Proposta de Palestra para a V Bienal de Matemática

A Concepção de Área do Círculo de Antifon e Brison sob uma Perspectiva da Análise Matemática

Prof. Dr. Inocêncio Fernandes Balieiro Filho
Universidade Estadual Paulista – UNESP
Ilha Solteira – Departamento de Matemática

Prof. Dr. Marcelo Reicher Soares
Universidade Estadual Paulista – UNESP
Bauru – Departamento de Matemática

RESUMO

A Análise Matemática pode ser compreendida como o estudo de processos infinitos envolvendo grandezas contínuas. O presente trabalho expõe, identifica, analisa e discute vestígios de processos infinitos implícitos nos pensamentos filosóficos de Zenon, Antifon e Brison. Para isso, através de uma metodologia de pesquisa em História da Matemática, tais pensamentos são interpretados em uma linguagem da Análise Matemática, utilizando-se dos conceitos de seqüências, séries, supremo e ínfimo. Assim, o ferramental lógico-formal da Análise Matemática, viabiliza desenvolver argumentos que apresentam uma resposta aos problemas filosóficos derivados das idéias desses antigos filósofos gregos.

Introdução

Os refinados conceitos de seqüências e séries que se têm hoje são resultados de um longo processo histórico de desenvolvimento e aprimoramento de idéias que surgiram na Grécia Antiga. De fato, como não podia deixar de ser, os filósofos gregos da Antigüidade já mostravam em suas concepções filosóficas, vestígios do conceito de série. Zenon de Eléia, (490-430 a.C.) quando expõe aos filósofos de sua época seus argumentos, em particular, os paradoxos de Aquiles e a tartaruga e da Dicotomia, na verdade, antecipa um problema que será, nos tempos modernos, abordado utilizando-se o conceito de série.

Antifon de Atenas (480-411 a.C.) cogitou o seguinte método para o cálculo da área de um círculo: por meio de sucessivas duplicações do número de lados de um polígono regular, inscrito num círculo, a diferença entre as áreas do círculo e dos polígonos ao fim se exauriria.

Brison (450-390 a.C.) aprimora o método de Antifon, considerando polígonos regulares inscritos e circunscritos em um círculo. Ambos, no entanto, se depararam com a necessidade de tratar com processos infinitos, o que para eles, na época, era impraticável. Para superar tal entrave no concretizar das idéias de Antifon e Brison foi utilizado, posteriormente, o chamado método de exaustão atribuído a Eudoxo (408-355 a.C.).

O objetivo da palestra é apresentar a utilização da completude do sistema dos números reais, precisamente os conceitos de supremo e ínfimo, para viabilizar os processos infinitos propostos por Antifon e Brison.

1 – Traços das Concepções Filosóficas que Influenciaram os Princípios Matemáticos na Grécia Antiga

Como enfatizam alguns historiadores da Matemática, em particular Struik, “As matemáticas orientais surgiram como uma ciência prática com os objetivos de facilitar o cálculo do calendário, a administração das colheitas, a organização das obras públicas e a cobrança de impostos. (Struik, 1992, p.47) E mesmo, “as matemáticas mesopotâmicas atingiram um nível mais elevado do que o obtido pelas matemáticas egípcias” (Struik, 1992, p.56).

Assim, ao considerar esse caráter pragmático presente na matemática oriental, os gregos foram além dos objetivos predominantemente práticos e das soluções de problemas através de prescrições ritualísticas, aos quais egípcios e babilônicos parecem ter se limitado. Ou seja, os gregos, por meio da reunião de experiências adquiridas através do intercâmbio cultural com os egípcios e babilônios, promoveram a criação de uma abordagem dedutiva e sistemática, construindo teorias que visavam organizar e facilitar a manipulação do conhecimento em contraposição ao conhecimento empírico e fragmentário que os povos do Oriente tinham recolhido durante alguns séculos.

Ao ponderar as considerações estabelecidas por Struik é necessário explicitar que há um respeito pelos empreendimentos realizados pelos egípcios e babilônios na matemática, pois esses mostram um considerável avanço em processos aritméticos, algébricos e geométricos. De fato, ao avaliar os problemas descritos nos papiros[1] egípcios e nas plaquetas de argila[2] dos babilônicos, observa-se que essas civilizações utilizaram a aritmética, a álgebra e a geometria para diversos propósitos: no comércio e na administração, na medição de superfícies de terrenos, para estimar a produção agrícola, no cálculo de volumes de reservatórios e da quantidade de ladrilhos ou blocos de rochas necessários para construir um templo ou uma pirâmide e no estudo da astronomia[3] com o intuito de confeccionar calendários astronômicos[4] para satisfazer suas necessidades domésticas, comerciais e religiosas.

Porém, ainda que os egípcios e babilônios apresentassem uma matemática bem desenvolvida não havia traços de demonstrações em sua prática, segundo Bicudo:

> *Bourbaki salienta que "não há, hoje, qualquer dúvida de que houve uma matemática pré-helênica bem desenvolvida. Não somente são as noções (já muito abstratas) de número inteiro e de medida de quantidade comumente usadas nos documentos mais antigos que nos chegaram do Egito ou da Caldéia, mas a álgebra babilônia, por causa da elegância e segurança de seus métodos, não deve ser concebida como uma simples coleção de problemas resolvidos por um tatear empírico" (Bourbaki, 1969, p.9). No entanto, não encontramos, seja nos documentos egípcios, seja naqueles da já mais encorpada matemática babilônia, qualquer traço do que se assemelhe a uma "demonstração", no sentido formal da palavra. O conceito de ciência dedutiva era desconhecido dos povos orientais da antiguidade. Seus textos matemáticos, que chegaram até nós, são, em geral, coletâneas de problemas, mais ou menos interessantes, e suas soluções, em forma de prescrição, como as indicações das etapas de um ritual, oferecido a uma deidade. Nada de teoremas e demonstrações, nada de definições, nada de axiomas.* (Bicudo, 1998, p. 307-308)

Os filósofos gregos assimilaram desses povos seus princípios empíricos, satisfazendo assim seus interesses puramente intelectuais e estabelecendo fundamentos teóricos que sustentam tais princípios. Desse modo, procuraram encontrar demonstrações dedutivas e rigorosas (no contexto da época) para os princípios empíricos presentes nas referidas aplicações práticas. Conforme Russell:

> *Ocupo-me (...) das matemáticas, não por si mesmas, mas em relação à filosofia grega – relação*

1 Gilling, R. J. *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. New York: Dover, 1982.
2 Neugebauer, O. *The Exact Sciences in Antiquity*. New York: Dover, 1969.
3 Ciência ainda confusamente perdida no enovelado da astrologia.
4 Sideral, Solar, Lunar e Lunissolar.

essa que, principalmente em Platão, era muito estreita. A preeminência dos gregos aparece com mais nitidez nas matemáticas e na astronomia do que em qualquer outra coisa. O que fizeram na arte, na literatura e na filosofia, pode julgar-se melhor ou pior segundo os gostos, mas o que realizaram na geometria está inteiramente acima de qualquer questão. Aprenderam alguma coisa do Egito e um pouco menos da Babilônia; mas o que obtivera dessas fontes foi, nas matemáticas, principalmente regras rudimentares e, na astronomia, registros de observações que se estendiam sobre período muitos longos. A arte da demonstração matemática foi, quase inteiramente, de origem grega. (Russell, 1969, p.242)

Diante de tais considerações históricas e filosóficas pode-se afirmar, conforme a tradição dos relatos históricos de filósofos e comentadores, que têm início, com Tales de Mileto[5] (624-546 a.C.), a Filosofia e a Matemática grega. Tales é considerado um dos sete sábios[6] da Antigüidade e o primeiro membro da chamada escola jônica; assim, como os demais membros dessa escola, Tales foi um filósofo da natureza que através de observações empíricas sobre os seres e os fenômenos, especialmente os meteorológicos, chegou à concepção de que todo o universo estava submetido a um processo e a uma transformação contínua, e conjeturou que: *a água é o princípio da natureza.*

Assim, com essa nova maneira de pensar as questões impostas pelo universo, buscando princípios geradores da natureza, surge um novo tipo de homem, o filósofo, que se contrapõe ao homem sacerdote que buscava exclusivamente o poder, a riqueza, as honras e o interesse na possível vida após a morte.

O pensamento filosófico jônico continha íntima conexão com o problema cosmológico buscando um princípio concreto para a natureza, enquanto na escola pitagórica, fundada por Pitágoras de Samos[7] (582-497 a.C.), o pensamento filosófico adquire outra característica: a mesma preocupação em estudar a essência das coisas, os primeiros princípios e causa do que existe em consonância com as concepções da escola jônica, embora admitindo como princípio uma entidade abstrata, ou seja, os problemas metafísicos.

Frente ao pensamento jônico, onde a água é o elemento primordial, o pitagorismo apresenta uma nova e original característica em relação à natureza de tal elemento, propondo o número como novo elemento primordial, isto é, a onipotência e onipresença do número em todas as coisas que compõem o cosmo. Desse modo, segundo relatos de Aristóteles, na *Metafísica* I 5, 985-986a, Pitágoras e os pitagóricos *supuseram que os elementos dos números eram os elementos de todas as coisas existentes e que todo o céu era harmonia e número.*

As doutrinas e concepções filosóficas pitagóricas conduziram seus partidários a estudarem

---

[5] Uma das maiores cidades helênicas da Ásia Menor, pertencente ao território da Cária.

[6] O emprego mais antigo da palavra "sábio" em grego refere-se à destreza ou habilidade em exercícios de alguma prática artesanal; e depois, à destreza própria do estadista, como era o caso dos "sete sábios". Platão, em *Protágoras* 343a, nos oferece o mais antigo testemunho de uma lista dos "sete sábios", em que figuram: Tales de Mileto, Pítaco de Mitilene, Bias de Priene, Sólon de Atenas, Cleóbulo de Lídia, Misón de Quenea e Quilón de Lacedemônia.

[7] Uma das principais ilhas gregas do Mar Egeu, hoje cidade de Samos.

as propriedades dos números relacionadas com a aritmética, a geometria elementar plana e a espacial, a música e a astronomia. Esses estudos constituíram um programa essencial para a formação dos discípulos dessa escola filosófica e, com Filolau de Crotona[8](470-390 a.C.), foram divulgados para um maior número de adeptos, já que a escola pitagórica era uma espécie de irmandade secreta mística, política, científica e religiosa. Porém, antes disso, na primeira metade do século V a.C., houve o aparecimento de uma outra escola filosófica chamada Eleata, cujo fundador foi Parmênides de Eléia[9] (549-420 a.C.).

Com Parmênides, apresenta-se uma nova forma no pensamento reflexivo, isto é, a ação necessária da razão como processo dialético do pensar, surgindo como primeiro resultado dessa operação natural a distinção entre o que é a essência e o que é a forma das coisas. Diante da realidade sensível que se percebe, com pequena diferença nas acepções, existe uma realidade eterna, imutável e imóvel do ser. Portanto, o homem deve buscar esta realidade por detrás das aparências do mundo dos sentidos e discernir a verdade (o ser) da suposta opinião (o não ser). Com efeito, Parmênides buscava um modo de se obter a verdade através do pensamento, segundo relatos de Proclo de Bizâncio (412-487), em seus comentários ao *Timeu, I 345, 18-20, de Platão,* e Simplício de Cilícia, em seus comentários à *Física, 116, 28-32-117, 1, de Aristóteles*:

> *Pois bem, te direi, escuta com atenção minha palavra, quais são os únicos caminhos de investigação que se possa pensar; um: o que é e o que é possível no ser; é o caminho da persuasão (acompanha, com efeito, a Verdade); o outro: o que não é e o que é necessário não ser. Mostrar-te-ei que esta senda é completamente inescrutável; não conhecerás, com efeito, o que não é (pois é inacessível) nem te mostrarás.* (Lan e Juliá, 1986v.1, p.436)

Nesta passagem observa-se que, na primeira asserção de Parmênides, o caminho logicamente transitável que pode ser percorrido pelo pensamento para se buscar a verdade é através de: *o que é e o que é possível não ser.* E na segunda asserção o caminho intransitável é: *o que não é e o que é necessário não ser*; pois seria contraditório pensar que existe o que não é.

Pode-se dizer, conforme Russell, que sua doutrina foi exposta num poema intitulado *Sobre a Natureza*[10] e escrito numa entoação profética e alegórica[11]. Parmênides não mostra os procedimentos para se chegar à verdade, porém inicia uma forma de pensamento crítico com relação ao conhecimento vigente e introduz, na construção do conhecimento científico, um rigor

8 Hoje Crotona, na Idade Média, Cotrone, uma das cidades mais poderosas da magna Grécia, na costa oriental do Brútio (ou Brúcio, antiga região da Itália), fundada pelos Aqueus, em 710 a.C.

9 Região do Peloponeso, na Grécia. Hoje Vélia na Itália.

10 Teofrasto diz que Empédocles foi admirador de Parmênides e um imitador seu ao escrever poemas, pois este também publicou em versos seu discurso *Sobre a Natureza.* (Lan e Juliá, 1986, p.415)

11 Derivada do grego, significa: palavra ou imagem que desperta o pensamento de outra. Por exemplo: o apólogo e a parábola são espécies de alegorias.

lógico que não foi alcançado pelo empirismo jônico nem pelo misticismo pitagórico, e que procura descobrir na capacidade racional do homem a qualidade que o possibilita ter conhecimento sobre a essência.

Além disso, conforme Campos, ao citar Szabó, a forma mais arcaica de demonstração é por redução ao absurdo e a mais antiga aplicação dessa prova encontra-se em Parmênides, segundo relato de Simplício de Cilícia, em seus comentários à *Física, 145, 6-11*, de Aristóteles.

Desse modo, a escola eleata negava a validade dos sentidos como meio para alcançar a verdade. De acordo com esse preceito, os eleatas pretendem demonstrar que, através da razão, seriam capazes de provar que a mensagem dos sentidos deveria ser ignorada.

2. Vestígios Históricos de Processos Infinitos Elaborados por Antifon e Brison

Durante o século VI a.C. as condições de vida nas colônias gregas da Ásia Menor são alteradas, em razão das mudanças na economia e facilidades nas transações comerciais. Desse modo, houve um fortalecimento econômico e social daqueles que viviam do comércio, da navegação e do artesanato, marcando definitivamente a decadência da organização social baseada numa aristocracia hereditária e, consequentemente, alterando também o quadro econômico, político, social e cultural de Atenas; assim, segundo Sciacca (1967), houve a necessidade de uma filosofia que caracterizasse os interesses dessa nova classe social.

Essa nova vertente filosófica (filosofia sofística), contribuiu para que o homem fosse preparado para cuidar de si e progredir a todo custo na comunidade. Assim, o ensino era planejado pelo sofista[12], de forma cuidadosa e minuciosa, para que os jovens gregos aprendessem a usar argumentos lógicos que não pudessem ser contrariados, buscando despertar o sentido crítico da investigação em oposição a todo dogmatismo. Segundo Sciacca, o sofista e a sofística caracterizam-se por:

> *(...) o sofista, que abandona a indagação em torno do "princípio" das coisas e concentra a sua atenção sobre o homem e seus problemas humanos (políticos, morais, jurídicos, estéticos etc.). Sofista é propriamente aquele que exercita a profissão de sábio (do mestre de virtudes) e ensina mediante estipêndio. O intento da sofística, mais que especulativo, é prático-educativo: a cultura (e a filosofia) como instrumento de formação do homem para a vida pública (do homem político) como meio de educação, limitada ao interesse por tudo o que é humano e pode ser útil aos assuntos públicos como aos privados. A filosofia tem por objeto o homem no mundo; portanto, torna-se antropologia.* (Sciacca, 1967, p.38-39)

12 Conforme Russell: A palavra "sofista" não tinha, a princípio, sentido pejorativo; significava, bastante aproximadamente, o que hoje chamamos "professor".

2.1 - A Abordagem de Antifon e Brison para o Cálculo da Área do Círculo

Pode-se conjeturar que esta forma de pensamento sofístico auxiliou de alguma maneira os métodos de demonstrações utilizados pelos geômetras gregos, pois se conhecem na História da Matemática Grega pelo menos dois geômetras considerados sofistas, conforme Michel[13]: Antifon[14] de Atenas (480-411 a.C.), o sofista, orador rival de Sócrates (470-399 a.C.) que, como educador da juventude ateniense, dedicou-se às diversas ciências, autor da obra *Sobre a verdade*. Como geômetra, Antifon é conhecido por suas pesquisas relativas à quadratura do círculo, isto é, segundo Temístio (317-387), inscrevendo progressivamente no círculo polígonos regulares de

$3, 6, 12, 24, 48, \ldots, 3.2^k, \ldots, (k \geq 0)$ lados.

Em lugar de: com respeito a Antifon nada teria que dizer o geômetra, porque, inscrevendo um triângulo eqüilátero no círculo, e sobre cada um dos lados do triângulo inscrito um triângulo isósceles com vértice na circunferência do círculo e fazendo isso continuamente creia que, uma vez ou outra, coincidiria o lado do triângulo final, a pesar de ser linha reta, com a periferia. (Bacca, 1961, p.44)

Ou, conforme Simplício, inscrevendo progressivamente no círculo polígonos regulares de

$4, 8, 16, 32, \ldots, 2^k, \ldots, (k \geq 2)$ lados.

Antifon descreveu um círculo e inscreveu nele uma das superfícies poligonales que podem ser inscritas. Seja, por exemplo, o quadrado do polígono inscrito... (Bacca, 1961, p.44)

Antifon queria chegar, com essa duplicação progressiva, a um ponto no qual, por sua pequenez, os lados do polígono se confundiriam com os arcos mínimos correspondentes, e a área do polígono, cada vez mais, se confundiria com a área do círculo.

Ainda de acordo com Michel[15], o outro sofista é Brison[16] de Heracles ou Brison o sofista (450-380 a.C.), filho do historiador Heródoto de Heracles. Como geômetra Brison é conhecido por suas pesquisas relativas à quadratura do círculo, isto é, segundo Aristóteles, Alexandre de Afrodisia (200-300), Temístio (317-387) e João Filopono (490-566), inscrevendo e circunscrevendo progressivamente no círculo polígonos regulares de $4, 8, 16, 32, \ldots, 2^k, \ldots, (k \geq 2)$ lados, de tal forma que a diferença entre a área do polígono circunscrito (sempre maior que a área do círculo) e a

---

13 Michel, 1950, p.182-183.

14 Qualificado de "o sofista" para se distinguir de seu contemporâneo Antifon de Romante, orador e político ateniense.

15 Michel, 1950, p.226-227.

16 Não confundir com Brison filho de Estipão, um dos mestre de Pírron, ou com Brison de Acaia, mestre de Crates, nem com o Brison citado por Jâmblico entre os discípulos imediatos de Pitágoras.

área do polígono inscrito (sempre menor que a área do círculo) resulte mínima, isto é, aproxima-se cada vez mais de zero; e as áreas dos polígonos inscritos e circunscritos, cada vez mais, aproximam-se do valor da área do círculo.

Mas a quadratura do círculo por Brison é erística e sofística, porque não procede segundo os princípios próprios da geometria, conforme outros mais gerais. Que o circunscrever ao círculo um quadrado e inscrever outro dentro e entre os dois quadrados outros mais e dizer depois que o círculo é o que se encontra entre os dois quadrados, e semelhantemente dizer que o quadrado intermediário entre os dois quadrados ditos é menor do que o quadrado circunscrito e maior do que o inscrito e que as (causas) que são de vez maiores e menores que as demais são iguales entre si, - portanto são iguais o círculo e o quadrado -, procede de certos princípios gerais falsos: gerais, porque poderiam corresponder a números, a tempos, a lugares e a outras causas; falsos, com o todo, porque oito e nove são maiores e menores do que dez e sete e, apesar de eles não serem iguales. (Bacca, 1961, p.45)

3.2 - Uma Abordagem da Análise Matemática para os Problemas de Antifon e Brison

Uma figura plana F é uma parte do plano limitada por uma curva fechada Γ que se denomina fronteira da figura F.

Diz-se que o polígono está inscrito numa figura plana F, quando todos os pontos desse polígono pertencem à figura F ou à sua fronteira. Além disso, diz-se que o polígono está circunscrito na figura F, quando todos os pontos dessa figura F e de sua fronteira pertencem ao polígono. Conforme as definições expostas, a área de qualquer polígono inscrito na figura F não é maior do que a área de qualquer polígono circunscrito nessa figura F.

Seja $\{P_i\}$ o conjunto numérico das áreas dos polígonos regulares inscritos numa figura F e seja $\{P_c\}$ o conjunto numérico das áreas dos polígonos regulares circunscritos nessa figura F; observe que para todo i e c, vale: $P_i < P_c$. Denota-se o supremo do conjunto $\{P_i\}$ por A_i , o qual denomina-se área inferior da figura F e o ínfimo do conjunto $\{P_c\}$ por A_s, o qual denomina-se área superior da figura F. Desse modo, nota-se que a área inferior A_i da figura F não pode ser maior do que a área superior dessa figura, isto é, $A_i \leq A_s$. Com efeito, suponha que é válida a desigualdade contrária $A_i > A_s$. Então, tomando $(A_i - A_s)/2 = \varepsilon > 0$ e tendo em conta a definição de supremo e de ínfimo, encontra-se um polígono inscrito na figura F cuja área P_i seja maior do que o número $A_i - \varepsilon = (A_i + A_s)/2$, ou seja, $(A_i + A_s)/2 < P_i$, e um outro polígono circunscrito na figura F com área P_c menor do que o número $A_s + \varepsilon = (A_i + A_s)/2$, ou seja, $P_c < (A_i + A_s)/2$. Assim, comparando as duas desigualdades obtidas, encontra-se que $P_c < P_i$, o que é impossível.

Pode-se definir que uma figura plana F é mensurável quando a área superior A_s coincide com a área inferior A_i. Além disso, o número $A = A_i = A_s$ denomina-se área da figura F.

De acordo com o que foi exposto, enuncia-se e demonstra-se a seguinte proposição: *para que a figura F seja mensurável é necessário e suficiente que para qualquer número* ε *possa-se indicar um polígono circunscrito e um polígono inscrito na figura F tais que sua diferença seja menor do que* ε*, isto é, existem* P_i *e* P_c *tais que* $P_c - P_i < \varepsilon$. Demonstra-se a condição necessária: seja a figura F mensurável, isto é, $A = A_i = A_s$. Dado que A_i e A_s são o supremo e ínfimo dos conjuntos $\{P_i\}$ e $\{P_c\}$, para qualquer número $\varepsilon > 0$, pode-se indicar um polígono inscrito na figura F tal que sua área P_i se diferencia de $A_i = A$ em menos de $\varepsilon/2$, isto é, $A - P_i < \varepsilon/2$. Para este mesmo $\varepsilon > 0$ pode-se indicar um polígono circunscrito na figura F tal que sua área P_c se diferencia de $A_s = A$ em menos de $\varepsilon/2$, isto é, $P_c - A < \varepsilon/2$. Portanto, somando as desigualdades obtidas, encontra-se que $P_c - P_i < \varepsilon$. Por fim, demonstra-se a condição suficiente: sejam P_c e P_i as áreas dos polígonos para os quais $P_c - P_i < \varepsilon$. Dado que $P_i \leq A_i \leq A_s \leq P_c$, tem-se que $A_s - A = A_s$. Portanto, a figura é mensurável.

Referências Bibliográficas

Bacca, J. D. G. *Textos Clasicos para la Historia de las Ciencias*. Caracas: Universidad Central de Venezuela, 1961.

Bicudo, I. *Platão e a Matemática*. Letras Clássicas 2, 301-315, 1998.

Diogenes, L. *Vidas de Filosofos Mas Ilustres*. Madrid: Gredos, 1973.

Edwards, C. H. *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer-Verlag, 1979.

Ilín, V., Pozniak, E. *Fundamentos del Análisis Matemático*. Moscou: Mir, 1991. 3v.

Lan, C. E., Juliá, V. E. *Los Filósofos Presocráticos*. Madrid: Gredos, 1986. 3v.

Michel, P. H. *De Pythagore a Euclide*: *Contribution a L'Histoire des Mathématiques* Préeuclidiennes. Paris: Les Belles Lettres, 1950.

Russell, B. *História da Filosofia Ocidental*. Rio de Janeiro: Zahar, 1969. vol. 1.

Russell, B. *Misticismo e Lógica e outros Ensaios*. Rio de Janeiro: Zahar, 1977.

Russell, B. *Introdução à Filosofia Matemática*. Rio de Janeiro: Zahar, 1981.

Sciacca, M. F. *História da Filosofia*. São Paulo: Mestre Jou, 1967. 3v.

Struik, D.J. *História Concisa das Matemáticas*. Lisboa: Gradiva, 1994.