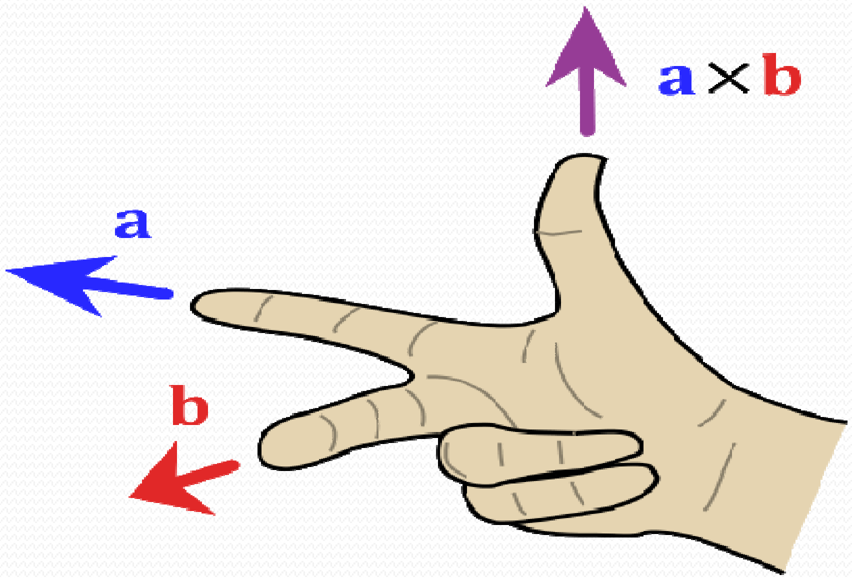
- Dados os vetores a e b pertencentes ao espaço Euclidiano tridimensional R^3, definimos, o produto escalar entre a e b é o escalar definido como:
- $$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta$$

Produto Vetorial (produto externo)

- O produto vetorial de a por b, representado por a x b, é o vetor que possui módulo.
- $$A = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta.$$
- Direção perpendicular ao plano determinado por a e b.
- Sentido convencionado pela “regra da mão direita”.

Sobre o sentido e a direção do produto vetorial.





Quatérnions - $\mathbb{H}$

- Os quatérnions são, essencialmente, generalizações de números complexos para quatro dimensões.

- Um quatérnion tem a estrutura:

$$q = w + xi + yj + zk$$

- De modo análogo aos números complexos um quatérnion possui uma parte real e três partes imaginárias.

Sobre as partes real e imaginária dos quatérnions.

- A componente real foi denominada "*Parte escalar do Quatérnion*", *denotada por E(q):*

$$E(q) = w$$

- A componente com partes imaginárias foi denominada "*Parte Vetorial do Quatérnion*", *denotada por V(q):*

$$V(q) = xi + yj + zk$$

O ponto ápice.
(Multiplicação de dois quatérnions puros)

- Consideremos a seguinte notação para dois quatérnions com parte escalar nula:

$$q_1 = V(q_1) = ix_1 + jy_1 + kz_1, \qquad E(q_1) = 0$$
$$q_2 = V(q_2) = ix_2 + jy_2 + kz_2, \qquad E(q_2) = 0$$

- Utilizando as regras de multiplicação entre quatérnions, obtemos que o produto entre q1.q2 é da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
q_1 q_2 &= -(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) \\
&+ \; i\,(y_1 z_2 - z_1 y_2) + j\,(x_2 z_1 - z_2 x_1) \\
&+ \; k\,(x_1 y_2 - y_1 x_2).
\end{aligned}
$$

(verifique!)

- Comparando as partes real e imaginária da multiplicação entre q1.q2 temos que:

- a.b tem a mesma estrutura que –E(q1.q2)
- a x b tem a mesma estrutura que V(q1.q2)

- De fato, esta é a origem histórica das expressões que hoje conhecemos como produto escalar e vetorial.

- Claro, houveram algumas adaptações da álgebra de quatérnions feitas por Gibbs-Heavside, elas são:

- Separação das partes escalar e vetorial do produto de dois quatérnions puros em dois produtos *independentes, hoje conhecidos como escalar e vetorial ;*

- Eliminação do sinal negativo presente na parte escalar do produto de dois quatérnions puros;

- Substituição das unidades imaginárias por versores na base retangular.


That's all Folks!