V Bienal da SBM
Sociedade Brasileira de Matemática
UFPB - Universidade Federal da Paraíba
18 a 22 de outubro de 2010

UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DE CERTOS CONTEÚDOS MATEMÀTICOS

ERMÍNIA DE LOURDES CAMPELLO FANTI*

1.Introdução

O GeoGebra é um software livre e pode ser usado facilmente como uma importante ferramenta para despertar o interesse pela busca do conhecimento Matemático com alunos dos Ensinos Fundamental e Médio. Possibilita trabalhar de forma dinâmica em todos os níveis da educação básica, permitindo a abordagem de diversos conteúdos especialmente os relacionados ao estudo da geometria e funções. Ele foi desenvolvido por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg para educação matemática nas escolas. Pode ser obtido facilmente em sites de busca ou no endereço www.geogebra.at. O objetivo desse trabalho é introduzir as noções básicas do programa e utilizá-lo no estudo de certos conteúdos matemáticos como polígonos, funções reais, e em especial no estudo das cônicas. São inúmeras as aplicações das cônicas no cotidiano. Devido às suas propriedades físicas e estéticas, os arcos de cônicas surgem freqüentemente em Engenharia e Arquitetura, em pontes, cúpulas, torres e arcos. Além das aplicações relacionadas aos movimentos dos planetas, as cônicas também têm aplicações na tecnologia atual, e tem sido tópico de relevância nos programas de Ensino Médio. Alguns problemas, para serem resolvidos geometricamente utilizando o software GeoGebra, serão também apresentados.

* UNESP - IBILCE - São José do Rio Preto - SP, Matemática. fanti@ibilce.unesp.br; erminiacfanti@gmail.com
Coord. Projetos sobre Informática e Jogos no Ensino de Matemática do Núcleo de Ensino e Ciência na UNESP.

2. Sobre o GeoGebra: Noções básicas

Como mencionado na introdução, o programa Geogebra foi desenvolvido por Markus Hohenwarter, professor da Universidade de Salzburg, com o intuito de dinamizar o estudo da Matemática. O GeoGebra pode ser encontrado com facilidade em sites de busca ou no endereço: www.geogebra.org

Ao acessar selecione, se desejar (e houver essa opção) *Portuguese* (*Brazil*). Para executar o programa pode ser que ser necessário baixar a máquina virtual Java, que pode ser obtida a partir do site http://www.java.com/getjava/

Vamos então apresentar um pouco da interface do GeoGebra. Obviamente, ao fazer o download, a versão obtida pode estar um pouco diferente da apresentada aqui tendo em vista, em geral, as constantes alterações/atualizações dos softwares.

Ao acessar o programa temos uma janela como a seguinte:

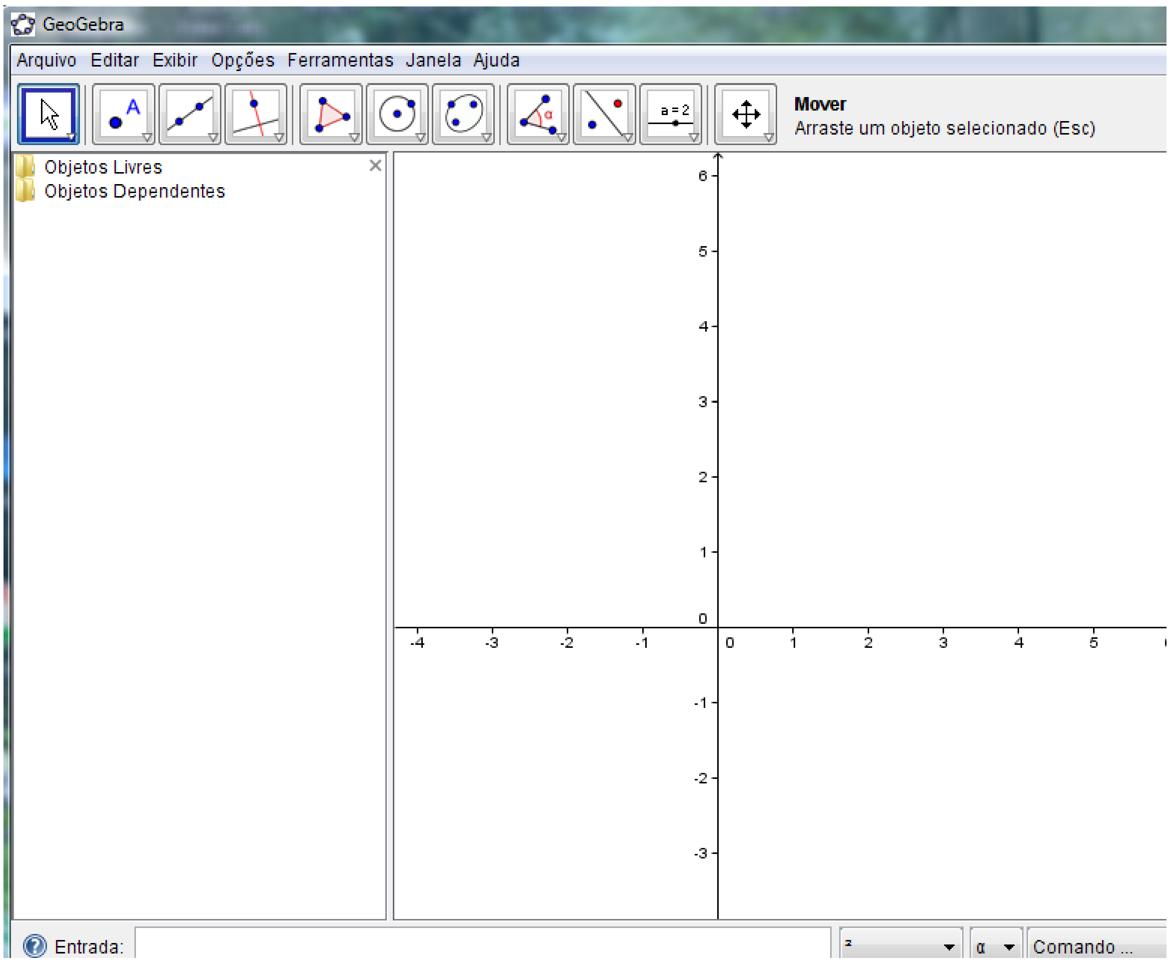


Figura 1 - Tela inicial do GeoGebra

A Interface do software é constituída de uma *janela inicial* (figura acima) que se divide em uma *área de trabalho* (à direita – que referiremos também as vezes como parte geométrica), uma ***Janela de Álgebra*** (à esquerda, que pode ser fechada se necessário) e um campo de ***Entrada*** (que fica abaixo). O campo de ***Entrada*** é usado para escrever as coordenadas de pontos a serem marcados/representados na tela, equações, comandos e funções, diretamente; e esses objetos serão mostrados na área de trabalho, imediatamente após pressionar a tecla Enter.

Observamos que no Geogebra, ***o sistema decimal*** usa ***ponto*** ao invés de ***vírgula***, assim usa-se (na caixa de entrada) 3.4 ao invés de 3,4.

A área de trabalho possui um sistema de eixos cartesianos onde o usuário pode fazer as construções geométricas (diretamente, com o uso do mouse, ou usando a Entrada) e ao mesmo tempo as coordenadas e equações correspondentes são mostradas na janela algébrica.

Ao clicar em um dos itens/comandos do menu: ***Arquivo***, ***Editar***, ***Exibir***, ***Opções***, ***Ferramentas***, ***Janela***, ou ***Ajuda*** (que tem em geral funções coerentes com o próprio nome) e mantendo o botão do mouse apertado aparecerão sub-comandos que podem ser selecionados para serem aplicados. Por exemplo, se a janela de álgebra não esteja ativada, para ativá-la basta clicar em *Exibir,* no menu, e selecionar ***Janela de Álgebra***. Neste mesmo item (***Exibir***) podemos também, ativar/desativar os ***Eixos***, a ***Malha,*** além de outras funções:

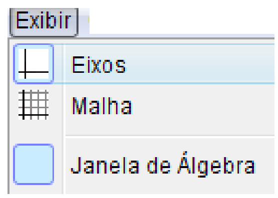


Figura 2 – Explorando o comando Exibir

A barra de ferramentas inicial é composta de **11** ***caixas de ferramentas*** (*ícones*) cada uma delas é indicada por um *quadradinho* com uma *figura*, e é de fato ***composta de outras ferramentas/ícones*** relacionadas com a função inicialmente descrita na figura.

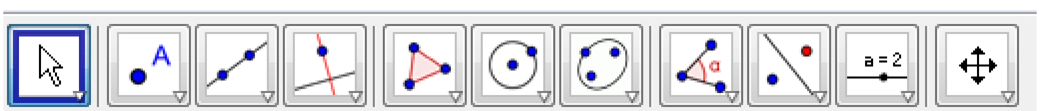


Figura 3 - Barra de ferramentas - inicial

Para fins didáticos enumeraremos as caixas de ferramentas, da barra inicial, de 01 a 11 (da esquerda para a direita). Para ter acesso a uma das ferramentas (comandos/ ícones) dentro de uma caixa de ferramentas, basta clicar na seta do canto inferior direito de cada caixa de ferramenta\ícone e manter o botão esquerdo do mouse pressionado deslizando para baixo até o ícone/ferramenta de interesse. Mostramos abaixo as ferramentas/comandos do ícone ***Polígono*** (caixa de ferramenta **nº. 5**):

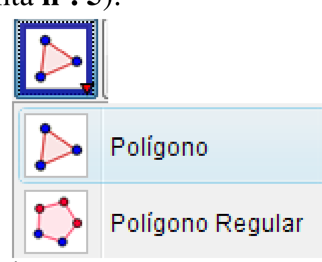
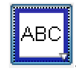


Figura 4 – Ícone/caixa de ferramenta Polígono

É interessante observar que ao selecionar uma ferramenta/ícone obtemos no lado direito da Barra de ferramenta inicial a informação de ***qual é a função desse ícone***, por exemplo, se selecionamos no penúltimo caixa o ícone , aparecerá à informação: “***Inserir Texto – Clique na área de trabalho ou em um ponto para criar um texto***”, como mostra a figura:

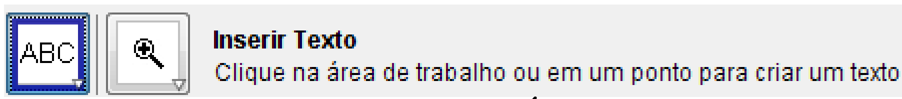


Figura 5 – Detalhes – Ícone Texto

Outro ícone, ainda na penúltima caixa, é o ***Seletor***, que é mostrado na figura seguinte. Esse ícone é muito usado para descrever, por exemplo, uma função que depende de um parâmetro “a” que pode variar num certo intervalo. Mais especificamente, após representar na área de trabalho um *Seletor* nomeado, suponhamos de “a” (com as especificações desejadas), podemos definir, por exemplo, na *Entrada*, a função y= a*x+2, ou o ponto (a, 0) e conforme movimentamos o *Seletor* “a”, os objetos também se movimentam, de acordo com o intervalo selecionado (para “a” variar).

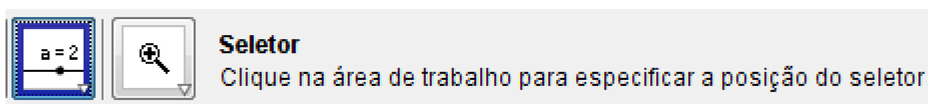


Figura 6 – Ícone Seletor

Motivados por essa facilidade, não descreveremos aqui cada uma das ferramentas/ícones, mesmo porque não é nosso objeto fazer um estudo dos comandos/ícones do Geogebra, mas sim utilizá-lo no estudo de certos conteúdos matemáticos como polígonos, funções reais, e cônicas, como já citado no início. Ressaltamos também que em ***Ajuda*** obtemos importantes informações para o estudo/desenvolvimentos de atividades com o GeoGebra.

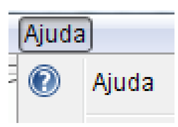


Figura 6 – Menu: Ajuda

Para mudar a cor e/ou espessura de um objeto**:** Clique sobre o objeto com o botão direito do mouse, a seguir clique em ***Propriedades*** e em ***Cor***, para mudar sua cor, e em ***Estilo*** (selecionado a seguir o nível de espessura) para mudar a espessura do objeto:

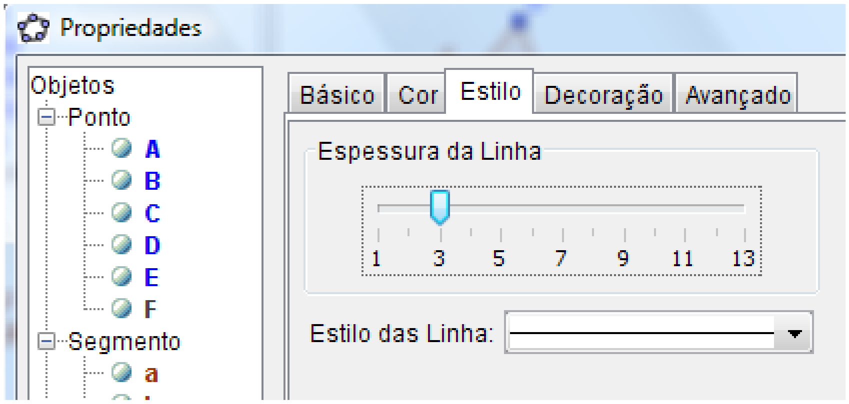


Figura 7 – Sobre Cor e Espessura

Observamos que essa janela também é obtida no menu - *Editar – Propriedades*).

Podemos ***adequar a área de trabalho para melhor visualização*** de uma construção/figura apresentada, usando a ferramenta ***Zoom***. Para isso clique na tela (na parte geométrica) com o botão do mouse direito e aparecerá uma tela como a da Figura 8, selecione então a melhor aproximação.

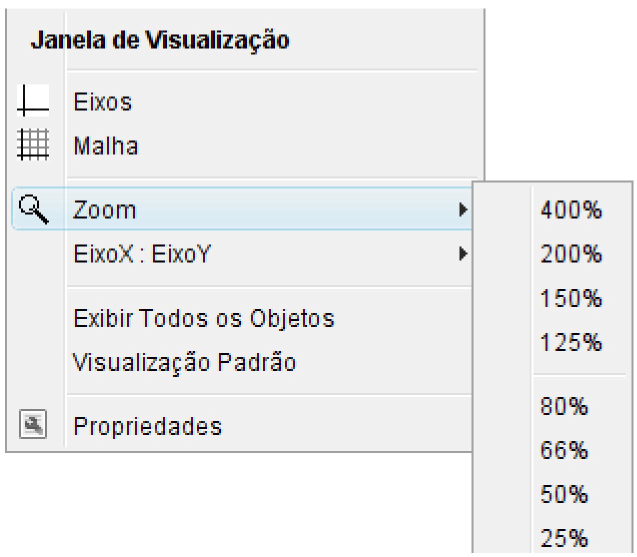


Figura 8 – Janela de Visualização - Ferramenta Zoom

Observamos que para obter grande parte dos elementos/representações geométricas com o Geogebra como, por exemplo, pontos, retas, polígonos, basta selecionar o ícone adequado, na barra de ferramentas de acesso rápido e em seguida clicar na parte geométrica da janela inicial do GeoGebra, que facilmente o elemento desejado seja representado.

Para representar o gráfico das funções, e em geral, em atividades de Geometria Analítica Plana, necessitamos de um sistema cartesiano ortogonal. Para obter isso procedemos do seguinte modo (já mencionado antes):
Para obter os eixos: Clique em ***Exibir*** no menu e logo depois em ***Eixos***.

Para obter a malha ou grade: clique novamente em ***Exibir*** e selecione agora ***Malha***. Na tela, na parte geométrica, irá aparecer uma grade (com distância de 1 cm entre os seus pontos consecutivos alinhados – *que pode ser alterada se usamos a ferramenta Zoom*), como mostra a figura:

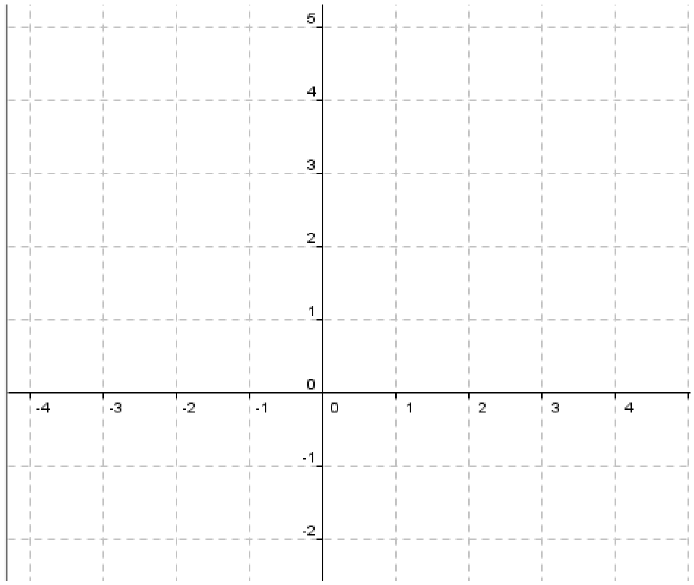


Figura 9 – Eixos e Malha

3. Atividades

Descrevemos a seguir algumas atividades envolvendo *polígonos*, *funções reais* (incluindo *retas*, uma vez que o gráfico de funções afins são retas), e *cônicas* incluindo, obviamente, *circunferências*.

3.I. Polígonos

***Atividade* 1:** Represente um triângulo qualquer e um triângulo eqüilátero.
Para representar o triângulo qualquer basta selecionar o ícone ***Polígono*** (na caixa nº 5) e clicar em três pontos na tela. Para obtermos o triângulo eqüilátero selecionamos o ícone ***Polígono Regular*** e ao dar o 2º clique na tela (2º ponto) aparecerá uma pequena caixa na qual temos que digitar o número de vértices do polígono (que no caso é, obviamente, 3).

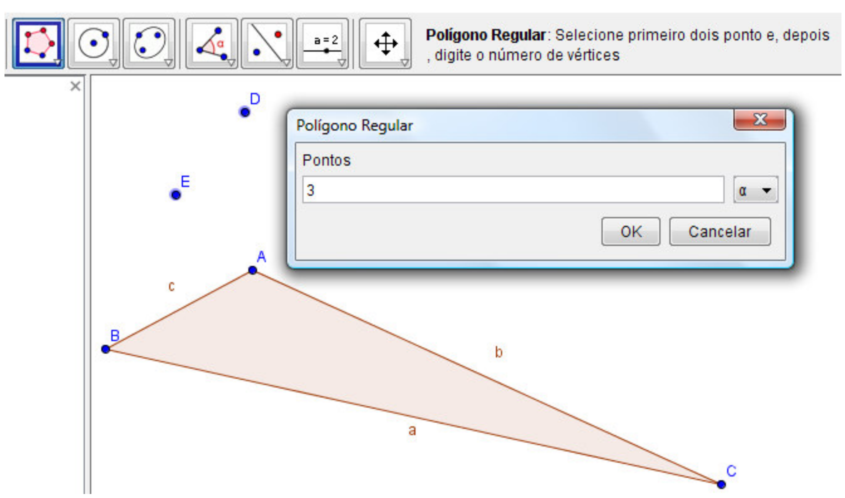


Figura 10 – Construindo Triângulos

Atividade* 2**. Represente um quadrado de lados 3,5cm. Poderá obviamente ter outras formas de construção, sugerimos aqui uma: Selecione o ícone ***Segmento com Comprimento Fixo (na caixa 3) e em seguida digite, na caixa que irá aparece, o *valor 3.5* (lembre-se que no sistema decimal do GeoGebra usa-se ponto e não vírgula). Em seguida, um segmento com a medida desejada será apresentado. Agora basta proceder como na construção do eqüilátero, escolhendo os extremos do segmento como sendo os dois vértices iniciais do quadrado e digitando então 4 como o número de vértices.

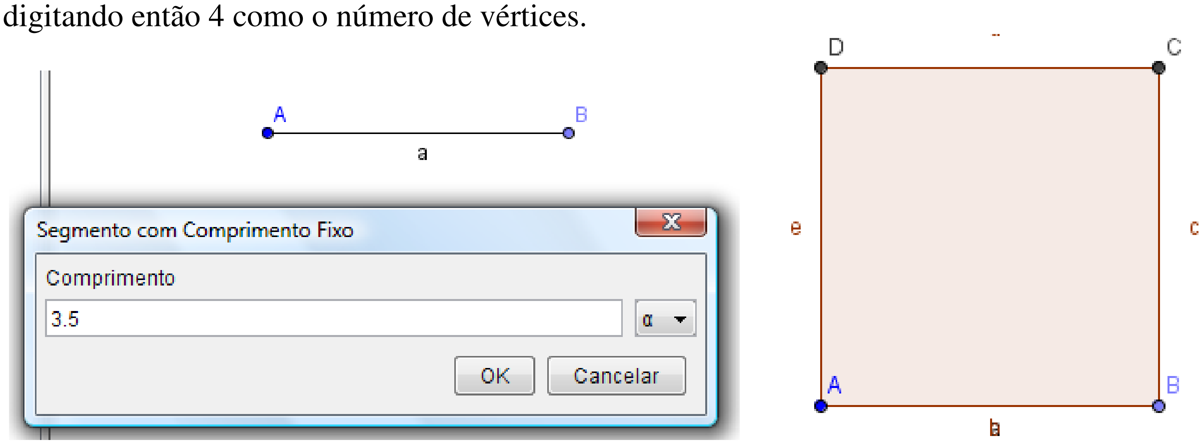


Figura 11 – Obtendo um quadrado de lado 3,5cm

Exercício: Represente um ***pentágono regular*** que tem (1,2) e (-1,0) com vértices e que o ponto (-1, 3) seja um ponto pertencente a região interior do polígono (*sugestão:* use *Eixos* e *Malha*, *Polígono Regular* e o ícone *Reflexão com relação a uma reta*).

3.II.Funções reais (Funções afim, quadráticas e trigonométricas):

Sabemos que o gráfico de uma função real f é um subconjunto do plano cartesiano formado pelos pares ordenados (x,y) onde y = f(x). Em geral, para esboçarmos o gráfico de uma função no plano cartesiano, devemos atribuir valores a variável x, determinando valores numéricos de y.

O GeoGebra nos permite construir várias funções, Como já observamos, a *Entrada* algébrica fica na parte inferior da tela.

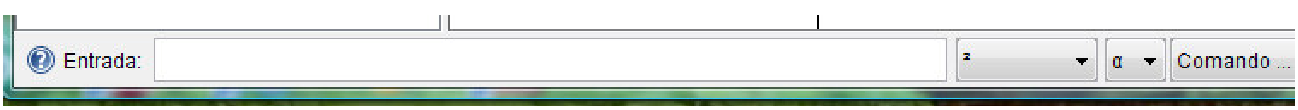


Figura 12 – Entrada

Algumas informações são úteis no estudo das funções: **(1)** O sinal para indicar a multiplicação na caixa de *Entrada* tem que ser representado por * (exemplo: xy deve ser representado por x*y); **(2)** para elevar a uma potência, antes do valor da mesma, devemos colocar ^ (exemplo: x^k significa x^k e y= a*x^2 + b*x+c = ax^2+bx+c); **(3)** para sen(x), use **sin(x)**; para a função tangente use **tan(x)**; para módulo de x, |x|, use **abs(x),** e para $\sqrt{x}$ use **sqrt(x).**

***Atividade* 1.** Represente o gráfico da função afim: f(x) = 2x+4.
Basta ***Exibir – Eixos*** e ***Malha*** e digitar **y= 2x+4** na ***Entrada*** (algébrica).

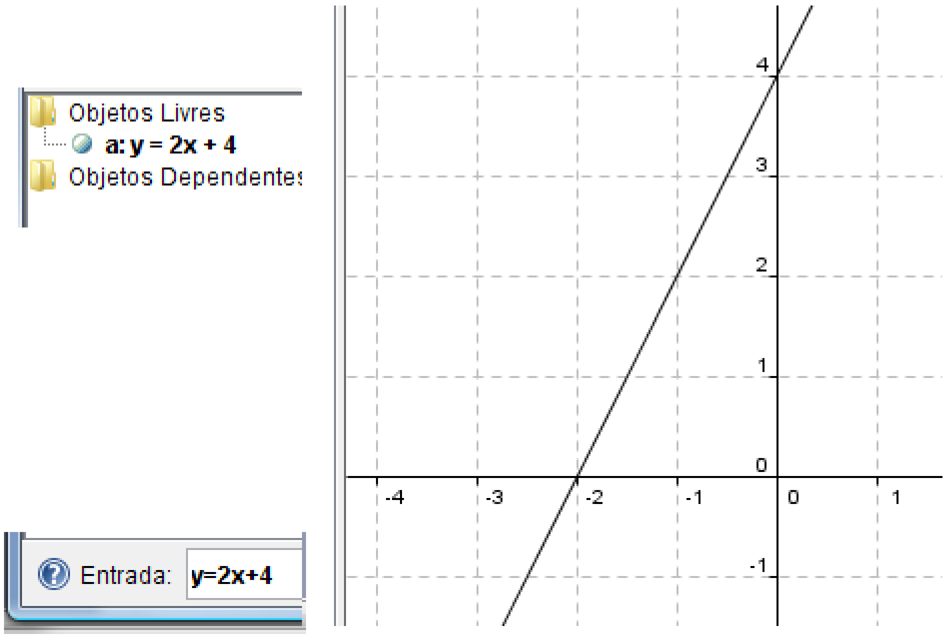
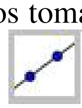


Figura 13 – Gráfico da função f(x) = 2x+4

Tendo em vista que o gráfico da função é uma reta, o mesmo pode ser obtido, então, por marcar dois pontos pertencentes ao gráfico (reta) usando o ícone *Ponto*  (no caso podemos tomar, por exemplo, os pontos (-2,0) e (0,4)), e usar o ícone *Reta Definida por Dois Pontos* .

Exercício: Represente o gráfico da função f(x) = 2x+3. Calcule a função inversa e represente seu gráfico. Represente o gráfico da função identidade y = x. Que relação existe entre os gráficos das funções f(x) e sua inversa $f^{-1}(x)$?

***Atividade* 2.** Represente o gráfico da função quadrática: f(x) = x^2-2x-3 = $x^{\wedge 2}$- 2x - 3.

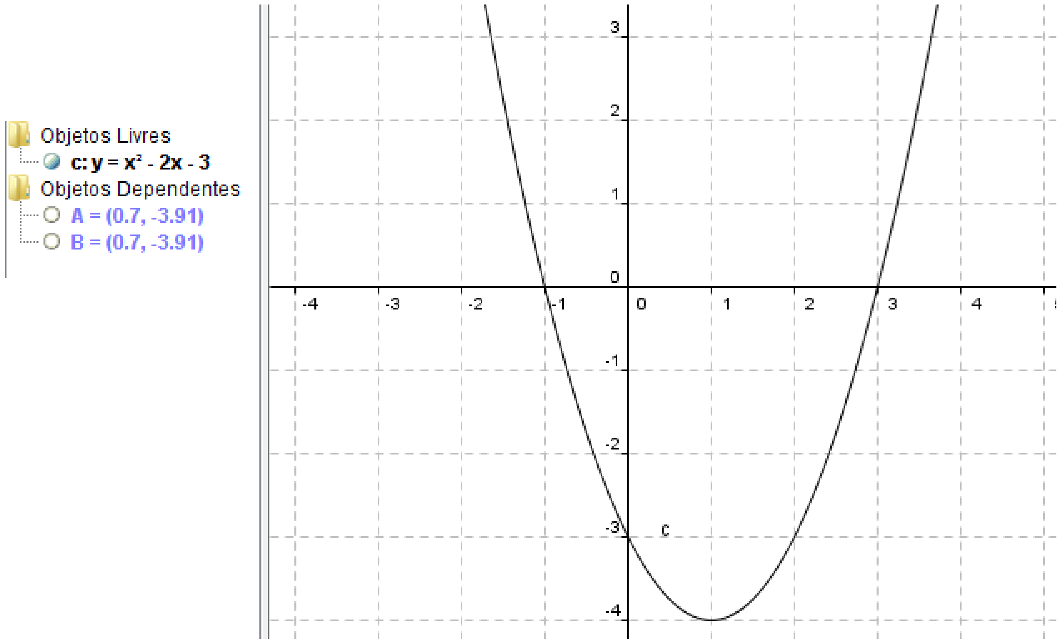


Figura 14 – Gráfico da função quadrática f(x) = x^2-2x-3

Quais são os zeros dessa função? Qual é o vértice da parábola (gráfico da função)?

***Atividade* 3.** Represente geometricamente os gráficos das funções f(x) = sen(x)= sin(x), e g(x) = 2sen(x)= 2sin(x).

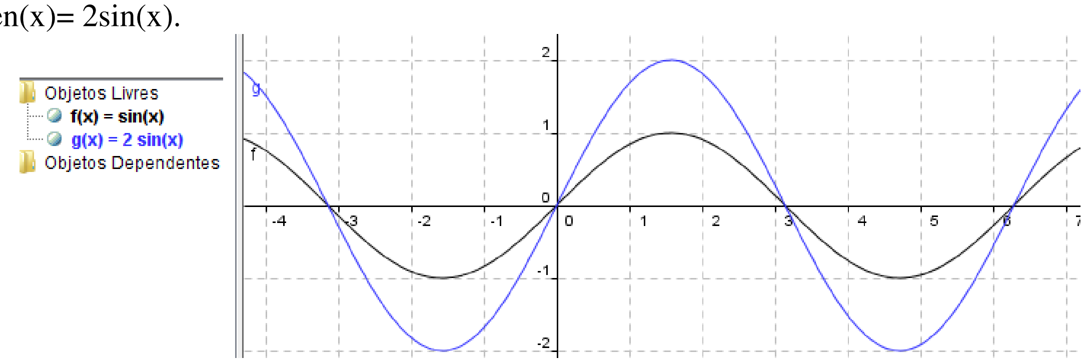


Figura 15 – Gráfico das funções f(x) = sen(x) e g(x)= 2sen(x)

Observação: Para obter no eixo x a unidade em radiano – por exemplo, em múltiplos de π ou π/2, ir no menu ***Opções***, selecionar ***Janela de Visualização***, e escolher em ***Unidade*** π ou digitar π/2. Recordemos que π ~ 3,14.

***Atividade* 4.** Represente os gráficos das funções y = **cos(x) e y=cos(2x).**

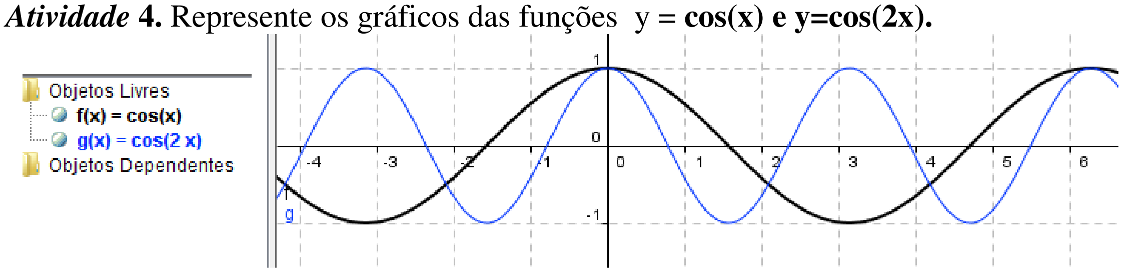


Figura 16 – Gráfico das funções $f(x) = \cos(x)$ e $g(x)= \cos(2x)$

3.III. Cônicas.

Apresentamos uma breve introdução ao estudo das cônicas - incluindo o Teorema de Classificação e alguns exemplos. O leitor interessado poderá ver mais detalhes em Boulos e Camargo [1], cap. 23.

Lugares geométricos: Denominamos lugar geométrico (l. g.) a um conjunto de pontos tais que todos eles e só eles possuem uma dada propriedade.

Elipse: A ***elipse*** é o lugar geométrico dos pontos de um plano para os quais a soma das distâncias a dois pontos fixos distintos F_1 e F_2 é uma constante 2a (maior que a distância entre os dois pontos fixos). Mais precisamente, consideremos um plano π e dois pontos F_1 e F_2 (de π) tais que $d(F_1,F_2) = 2c > 0$. Seja $a > c$. Ao conjunto de pontos $P \in \pi$ tais que $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ **(1)** dá - se o nome de ***elipse***. Os pontos F_1 e F_2 são denominados *focos* da elipse.

Equação reduzida : Tomando um sistema ortogonal, considerando os focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ (isto é, sobre o eixo OX), $P = (x, y)$ e considerando $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, deduz-se, da igualdade (1), a equação na *forma reduzida* :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (*).$$

$A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$, $B_1 = (0, - b)$, $B_2 = (0 , b)$ são chamados *vértices*, o segmento A_1A_2 *eixo maior* (é o segmento de comprimento 2a e contém os focos) e $B_1 B_2$ *eixo menor* ($B_1 B_2 \perp A_1A_2$ no seu ponto médio).

Observação**: 1)** Se adotamos um sistema ortogonal em que F_1 e F_2 estão no eixo OY, então **(1)** fornecerá, de modo análogo, a seguinte equação reduzida:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad (b = \sqrt{a^2 - c^2}).$$

Por exemplo, a elipse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ tem focos no eixo OY, e a elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ tem focos no eixo OX.

2) Quando a = b, a elipse (centrada – equação reduzida $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$) nada mais é do que a ***circunferência*** de centro na origem e raio a: $x^2 + y^2 = a^2$.

Hipérbole: Consideremos num plano π dois pontos F_1 e F_2 (chamados *focos*), distantes $2c > 0$ entre si. Seja $0 < a < c$. Ao conjunto dos pontos $P \in \pi$ tais que $|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a$ se dá o nome de ***hipérbole***.

Equação reduzida: Tomando um sistema ortogonal e supondo que $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, isto é estão sobre o eixo dos x, como no caso da elipse, obtém-se que $P = (x,y)$ está na hipérbole se e somente se

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$. Considerando $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ temos $0 < b < c$ e $c^2 = a^2 + b^2$. A equação na forma reduzida fica assim :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (**).$$

As retas $r : y = \dfrac{b}{a}x$ e $s : y = -\dfrac{b}{a}x$ são denominadas *assíntotas* da hipérbole. As assíntotas são retas das quais a hipérbole se aproxima cada vez mais, à medida que os pontos se afastam dos focos.
$A_1 = (-a , 0)$, $A_2 = (a , 0)$ são chamados *vértices*, 2c a *distância focal*, o segmento A_1A_2 *eixo transverso*, o segmento B_1B_2 (onde $B_1 = (0,-b)$ e $B_2 = (0,b)$) *eixo conjugado*, F_1F_2 *segmento focal*, O o *centro* (ponto médio do segmento focal **)**.

***Observação*:** Se adotar um sistema ortogonal em que F_1 e F_2 estão no eixo OY, obteremos a equação reduzida é da forma $-\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$, onde $\left(b = \sqrt{c^2 - a^2}\right)$; $r : y = \dfrac{a}{b}x$ e $s: y = -\dfrac{a}{b}x$ são, neste caso, as assíntotas da hipérbole.

Exemplo: $x^2 - y^2 = 2$ representa uma hipérbole com focos em OX e $-\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{100} = 1$ representa uma hipérbole com focos em OY.

Parábola: Consideremos num plano π um ponto F e uma reta r, tal que $F \notin r$, fixos. A ***parábola*** é o lugar geométrico dos pontos de π equidistantes de F e r. O ponto F chama-se *foco* e a reta r chama-se *reta diretriz*. Chamamos *parâmetro* da parábola, e representamos por 2p, a distância entre o foco F e a reta r.
Equação reduzida: Tomemos um sistema ortogonal OXY e suponhamos que F esteja sobre o eixo OX , que r seja paralela ao eixo OY, que a origem O seja o ponto médio de HF, onde H é a projeção ortogonal de F sobre r (ou seja, O é o "vértice" da parábola) e que F esteja à direita de r. Daí, como 2p = d (F, r), temos, nesse caso, que $F = (p , 0)$ e $r : x = - p$. Então $x + p = 0$. Logo, $P = (x,y)$ está na parábola se e somente se d (P,F) = d (P, r), isto é,

$$\sqrt{(x - p)^2 + y^2} = \frac{|x + p|}{\sqrt{1^2 + 0^2}}$$

que é equivalente a (elevando ao quadrado e simplificando), a:

$$y^2 = 4px \qquad (***)$$

***Observação*:** São também equações reduzidas da parábola:
$y^2 = - 4px$, (quando $F = (- p, 0)$ e $r : x = p$, i.é, V = O, $F \in$ ao eixo OX e está a esquerda de r),
$y = \dfrac{1}{4p}x^2$, (quando $F = (0, p)$ e $r : y = - p$, i.é, V = O, $F \in$ ao eixo OY e está acima de r),

$y = -\frac{1}{4p}x^2$, (quando $F = (0, -p)$ e $r : y = p$, i.é, $V = O$, $F \in$ ao eixo OY e está abaixo de r).

Definição (*caso geral*): Chama-se ***Cônica*** ao conjunto dos pontos $P = (x, y)$ em E^2, onde E^2 denota o plano euclidiano, tais que: $g(x, y) = Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, sendo A, B, C, D, E, F números reais com $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Exemplos de cônicas:

1- O conjunto vazio: $g(x,y) = x^2 + y^2 + 1 = 0$

2- Um ponto: $g(x,y) = x^2 + y^2 = 0$

3- Uma reta: $g(x,y) = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 0$

4- Reunião de duas retas paralelas: $g(x,y) = (x+y)(x+y+1) = x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 0$

5- Reunião de duas retas concorrentes: $g(x,y) = (x+y)(x-y) = x^2 - y^2 = 0$

6- Elipse: $g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 1 = 0$

7- Hipérbole: $g(x,y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$

8- Parábola: $g(x,y) = x - y^2 = 0$

9- Circunferência: $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

De fato, estes são todos os tipos possíveis de cônicas, mais precisamente, tem-se:

Proposição**:** Fixemos um sistema ortogonal de coordenadas $(O, \vec{i}, \vec{j})$ em E^2. Seja Ω um subconjunto de E^2. Então Ω é uma cônica se e somente se Ω é de um dos tipos listados acima (Boulos e Camargo [1], Apêndice C).

Trabalhando com o GeoGebra:

***Atividade* 1:** Representar geometricamente as cônicas dadas pelas equações:

(a) reduzida: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, **(b)** $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

(a):

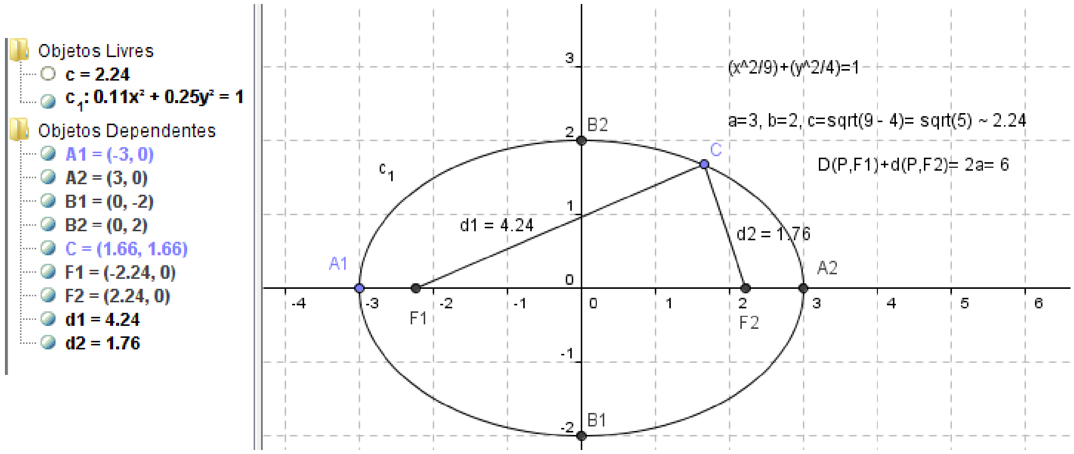
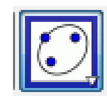
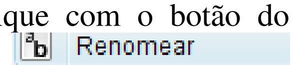


Figura 17 – Elipse (dada por equação reduzida)

Conhecendo os *focos* e *um ponto* da elipse, podemos usar o ícone/ferramenta *Elipse*  para obter a sua representação geométrica. No caso os focos são F1=($-\sqrt{5}$,0) e F2=($\sqrt{5}$,0), e tomaremos como ponto da elipse o vértice B2=(0,2). ***Para representar os focos*** entre na *Janela Algébrica* com os pontos (-sqrt(5),0) e depois (sqrt(5),0). Para ***renomear os pontos*** (ou ***objetos***) clique com o botão do mouse direito na letra/nomenclatura existente, selecione ***Renomear***  na caixa que irá abrir e em seguida ***digite o novo nome/*** *letra* desejada. Os ***focos*** (***vértices***) podem ser ainda obtidos digitando no campo *Entrada* Foco[c] (Vértice [c]), onde c é a letra que indica/nomea a elipse na tela de trabalho. **(b):**

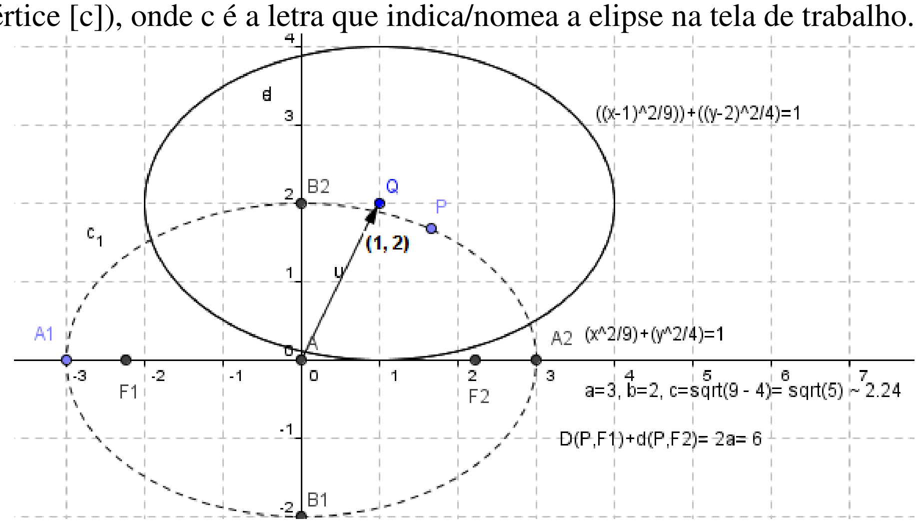


Figura 18 – Elipse (transladada)

Atividade 2: Representar geometricamente as cônicas dadas pelas equações:

(a) reduzida: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 \quad - a^2}\right) = 1$, **(b)** $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1.$

(a): $4 = b^2 = c^2\text{-}a^2 = c^2 - 9 \Rightarrow c^2 = 9 + 4 = 13 \Rightarrow c \sim 3.61$

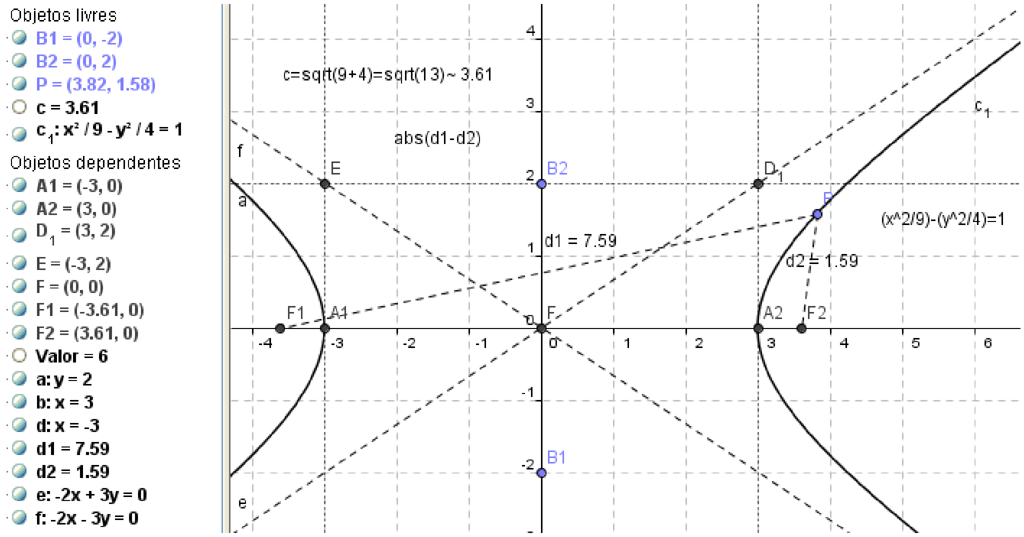


Figura 19 – Hipérbole (dada por equação reduzida)

(b):

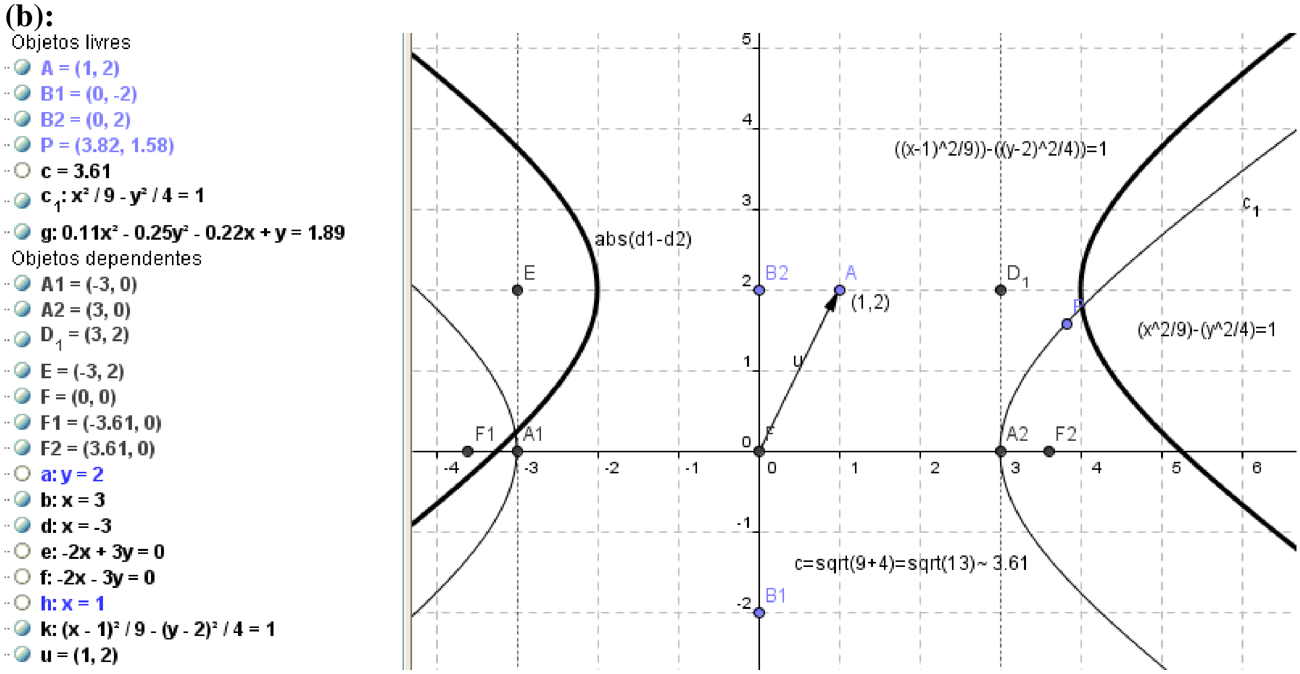


Figura 20 – Hipérbole (transladada)

***Atividade* 3:** Representar as cônicas dadas pelas equações:
(a) reduzida: $y^2 - 5x = 0$, **(b)** $(y-2)^2 - 5(x-1) = 0$.

(a):

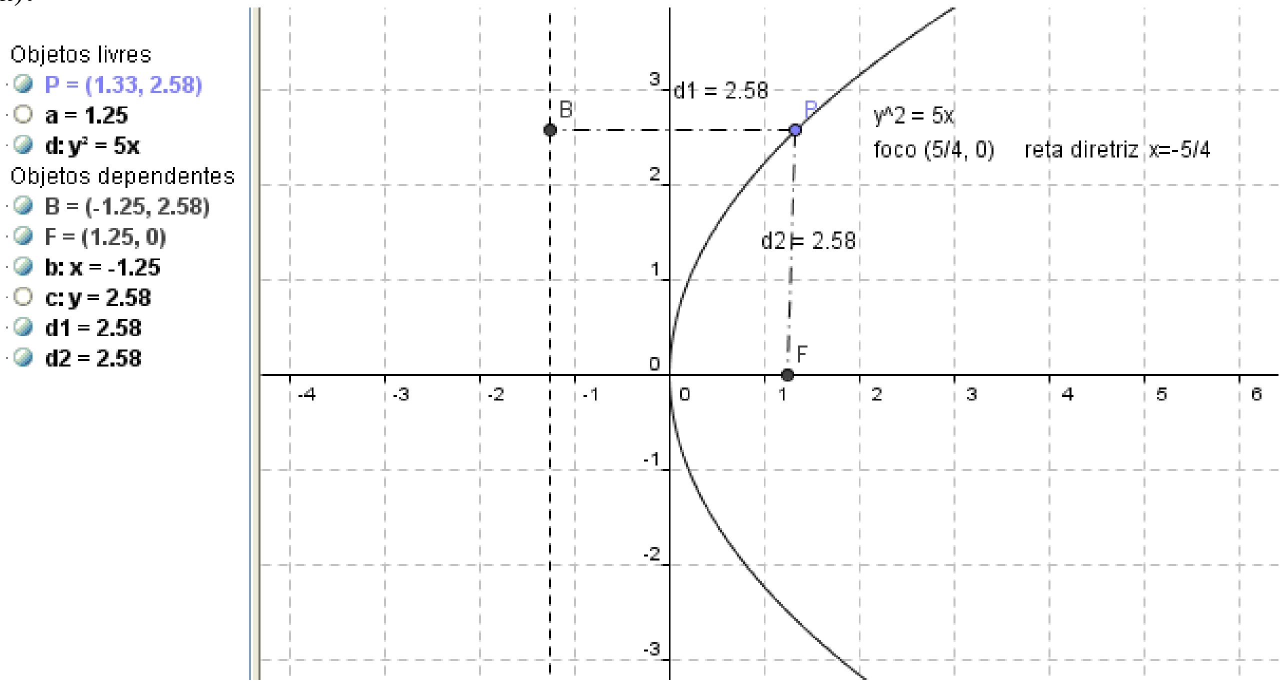
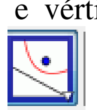


Figura 21– Parábola (dada por equação reduzida)

Note que a equação é do tipo $y^2 = 4px$, e diretriz $x = -p$. Assim o foco é F= (5/4, 0) e a reta diretriz é x = -5/4. Tendo o foco e vértice, a parábola pode ser então obtida usando a ferramenta Parábola na caixa de nº 7 .

(b):

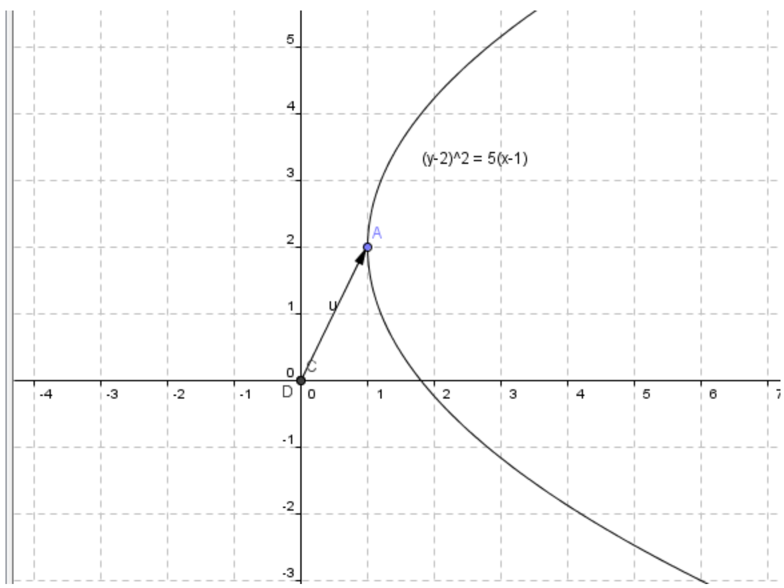
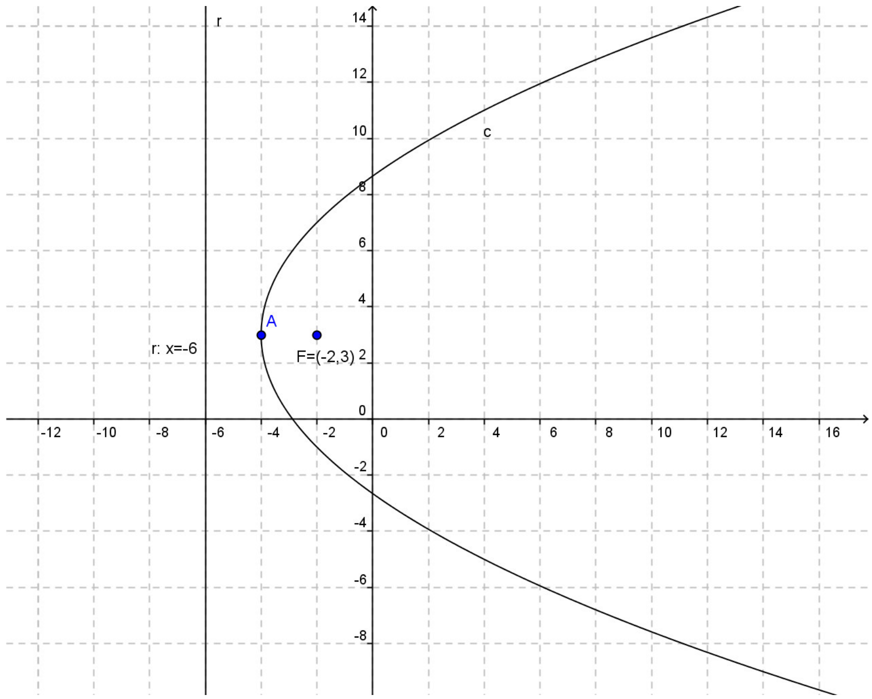


Figura 22– Parábola (transladada)

***Atividade* 4.** Dada a parábola de equação y^2- 8x -6y -23 = 0. Represente geometricamente: **(1)** usando a equação algébrica, **(2)** usando o ícone/ferramenta *Parábola*, e o *foco* e a *diretriz* (para isso complete quadrados: $y^2 - 8x - 6y - 23 = 0 \Rightarrow y^2 - 6y = 8x + 23 \Rightarrow y^2 - 6y + 9 = 8x + 23 + 9 \Rightarrow (y-3)^2 = 8(x+4) \Rightarrow$ V=(- 4, 3), foco F = (-2,3) =(2,0)+(- 4,3) e diretriz r: x = - 6 = - 2 +(-4)).



(aqui usamos a ferramenta Zoom)

Figura 23 – Parábola

***Atividade* 5**. Representar e classificar a cônica de equação: $3x^2 + 12xy + 8y^2 - 18x - 28y + 11 = 0$.

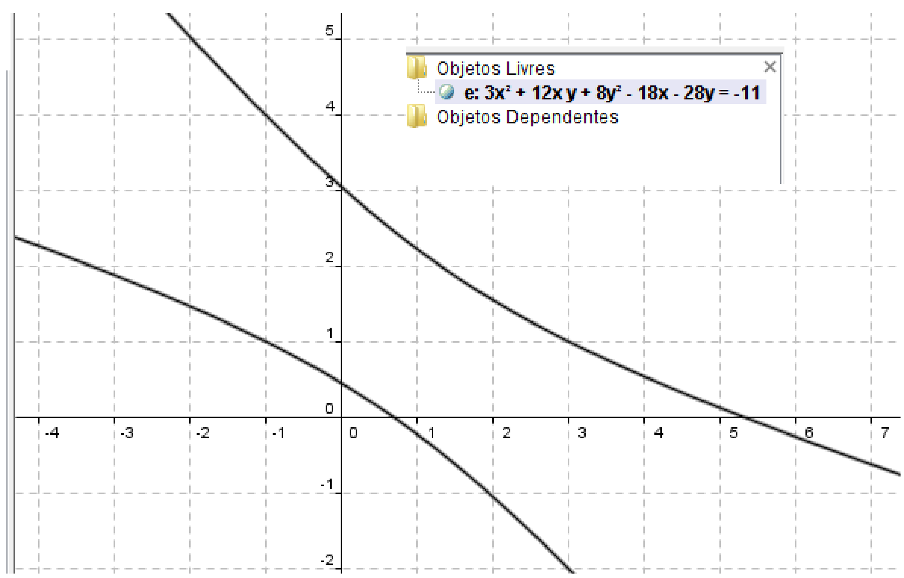


Figura 24 – Cônica (hipérbole)

Pelo gráfico observamos que a cônica é uma hipérbole.

Observação: Podemos ***copiar um trabalho feito na tela*** do GeoGebra e ***colar*** num arquivo do *Word*, ou *Paint*, por exemplo. Isso pode ser feito abrindo o arquivo desejado do GeoGebra, clicando em *Arquivo*, *Exportar* e selecionado, na tela que aparece, *Copiar para a Área de Transferência* (Ctrl+Shift+C). Depois no arquivo (que se pretende copiar – Word, por exemplo) use Ctrl+V para colar.

4. Alguns exercícios gerais

1. Representar e classificar as cônicas de equação:
(1) $2x^2 - 12xy + 7y^2 + 8x + 20y - 14 = 0$,
(2) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 7 = 0$,
(3) $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 38x - 34y + 71 = 0$,
(4) $35x^2 - 2xy + 35y^2 - 34x - 34y - 289 = 0$,
(5) $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x + y + 1/5 = 0$.

2. Representar uma reta que faz com o eixo OX um ângulo de 30º e passa pelo ponto P= (5,2).

Sugestão: Crie uma reta r paralela ao eixo OX, passando por (0,3). Usando a ferramenta/ícone *Girar em torno de um ponto por um ângulo*, gire a reta obtida por um ângulo de 30º digitando 30º na janela que aparece após clicar na reta e no ponto (3,0), obtendo uma nova reta s. Marcar o ponto P e criar a uma reta t paralela a s passando por P. Tal reta satisfaz a condição desejada. *Outro modo* é obter a equação da reta t usando que P = (5,2) pertence a t, e que $tg(30^o) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, de modo que a equação é $y-2 = tg\ 30º.(x-5) = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-5)$. Daí basta entrar com a lei da função na *Entrada* algébrica.

3. Representar a reta r de equação $2x - y + 1 = 0$, a reta s paralela a r passando por P = (2,1) e a reta t perpendicular a r passando por P. Dar uma equação da reta s. Idem para reta t.

4. Represente um hexágono regular que tem A=(2,1) e B=(5,1) como dois de seus vértices e está no semiplano $x \geq 0$.

5. Representar a cônica de equação $x^2 + 9xy + y^2 - 2x - 4y = 1$ e a circunferência de equação $(x+1)^2 + y^2 = 9$. Em seguida obter/representar os pontos de interseção das duas curvas.

Observação: Os pontos de interseção podem ser obtidos usando o ícone *Interseção de Dois Objetos* na caixa nº 2, ou digitando na *Entrada* Interseção[**a**, **b**], onde as letras **a** e **b** que aparecem devem ser tais que **a** indica/nomea a cônica e **b** a circunferência na tela de trabalho do GeoGebra.

6. Representar a hipérbole H1 de equação $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$. Representar a hipérbole H2 obtida por rotacionar/girar a hipérbole H1 em torno do ponto O=(0,0) por um ângulo de 90º, e então representar a hipérbole H3 obtida por transladar H2 pelo vetor $\overrightarrow{OP}$, onde P = (3,2). Obtenha a equação de H3.

Sugestão: Para obter H2 use o ícone *Girar em torno de um ponto por um ângulo* e para obter H3 use o ícone *Transladar objeto por um vetor*. Finalmente, se necessário, clique com o botão direito do mouse na equação da hipérbole H3, que aparecerá na *Janela de Álgebra,* e selecione Equação $(x - m)^2 / a^2 - (y - n)^2 / b^2 = 1$ para obter a equação de H3 nessa forma.

5.Referências Bibliográficas

[1] P. BOULOS, I. CAMARGO, *Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial.* Prentice Hall, São Paulo, 2005.

[2] E.L.C. FANTI, J. R. MORAES, J. B. SANTOS, *Usando a informática no estudo das cônicas*, XIX SEMAT, SJRP, 2007, 1-49.

[3] E.L. LIMA, P.C. P. CARVALHO, *Coordenadas no Plano*. Rio de Janeiro, 1982.

[4] E.L. LIMA, P.C.P CARVALHO, E. WAGNER, A.C.A. MORGADO, *Matemática do Ensino Médio* - Coleção do Professor de Matemática/SBM - RJ, 1997.

[5] C.H. dos SANTOS, *GeoGebra - Aplicações ao Ensino de Matemática*. Universidade Federal do Paraná - UFPR, 2009.