Capítulo 1

Equações Diferencias Ordinárias de 2^{a} Ordem

1.1 Notas Históricas

A história das equações diferenciais começa com o estudo do cálculo por Pierre de Fermat (1601-1665), Isaac Newton (1642-1727), e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) quando esses incríveis matemáticos tiveram entendimento suficiente e notação para a derivada. As soluções para estas equações, entretanto, não eram tão fáceis. As manipulações simbólicas e simplificações algébricas ajudaram apenas um pouco. A integral e seu papel teórico no Teorema Fundamental do Cálculo ofereceu ajuda direta apenas quando as variáveis eram separadas, em circunstâncias muito especiais. O método de separação de variáveis foi desenvolvido por Jakob Bernoulli (1654-1705) e generalizado por Leibniz. Assim estes pesquisadores no século XVII focalizaram estes casos especiais e deixaram um desenvolvimento mais geral das teorias e técnicas para aqueles que os seguiram.

Ao final do século XVII e início do XVIII, a próxima onda de pesquisadores de equações diferenciais começou a aplicar estes tipos de equações a problemas em astronomia e ciências físicas. Jakob Bernoulli estudou cuidadosamente e escreveu equações diferenciais para o movimento planetário, usando os princípios de gravidade e momento desenvolvidos por Newton, seu incluiu também o desenvolvimento da catenária e o uso de coordenadas polares. O irmão de Jakob, Johann Bernoulli (1667-1748), foi provavelmente o primeiro matemático a entender o cálculo de Leibniz e os princípios de mecânica para modelar matematicamente fenômenos físicos usando equações diferenciais e a encontrar suas soluções. Outro matemático de destaque é Giacomo Ricatti (1676-1754) que não pode concluir seu trabalho por conta da falta de ferramentas para solucionar casos especiais da equação que leva hoje seu nome. Os Bernoullis, Jakob, Johann e seu filho, Daniel (1700-1782), todos estudaram os casos da equação de Ricatti também. Na época, Brook Taylor usou séries para "resolve" equações diferenciais, outros desenvolveram e usaram estas séries para vários propósitos. Contudo, o desenvolvimento de Taylor de diferenças finitas começou um novo ramo da matemática intimamente relacionado ao desenvolvimento das equações diferenciais. No início do século XVIII, este e muitos outros matemáticos tinham acumulado uma crescente variedade de técnicas para analisar e resolver muitas variedades de equações diferenciais. Entretanto, muitas equações ainda eram desconhecidas em termos de propriedades ou métodos de resolução. Cinqüenta anos de equações diferenciais trouxeram progressos consideráveis, mas não uma teoria geral.

A situação mudou quando Leonhard Euler (1707-1783) chegou à cena das equações diferenciais e propôs que a chave para o entendimento de equações diferenciais estava na teoria das funções. Euler entendeu o papel e a estrutura das funções, estudou suas propriedades e definições, desenvolveu procedimentos para soluções de muitos tipos de equações, sendo o primeiro a entender as propriedades e os papéis das funções exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e muitas outras funções elementares. Em 1739, desenvolveu o método de variação de parâmetros.

Depois de Euler vieram muitos especialistas que refinaram ou estenderam muitas das idéias de Euler. Em 1728, Daniel Bernoulli usou os métodos de Euler para ajudá-lo a estudar oscilações e as equações diferenciais que produzem estes tipos de soluções. O trabalho de D'Alembert em física matemática envolveu equações diferenciais parciais e explorações por soluções das formas mais elementares destas equações. Lagrange seguiu de perto os passos de Euler, desenvolvendo mais teoria e estendendo resultados em mecânica, especialmente equações de movimento *problema dos três corpos* e energia potencial. As maiores contribuições de Lagrange foram provavelmente na definição de função e propriedades, o que manteve o interesse em generalizar métodos e analisar novas famílias de equações diferenciais. Lagrange foi provavelmente o primeiro matemático com conhecimento teórico e ferramentas suficientes para ser um verdadeiro analista de equações diferenciais. Em 1788, ele introduziu equações gerais de movimento para sistemas dinâmicos, hoje conhecidas como equações de Lagrange. O trabalho de Pierre-Simon Laplace (1749-1827) sobre a estabilidade do sistema solar levou a mais avanços, incluindo técnicas numéricas melhores e um melhor entendimento de integração. Em 1799, introduziu as idéias de um laplaciano de uma função. Laplace reconheceu as raízes de seu trabalho quando escreveu "Leia Euler, leia Euler, ele é nosso mestre".

O nome de Laplace está ligado a *hipótes nebular* da cosmologia, à chamada *equação de Laplace* da teoria do potencial, à *Transformada de Laplace* que posteriormente se tornaria a chave do cálculo operacional de Heavisade. Laplace consegui ser uma autoridade nos assuntos que estudo. Morreu em 1827, exatamtente um século depois do falecimento de Newton. Segundo relatos suas última palavras foram "o que sabemos é insignificante; o que não sabemos é imenso."

Joseph Fourier (1768-183), outro grande destaque, teve sua pesquisa matemática voltadas ao estudo de cálculos da difusão de calor e à solução de equações diferenciais. Muito deste trabalho aparece em The Analytical Theory of Heat (A Teoria Analítica do Calor,1822) de Fourier, no qual ele fez uso extensivo da série que leva seu nome. Este resultado foi uma ferramenta importante para o estudo de oscilações. Fourier, contudo, pouco contribuiu para a teoria matemática desta série, a qual era bem conhecida anteriormente por Euler, Daniel Bernoulli, e Lagrange.

As contribuições de Charles Babbage vieram por uma rota diferente. Ele desenvolveu uma máquina de calcular chamada de Máquina de Diferença que usava diferenças finitas para aproximar soluções de equações.

Do século XIX para os dias de hoje, grandes contribuições foram dadas, muitas teorias foram desenvolvidas após o aparecimento das variáveis complexas. Vieram nessa época e após isso, Gauss, Cauchy, em 1876, Lipschitz (1832-1903) desenvolveram teoremas de existência para soluções de equações diferenciais de primeira ordem. Foi nesse período que os estudos se voltaram para uma análise qualitativa da equações diferenciais.

Equações não lineares foram o próximo grande obstáculo. Henri Poincaré (1854-1912), o maior matemático de sua geração, produziu mais de 30 livros técnicos sobre física matemáticas e mecânica celeste. A maioria destes trabalhos envolveu o uso e análise de equações diferenciais. Em mecânica celeste, trabalhando com os resultados do astrônomo americano George Hill, conquistou a estabilidade das órbitas e iniciou a teoria qualitativa de equações diferenciais não lineares. Muitos resultados de seu trabalho foram as sementes de novas maneiras de pensar, as quais floresceram, tais como análise de séries divergentes e equações diferenciais não lineares. Poincaré entendeu e contribuiu em quatro áreas principais da matemática - análise, álgebra, geometria e teoria dos números. Ele tinha um domínio criativo de toda a matemática de seu tempo e foi, provavelmente, a última pessoa a estar nesta posição. No século xx, George Birkhoff usou as idéias de Poincaré para analisar sistemas dinâmicos grandes e estabelecer uma teoria para a análise das propriedades das soluções destas equações. Na década de 1980, a teoria emergente do caos usou os princípios desenvolvidos por Poincaré e seus seguidores.

1.2 Equações Lineares de Segunda Ordem

Uma equação diferencial linear ordinária (EDO) de segunda ordem tem a forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = g\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right), \tag{1.1}$$

onde $g\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = f(x) - p(x)\frac{dy}{dx} - q(x)y$. Em geral, escrevemos (1.1) como

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x), \tag{1.2}$$

onde $p, q, f : (a, b) \to \mathbb{R}$ são funções contínuas definidas num intervalo aberto (a,b), de uma variável independente x e outra dependente, y, com $y = y(x)$. Em muitos problemas, o intervalo considerado é $(0, \infty)$ ou até mesmo $(-\infty, \infty)$. Se f é identicamente nula, então dizemos que (1.2) é *homogênea*, caso contrário, dizemos que ela é *não homogênea*. Por outro lado, se p e q são funções constantes então, (1.2) é *homogênea de coeficientes constantes* ou *não homogênea de coeficientes constantes* conforme a função f seja ou não identicamente nula.

Equações como (1.2), em geral, requerem duas integrações para que possamos obter a solução y que, evidentemente, deve ser duas vezes diferenciável no intervalo aberto em questão. Em consequência disso, devemos ter duas condições iniciais a saber, $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = y'_0$, onde y_0 e y'_0 são números dados.

A seguir, enunciaremos um resultado de muita importância para o estudo das EDOs de segunda ordem, entretanto, sua demonstração será omitida uma vez que requer muitos pré-requisitos que transcendem a simplicidade desse texto.

Teorema 1.1 (Existência e Unicidade). *Se p, q e f são funções contínuas em um intervalo aberto I, então o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + p(x)\dfrac{dy}{dx} + q(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

admite uma única solução definida em todo intervalo I

Doravante, por simplicidade, escreveremos y'' e y' no lugar de $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ e $\dfrac{dy}{dx}$, respecti-vamente.

Existem diversos métodos[1] para a obtenção da solução de (1.3). Alguns deles são, método dos coeficientes a determinar; variação dos parâmetros; redução da ordem; solução via séries e o método tratado nesse trabalho que é a solução via Transformada de Laplace .

Por hora, vamos nos concentrar, na equação homogênea de coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{1.4}$$

Essas equações compreendem uma classe ampla e importante de EDOs que podem ser resolvidas, de maneira relativamente fáceis, em termos de funções elementares.

Suponha que y_1 e y_2 sejam soluções de (1.4) e que existam constantes reais α_1 e α_2 tais que $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$, então $y' = \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2'$ e $y'' = \alpha_1 y_1'' + \alpha_2 y_2''$. Substituindo y, y' e y'' em $ay'' + by' + c$ obtemos, $\alpha_1(ay_1'' + by_2' + cy_1) + \alpha_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) = 0$. Isso mostra que qualquer combinação linear de y_1 e y_2 é solução de (1.4), esse resultado é conhecido como *Princípio da Superposição* e, em geral, vale também para EDOs homogênea de coeficientes variáveis.

Para encontrar a solução de (1.4) basta encontrar as raízes da sua *equação característica*[2] $ar^2 + br + c = 0$, temos de analisar três casos:

Caso 1, $b^2 - 4ac > 0$: A equação característica admite duas raízes reais e distintas e a solução de (1.4) é dada por

$$y(x) = c_1 e^{rx} + c_2 e^{rx} \tag{1.5}$$

Caso 2, $b^2 - 4ac = 0$: A equação característica admite duas raízes reais iguais

[1] Para um melhor aprofundamento do assunto, consulte [?], seção 4.2, p99.

[2] Para obter a equação caracterísca basta substituir a função $y = e^{rx}$ em (1.4).

e a solução de (1.4) é dada por

$$y(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx} \tag{1.6}$$

Caso 3, $b^2 - 4ac < 0$: Nesse caso, as raízes da equação característica são complexas conjugadas e a solução de (1.4) é dada por

$$y(x) = c_1 e^{\lambda t} \cos \mu t + c_2 e^{\lambda t} \operatorname{sen} \mu t, \tag{1.7}$$

onde λ é a parte real da raíz complexa e μ, a parte imaginária. Além disso, nos três casos acima, c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Outra questão relevante é a solução de equações não homogêneas. Suponha que (1.2) é não homogênea, então sua solução será dada por

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_{pt}(x), \tag{1.8}$$

onde y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea associada e y_{pt} é uma *solução particular* da equação não homogênea (1.2).

Tendo feito essas considerações, esperamos que o leitor se sinta confiante a prosseguir na leitura. No próximo capítulo trataremos do ponto central desse trabalho.

Capítulo 2

A Transfomada de Laplace

2.1 Introdução

Considere a equação diferencial $y'' + 3y' - y = f(x)$ escrita na forma $D^2y + 3Dy - y = f(x)$, onde $D = \dfrac{d}{dx}$. Se pudéssemos ressolver essa última equação como se fosse uma equação algébrica, bastaria escrever $y(x) = \dfrac{f(x)}{D^2 + 3D - 1}$, porém, isso não faz sentido algum. Por outro lado, podemos extrair algo desse igênuo raciocínio e tentar algebrizar a equação diferencial. Antes, precisamos da

Definição 2.1. Dada uma função f definida num intervalo da reta I, uma *transfomada integral* tem a forma geral

$$\mathcal{J}[f(x)] = F(y) = \int_I K(x, y) f(x) dx, \tag{2.1}$$

onde $F(y)$ é denominada a *transformada integral da função* f, sendo $K(x, y)$ o *núcleo da transformada*

As transformadas integrais são ferramentas muito úteis na resolução de equações diferenciais. A idéia geral é relativamente simples. Deve-se usar (2.1) para transformar o problema para uma função desconhecida f em um mais simples para F. Em seguida deve-se resolver o problema mais simples para encontrar F e finalmente deve-se recuperar a função desejada f de sua transformada F. Essa última etapa do processo é conhecida como inversão da transformada. Nesse trabalho, vamos considerar apenas a Transformada de Laplace, entretando, existem outras tranformadas integrais.

2.2 Definição da Transformada de Laplace

Dada uma função f definida no intervalo $[0, \infty)$, definimos a sua *Transformada de Laplace*, $F(s)$, por

$$\mathcal{L}\left[f(x)\right] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \tag{2.2}$$

supondo que a integral convirja pelo menos para algum valor de s. O leitor deve obsevar que a integral acima está definida no intervalo de zero a infinito. É importante dizer que, integrais definidas em um intevalo ilimitado são chamadas de integrais impróprias e são definidas como um limite de integrais definidas em intervalos finitos; assim,

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{A \to \infty} \int_a^A f(x) dx, \tag{2.3}$$

onde A é um número real positivo. Se a integral do lado direito da igualdade (1.3) existir para todo $A > a$ e se o limite quando $A \to \infty$ existir, então dizemos que a integral imprópria *converge* para aquele valor do limite. Caso contrário a integral *diverge* ou não existe.

Pela Transformada de Laplace, a função f, na variável original x, é levada em uma outra função F na variável s. Uma vantagem é que, em muitos casos F é mais simples que f, veja o exemplo a seguir:

Exemplo 2.1.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[e^{kx}\right] = \int_0^\infty e^{-sx}e^{kx}dx &= \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-(s-k)x}dx \\
&= \lim_{A\to\infty} -\left.\frac{e^{-(s-k)x}}{s-k}\right|_0^A \\
&= -\frac{1}{s-k}\lim_{A\to\infty} e^{-(s-k)} - 1 \\
&= \frac{1}{s-k},\ \ se\ s > k. \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

Outra grande vantagem é que a Transformada de Laplace nos permite trabalhar com uma função, $F(s)$, mais regular que $f(x)$. A chamada *função degrau unitário* ou *função de Heavisade*, definida a seguir, exemplifica esse fato.

A função *degrau unitário* é definida por

$$
u_c(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < c \\ 1, & \text{se } x \geq c \end{cases} \qquad (2.5)
$$

onde c é uma constante real positiva. Sua Transformada de Laplace é dada por:

$$
\begin{aligned}
\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-sx}u_c(x)dx &= \int_0^c e^{-sx}u_c(x)dx + \int_c^\infty e^{-sx}u_c(x)dx \\
&= \int_c^\infty e^{-sx}dx \\
&= \lim_{A\to\infty}\int_c^A e^{-sx}dx \\
&= -\frac{1}{s}\left(\lim_{A\to\infty} e^{-sc}\Big|_c^A\right) \\
&= -\frac{1}{s}\left(\lim_{A\to\infty} e^{-sA} - e^{-sc}\right) \\
&= \frac{e^{-sc}}{s}.
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\mathcal{L}\left[u_c(x)\right] = \frac{e^{-sc}}{s},\ \text{ para } s > 0. \qquad (2.6)
$$

Dois pontos essenciais para nosso estudo são a existência da Transformada de Laplace e a existência da inversa dessa transformada. Antes, é conveniente expor algumas definições.

Dizemos que uma função f é *contínua por partes* num intervalo I, se pudermos dividir esse intervalo num número finito de subintervalos, onde f é contínua em cada subintervalo. Por outro lado, se existem constantes positivas M e α tais que, para todo x no intervalo $[0, \infty)$ tivermos

$$|f(x)| \leq Me^{\alpha x} \text{ sempre que } x \to \infty, \tag{2.7}$$

então dizemos que f é de *ordem exponencial* α.

Considere agora I=$[0, \infty)$, se f é contínua por partes em I e é de ordem exponencial, quando $x \to \infty$, então f é dita *admissível* . Daqui em diante, a menos que se diga ao contrário, iremos considerar apenas funções admissíveis. Essa hipótese nos permite um importante resultado enunciado a seguir.

Teorema 2.1 (Existência). *Seja f uma função admissível, de ordem exponencial* α *no intervalo* $[0, \infty)$. Então sua Transformada de Laplace F(s), definida por (2.2), existe para todo s$>\alpha$.

Demonstração: Devemos mostrar que a integral $\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx$ converge para $s > \alpha$. Por hipótese f é admissível , então existem constantes M e α tais que $|f(x)| \leq Me^{\alpha}$, assim, para qualquer $x_0 > 0$

$$\int_0^{x_0} e^{-sx}|f(x)|dx \leq M\int_0^{x_0} e^{(\alpha-s)x}dx = \frac{M}{\alpha-s}e^{(\alpha-s)x},$$

ou seja,

$$\int_0^{x_0} e^{-sx}|f(x)|dx \leq \frac{M}{\alpha-s}.$$

Assim, para funções admissíveis a integral imprópria é absolutamente convergente, o que mostra a convergencia de $\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx$. Mais do que isso, temos uma estimativa para a função F, isto é,

$$F(s) \leq \frac{M}{\alpha - s}. \qquad \blacksquare \tag{2.8}$$

Corolário 2.2. *Se f é uma função admissível então sua integral*

$$g(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi \tag{2.9}$$

também é admissível e, portanto sua Transformada de Laplace também existe para $s > \alpha$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leq \int_0^x |f(\xi)| d\xi \\ &\leq M \int_0^x e^{\alpha\xi} d\xi \\ &\leq \frac{M}{\alpha}(e^{\alpha\xi} - 1) \\ &\leq Ke^{\alpha\xi}, \text{ onde } K = \frac{M}{\alpha} \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

A Transformada de Laplace goza também da seguinte propriedade de unicidade, que enunciaremos logo abaixo. Vale reiterar que o resultado a seguir é conhecido como *Teorema de Lerch*

Teorema 2.3 (Unicidade). *Se f e g são funções admisíveis em$[0, \infty)$ e se existe uma constante s_0 tal que $F(s) = \mathcal{L}\left[f(x)\right] = \mathcal{L}\left[g(x) = G(s)\right]$ para todo $s_0 > s$, então $f(x) = g(x)$ para todo x>0, exceto possivelmente nos pontos de descontinuidade desssas funções.*

Antes de demonstrar-mos esse teorema, é conveniente enunciar o lema a seguir. A demonstração do lema, porém foge ao objetivos desse trabalho e por isso iremos omití-la.

Lema 2.4 (Aproximação de Weierstrass). *Dada uma função contínua*

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$, existe uma sequência de funções[1] *polinomiais de* $[0,\ 1]$ *em R que converge uniformemente*[2] *para f.*

O leitor interessado na demosntração desse lema deve consultar [?]. Vamos então a demonstração do teorema 2.3.

Demonstração: Definindo $h(x) = f(x) - g(x)$, temos que $H(s) = 0$. Para essa demonstração vamos supor a continuidade da função h, então

$$H(s_0 + n) = \int_0^{\infty} e^{-s_0 x} e^{-nx} h(x) dx, \text{ para } n = 1, 2 \dots \tag{2.10}$$

Se fosse o caso de h ter descontinuidades, bastaria desmembrar a integral (2.10) em soma de integrais tomadas sobre intervalos onde h é contínua. Sendo assim, segue

$$H(s_0 + n) = \int_0^{\infty} e^{-nx} v'(x) dx, \tag{2.11}$$

onde $v(x) = \int_0^x e^{-s_0 t} h(t) dt$. Observe que $v(0) = 0$. Integrando (2.11) por partes vem que

$$H(s_0 + n) = e^{-nx} v(x)\big|_0^{\infty} + n \int_0^{\infty} e^{-nx} v(x) dx.$$

Segue de (2.8) que

$$\int_0^{\infty} e^{-nx} v(x) dx = 0. \tag{2.12}$$

É importante observar que nos pontos onde h é contínua, v é derivável e $v'(x) = e^{-s_0 x} h(x)$. Logo, basta provar que $v(x) = 0$ e seguir-se-á que $h(x) = 0$.

Em (2.12), façamos $x = -\ln t$ e $u(t) = v(-\ln t)$, assim, obtemos

Seguros desses dois resultados, podemos seguir adiante e apresentar as propriedades da Transformada de Laplace .

[1] Uma sequência de funções, em um domínio D, é definida como um conjunto $\{f_n\}$ de funções $f_n : D \to \mathbb{R}$ indexadas com um índice n, inteiro positivo.

[2] Uma sequência de funções $f_n : D \to \mathbb{R}$, definida em um domínio D, converge uniformimente para uma função $f : D \to \mathbb{R}$ se, dado $\varepsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, para todo $x \in\ D$

2.3 Propriedades da Transformada de Laplace

No que segue, enunciaremos, em forma de teoremas, as propriedades da Transformada de Laplace que serão de grande utilidade para nosso trabalho. Ao final dessa seção, serão apresentados alguns exemplos.

Teorema 2.5 (Linearidade). *Sejam f e g duas funções de ordem exponencial α e β no intervalo $[0, \infty)$, respectivamente. Suponha que existam constantes, reais ou complexas, tais que $h(x) = Af(x) + Bg(x)$ então h é admissível e de ordem exponencial no mínimo igual a $\gamma = max\{\alpha, \beta\}$. Além disso, vale a relação*

$$\mathcal{L}\left[h(x)\right] = \mathcal{L}\left[Af(x) + Bg(x)\right] = A\mathcal{L}\left[f(x)\right] + B\mathcal{L}\left[g(x)\right] \tag{2.13}$$

Demonstração: Para a primeira parte desse teorema considere o $|h(x)|$, daí

$$|h(x)| = |Af(x) + Bg(x)| \leq |A||f(x)| + |B||g(x)|$$

Como, por hipótese, f e g são de ordens exponenciais, então existem constantes M e N tais que

$$|h(x)| \leq |A|Me^{\alpha x} + |B|Ne^{\beta x}$$

Podemos supor, sem perda de generalidade que $\alpha > \beta$. Assim

$$|h(x)| \leq [|A|M + |B|Ne^{(\beta-\alpha)x}]e^{\alpha x},$$

quando $x \to \infty$ temos

$$|h(x)| \leq Ke^{\gamma} \text{ onde } K = |A|M \text{ e } \gamma = \alpha.$$

Para mostrar a linearidade, façamos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[h(x)\right] &= \int_0^\infty e^{-sx}[A(f(x) + Bg(x)]dx \\
&= A\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx + B\int_0^\infty e^{-sx}g(x)dx \\
&= A\mathcal{L}\left[f(x)\right] + B\mathcal{L}\left[g(x)\right]
\end{aligned}$$

∎

Exemplo 2.2 (Transformada do Cosseno Hiperbóllco). Inicialmente lembramos que $\cosh = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, neste exemplo vamos calcular $\mathcal{L}\left[\cosh ax\right]$, isto é, $\mathcal{L}\left[\dfrac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}\right]$, onde a é uma constante real positiva. Usando a propriedade de linearidade, teorema 2.5, vem que:

$$\mathcal{L}\left[\cosh ax\right] = \frac{1}{2}(\mathcal{L}\left[e^{ax}\right] + \mathcal{L}\left[e^{-ax}\right]),$$

por (2.4), obetemos

$$\mathcal{L}\left[\cosh ax\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right] = \frac{s}{s^2 - a^2}, \text{ para } s > |a|. \tag{2.14}$$

Com um raciocínio análogo é possível calcular a Transformada de Laplace do *seno hiperbólico* de ax, dada por,

$$\mathcal{L}\left[\operatorname{senh} ax\right] = \frac{a}{s^2 - a^2}, \text{ para } s > |a|, \tag{2.15}$$

onde $\operatorname{senh} ax = \dfrac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}$.

Para uma função f definida para $x \geq 0$, vamos considerar muitas vezes a *função deslocada* de $f(x)$ dada por

$$f_c(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < c, \\ f(x-c), & \text{se } x \geq c, \end{cases}$$

que representa um deslocamento de f por uma distância c no sentido dos x positivos. Podemos escrever f_c em termos da função degrau unitário da seguinte forma

$$f_c(x) = u_c(x) f(x-c)$$

Teorema 2.6. *Se $\mathcal{L}\left[f(x)\right] = F(s)$, então, para qualquer número positivo c, tem-se que:*

$$\mathcal{L}\left[f_c(x)\right] = e^{-sc}\mathcal{L}\left[f(x)\right] = e^{-sc}F(s) \tag{2.16}$$

Demonstração: $\mathcal{L}\left[(f_c(x))\right] = \int_0^\infty e^{-sx}u_c(x)f(x-c)dx = \int_c^\infty e^{-sx}f(x-c)dx$. Fazendo $t = x - c$, obtemos $dt = dx$, $t \to 0$ quando $x \to c$ e $t \to \infty$ quando $x \to \infty$, daí

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f_c(x)\right] &= \int_0^\infty e^{-s(t+c)}f(t)dt \\ &= e^{-sc}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \\ &= e^{-sc}F(s)\end{aligned}$$

O teorema 2.6 diz, simplesmente que o deslocamento de f por uma distância c no sentido dos x positivos corresnponde à multiplicação de $F(s)$ por e^{-sc}. Esse resultado terá grande valia mais adiante. Uma boa pergunta a se fazer é: O que podemos afirmar sobre o deslocamento de $F(s)$? Para responder essa pergunta precisaremos do

Teorema 2.7. *Se a Transformada de Laplace de $f(x)$ é $F(s)$, então para qualquer número real ou complexo β tem-se:*

$$\mathcal{L}\left[e^{\beta x}f(x)\right] = F(s-\beta) \tag{2.17}$$

Demonstração: Vamos calcular $\mathcal{L}\left[e^{\beta x}f(x)\right]$, então

$$\int_0^\infty e^{-sx}e^{\beta x}f(x)dx = \int_0^\infty e^{-(s-\beta)x}f(x) = F(s-\beta) \qquad \blacksquare$$

Exemplo 2.3 (Transformada do Seno). Pela fómula de Euler[3] tem-se que

$$\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i\,\mathrm{sen}\,t & (\star) \\ e^{-ix} = \cos x - i\,\mathrm{sen}\,t & (\star\star) \end{cases},$$

subtraindo $(\star\star)$ de $(\star)$ encontramos

$$\mathrm{sen}\,x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

[3]A fórmula de Euler é dada por $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$

por (2.13), temos

$$\mathcal{L}\left[\operatorname{sen} x\right] = \frac{1}{2i}(\mathcal{L}\left[e^{ix}\right] + \mathcal{L}\left[e^{-ix}\right]) = \frac{1}{2i}(\mathcal{L}\left[e^{ix}u_0(x)\right] + \mathcal{L}\left[e^{-ix}u_0(x)\right]),$$

pelo teorema 2.7 e por (2.6) encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\operatorname{sen} x\right] &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i} + \frac{1}{s+i}\right) \\ &= \frac{1}{s^2+1}, \text{ para } s > 0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Agora, podemos responder a pergunta sobre o deslocamento de $F(s)$ pois, o teorema acima conta-nos que a multiplicação de $f(x)$ por $e^{\beta x}$ resulta num deslocamento da transformada $F(s)$, representado pelo vetor diferença $\vec{s} - \vec{\beta}$.

Teorema 2.8. *Se a Transformada de Laplace de $f(x)$ é $F(s)$, então a Transformada de Laplace de $f(cx)$, onde c é uma constante real positiva, é dada por*

$$\mathcal{L}\left[f(x)\right] = \frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right) \tag{2.19}$$

Demonstração: Para calcular $\mathcal{L}\left[f(x)\right]$ façamos uma mudança de variável. Se $t = cx$, então

$$\int_0^\infty e^{-sx} f(cx)dx = \frac{1}{c}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{c}t} f(t)dt = \frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right) \qquad \blacksquare$$

Exemplo 2.4. Podemos usar o teorema acima e o exemplo 2.3 para calcular a Transformada de Laplace da função $\operatorname{sen} ax$, para $a > 0$ e $s > a$.

$$\mathcal{L}\left[\operatorname{sen} ax\right] = \frac{1}{a}\mathcal{L}\left[\operatorname{sen} x\right]\Big|_{s/a} = \frac{1}{a}\frac{1}{(s/a)^2+1} = \frac{a}{s^2+a^2} \tag{2.20}$$

O próximo teorema nos conta que a Transformada de Laplace "destrói derivadas", isso será bem útil na hora de resolver equações diferenciais, já que para resolvê-las teremos de calcular a Transformada de Laplace de derivadas.

Teorema 2.9. *Se a função f é derivável em $(0,\infty)$, com f admissível , então*

$$\mathcal{L}\left[f'(x)\right] = s\mathcal{L}\left[f(x)\right] - f(0^+), \;\; se \; s > k \tag{2.21}$$

onde $f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

Demonstração: Por (2.9) sabemos que se $f'(x)$ é admissível então f também é admissível . Para calcular $\mathcal{L}\left[f'(x)\right]$, usaremos o método da integração por partes.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-sx} f'(x)dx &= \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-sx} f'(x)dx \\
&= \lim_{A\to\infty} \left[e^{-sc} f(x)\Big|_0^A + s\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx \right] \\
&= sF(s) + \left[\lim_{A\to\infty} \left(e^{-sA} f(A) - f(0)\right) \right] \\
&= sF(s) - f(0)
\end{aligned}$$

Como f é contínua em $[0,\,\infty)$, podemos escrever $f(0) = f(0^+)$, assim

$$\mathcal{L}\left[f'(x)\right] = s\mathcal{L}\left[f(x)\right] - f(0^+) \qquad \blacksquare$$

Suponha que f seja n vezes diferenciável, com n inteiro positivo e $f^{(n)}$ admissível. Suponha também que, ao substituírmos f' por $f^{(n-1)}$ em (2.21) obteremos

$$\mathcal{L}\left[f^{(n-1)}(x)\right] = s^{n-1}\mathcal{L}\left[f(x)\right] - s^{n-2}f(0^+) - \ldots - sf^{(n-3)}(0^+) - f^{(n-2)}(0^+),$$

ou de forma mais enxuta

$$\mathcal{L}\left[f^{(n-1)}(x)\right] = s^{n-1}\mathcal{L}\left[f(x)\right] - \sum_{k=0}^{n-2} s^{n-2-k} f^{(k)}(0^+), \tag{2.22}$$

onde $f^{(0)}(x) = f(x)$. Subistituindo $f^{(n)}(x)$ por $f^{(n-1)}(x)$ em (2.21), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[f^{(n)}(x)\right] &= s\mathcal{L}\left[f^{(n-1)}(x)\right] - f^{(n-1)}(0^+) \\
&= s\left[s^{n-1}\mathcal{L}\left[f(x)\right] - \sum_{k=0}^{n-2} s^{n-2-k} f^{(k)}(0^+)\right] - f^{(n-1)}(0^+) \\
&= s^n\mathcal{L}\left[f(x)\right] - s\sum_{k=0}^{n-2} s^{n-2-k} f^{(k)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+) \\
&= s^n\mathcal{L}\left[f(x)\right] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0^+).
\end{aligned}$$

Assim, demonstramos o

Corolário 2.10. *Se a função f é derivável em $(0,\infty)$ até a ordem n, $n \in \mathbb{N}$, com $f^{(n)}$ admissível então*

$$2\mathcal{L}\left[f^{(n)}(x)\right] = s^n\mathcal{L}\left[f(x)\right] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+). \tag{2.23}$$

Exemplo 2.5 (Transformada do Cosseno). Neste exemplo vamos calcular a transformada da função $\cos ax$. Para isso, observe que a derivada da função $(1/a)\operatorname{sen} ax$ é justamente a função cuja transformada queremos calcular. Assim, pelo teorema 2.9

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\cos ax\right] &= \mathcal{L}\left[\left(\frac{1}{a}\right)\operatorname{sen} ax\right] \\
&= \frac{1}{a}(s\mathcal{L}\left[\operatorname{sen} at\right] - \operatorname{sen}(a\cdot 0)) \\
&= \frac{1}{a}\frac{as}{s^2+a^2} = \frac{s}{s^2+a^2} \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

Vamos enunciar agora um teorema sobre a transformada da integral da funçao f

Teorema 2.11 (Integral de $\boldsymbol{f(x)}$)**.** *Se $F(s)$ é a Transformada de Laplace de $f(x)$ então*

$$\mathcal{L}\left[\int_0^x f(\xi)d\xi\right] = \frac{1}{s}F(s) \tag{2.25}$$

Demonstração: Se g é uma função dada por (2.9), então aplicando (2.21) com g obtemos

$$\mathcal{L}\left[f(x)\right] = \mathcal{L}\left[g'(x)\right] = s\mathcal{L}\left[g(x)\right] - g(0^+) = s\mathcal{L}\left[\int_0^x f(\xi)d\xi\right]$$

e portanto

$$\mathcal{L}\left[\int_0^x f(\xi)d\xi\right] = \frac{1}{s}F(s) \qquad \blacksquare$$

Exemplo 2.6 (Transformada de x^n). A Transformada de Laplace de x^n é dada por $\frac{n!}{s^{n+1}}$. Para encontrar o que queremos, vamos usar indução sobre n, um inteiro positivo. Para $n = 1$, em particular, vamos encontrar a Transformada de Laplace da função identidade. Assim, pelo teorema que acabamos de mostrar,

$$\mathcal{L}\left[x\right] = \mathcal{L}\left[\int_0^x u_0(t)dt\right] = \frac{1}{s}F(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}. \tag{2.26}$$

Suponha a validade do teorema para $n = k - 1$, isto é

$$\mathcal{L}\left[x^{k-1}\right] = \frac{(k-1)!}{s^k}.$$

Assim,

$$\mathcal{L}\left[x^k\right] = k\mathcal{L}\left[\frac{x^k}{k}\right] = k\mathcal{L}\left[\int_0^x \xi^{k-1}d\xi\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left[x^{k-1}\right] = \frac{k!}{s^{k+1}},$$

assim,

$$\mathcal{L}\left[x^n\right] = \frac{n!}{s^{n+1}}, \text{ para } n \text{ inteiro positivo e } s > 0 \tag{2.27}$$

Para finalizar essa seção, vamo enunciar agora um resultado sobre derivada da função transformada F

Teorema 2.12. *Se f(x) admite F(s) como a sua Transformada de Laplace então a função $-xf(x)$ tem como Transformada de Laplace a derivada de $F(s)$, em geral,*

$$\mathcal{L}\left[(-1)^n x^n f(x)\right] = \frac{d^n F(s)}{ds^n}. \tag{2.28}$$

Demonstração: Vamos usar indução sobre n para essa demonstração. Se $n = 1$, pela regra de Leibniz sob o sinal de integração[4],

$$\begin{aligned}
F'(s) &= \frac{d}{ds}\left[\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx\right] \\
&= \int_0^\infty e^{-sx}(-xf(x))dx \\
&= \mathcal{L}\left[-xf(x)\right]
\end{aligned}$$

Vamos supor que o teorema é válido para $n = k$, isto é,

$$\int_0^\infty e^{-sx}(x^k f(x))dx = (-1)^k f^{(k)}(s).$$

Assim, usando a regra de Leibniz mais uma vez segue que

$$\frac{d}{ds}\left[(-1)^k F^{(k)}(s)\right] = (-1)^{k+1} F^{(k+1)}(s),$$

portanto, o teorema vale para todo n inteiro positivo. ∎

Vamos agora apresentar uma tabela onde consta a Transformada de Laplace de algumas funções. Como nosso objetivo maior encontra-se no próximo capítulo, decidimos não estender demais esse capítulo, o que não seria possível se fôssemos resolver todos os exemplos.

Função	**Transformada**
k	k/s
$e^{kx}\operatorname{sen} wx$	$\frac{w}{(s-k)^2+w^2}$, $s > k$
$e^{kx}\cos wx$	$\frac{s-k}{(s-k)^2+w^2}$, $s > k$
$e^{kx}\left[A\cos wx + \frac{Ak+B}{w}\operatorname{sen} wx\right]$	$\frac{As+B}{(s-k)^2+w^2}$, $s > k$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n-1}}$, $s > a$
$\frac{x^{n-1}e^{kx}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s-k)^n}$, $n \geq 1$, $s > k$

Tabela 1: Transformada de Laplace de algumas funções

[4] Veja o Teorema 3, p. 54 de [?]

2.4 O Problema da Inversão

Até agora estávamos interessados em encontrar a Transformada de Laplace de algumas funções mediante as propriedades apresentadas. Na próxima seção iremos discutir o modo como a Transformada de Laplace ajuda na resolução de EDOs, porém, com já foi dito anteriormente, além de saber calcular a Transformada de Laplace é preciso invertê-la para encontrar a solução desejada.

Para encontrar a inversa da Transformada de Laplace , que existe pelo teorema 2.3, podemos fazer uso de tabelas. Essa tabelas contêm diversas funções com suas respectivas Transformadas de Laplace. Vejamos um exemplo de como podemos usá-las

Exemplo 2.7. Encontre a transformada inversa de $G(s) = \dfrac{1}{s^2 - 4s + 5}$

Completando o quadrado no denominador podemos escrever

$$G(s) = \frac{1}{(s-2)^2 + 1} = F(s-2),$$

onde $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$. Essa transformada já figurou nesse trabalho e é precisamente a Transformada de Laplace de $\operatorname{sen} x$, com queremos $\mathcal{L}^{-1}\left[F(s-2)\right]$, pelo teorema 2.7, encontramos $g(x) = e^{2x} \operatorname{sen} x$

O exemplo acima foi bem simples, por outro lado, pode ser bem tedioso recuperar a função só fazendo uso de tabelas, isso ocorre porque muitas vezes é preciso decompor $F(s)$ em frações parciais e na maioria das vezes não conseguimos a redução a formas tabeladas.

A seguir, apresentaremos um método poderoso na recuperação da função original.

2.4.1 Produto de Transformadas e Convolução

Definição 2.2. Sejam f e g duas funções integráveis. Definimos a *convolução de f e g* como a função dada por

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy \tag{2.29}$$

O produto de convolução satisfaz as seguintes propriedades

C1) Comutativa: $f * g = g * f$

C2) Associativa: $f * (g * h) = (f * g) * h$

C3) Distributiva: $f * (g + h) = f * g + f * h$

Teorema 2.13. *Sejam f e g duas funções admissíveis tais que $h = f * g$, então a Transformada de Laplace de h é dada por*

$$H(S) = F(S)G(S), \tag{2.30}$$

onde F e G são as Transformadas de Laplace de f e g, respectivamente

Demonstração: Se $F(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-su} f(u)du$ e $G(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-sv} f(v)dv$, então

$$F(s)G(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} f(u)du \int_0^{\infty} e^{-sv} f(v)dv. \tag{2.31}$$

Como as funções que figuram nos integrandos acima são contínas, podemos escrever

$$F(s)G(s) = \iint_{\mathbb{R}^2_+} e^{-s(u+v)} f(u)g(v)dudv, \tag{2.32}$$

onde $\mathbb{R}^2_+ = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0, v > 0\}$. Façamos agora uma mudança de variáveis $x = u + v$ e $y = u$, quando $u = 0$ tem-se que $x = v$, ou seja, $x > 0$; quando $v = 0$ tem-se que $x = y$ e $y > 0$. Assim, a região $\mathbb{R}^2_+$ é transformada na região B, onde $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$.

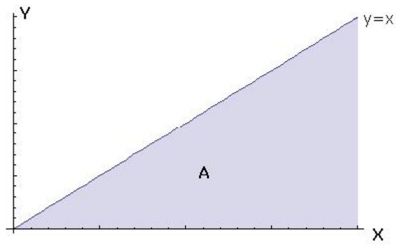

Figura 1: Região B

O determinante jacobiano de mudança de variáveis é dado por

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Assim, podemos escrever (2.32) como,

$$F(s)G(s) = \iint_B e^{-sx} f(y)g(x-y)dxdy. \tag{2.33}$$

A convergência absoluta da Transformada de Laplace, nos permite escrever (2.33) como uma integral iterada sobre B, ou seja,

$$\iint_B e^{-sx} f(y)g(x-y)dxdy = \int_0^\infty e^{-sx}\left[\int_0^x f(y)g(x-y)dy\right]dx. \tag{2.34}$$

Pela hipótese do teorema temos, $h(x) = (f * g)(x)$, daqui e de (2.34) obtemos

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-sx} h(x)dx = H(s) \qquad \blacksquare$$

Exemplo 2.8. Vamos calcular a transformada inversa de $H(s) = \dfrac{a}{s^2(s^2+a^2)}$. Observe que H é o produto de s^{-2} por $a/(s^2+a^2)$ que, de acordo com os exemplos (2.26) e 2.20, são as transformadas das funções x e $\operatorname{sen} ax$, respectivamente. Assim, $h(x) = t * \operatorname{sen} ax$ e pelo teorema 2.13

$$h(x) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \int_0^x (t-a) \operatorname{sen} at dt = \frac{ax - \operatorname{sen} ax}{a^2}$$

Capítulo 3

Aplicações

3.1 Introdução

Muitos problemas práticos de engenharia envolvem sistemas mecânicos sob a ação de funções descontínuas. Os métodos citados no capítulo 1 são, muitas vezes, complicados de se usar em tais problemas. A idéia é usar a teoria desenvolvida nos capítulos anteriores, principalmente no capítulo 2, como uma poderosa ferramenta na resolução desses problemas. Neste capítulo serão apresentadas algumas aplicações da Transformada de Laplace na obtenção de soluções de EDOs, na mecânica, e no estudo do comportamento da derivada da solução de uma EDO. Em todo o capítulo, vamos supor que a variável independente é t, exceto quando for dito o contrário e, por simplicidade, vamos usar algumas vezes Y, em substituição de $Y(s)$, nas equações.

3.2 Solução de Problemas de Valores Iniciais

Nesta seção, mostraremos através de exemplos como a Transformada de Laplace pode ser usada na obtenção da solução de EDOs lineares.

Exemplo 3.1. Considere o problema

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^{2t}, y(0) = -3, y'(0) = 5. \tag{3.1}$$

Aplicando a Transformada de Laplace, obtemos

$$s^2Y + 3s - 5 - 3(sY + 3) + 2Y = \frac{4}{s-2},$$

que simplificando nos dá

$$(s^2 - 3s + 2)Y + 3s - 14 = \frac{4}{s-2},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} Y &= \frac{4}{(s^2-3s+2)(s-2)} + \frac{14-3s}{s^2-3s+2} \\ &= \frac{-3s^2+20s-24}{(s-1)(s-2)^2} \\ &= \frac{-7}{s-1} + \frac{4}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2}. \end{aligned}$$

Usamos frações parciais para obter Y na expressão acima, assim a solução de (3.1) é dada por

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-7}{s-1} + \frac{4}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2}\right] = -7e^t + 4e^{2t} + 4t^e 2t$$

É interessante que o leitor tente resolver essa EDO pelos métodos citados na seção 1.2 para fazer uma comparação.

Exemplo 3.2. Vamos resolver agora o problema

$$y'' + 4y' + 5y = e^{-3t}\cos t,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1. \tag{3.2}$$

Aplicando a Transformada de Laplace, obtemos

$$s^2Y - 2s - 1 + 4sY - 8 + 5Y = \frac{s+3}{(s+3)^2+1},$$

e dái

$$Y = \frac{1}{s^2+4s+5}\left[2s+9+\frac{s+3}{(s+3)^2+1}\right].$$

Se fôssemos usar o método das frações parciais neste exemplo teríamos muito trabalho. Vamos então, usar o teorema 2.13 do capítulo anterior, seção 2.4. Antes, vamos escrever a expressão acima como

$$Y(s) = \frac{2s+9}{(s+2)^2+1} + \frac{1}{(s+2)^2+1}\frac{s+3}{(s+3)^2+1},$$

usando o resultado da tabela 1, linhas 2 e 3, do capítulo anterior obtemos que

$$Y(s) = \mathcal{L}\left[e^{-2t}(2\cos t + 5\,\mathrm{sen}\,t)\right] + \mathcal{L}\left[e^{-2x}\,\mathrm{sen}\,t\right]\mathcal{L}\left[e^{-3t}\cos t\right],$$

portanto

$$y(t) = e^{-2t}(2\cos t + 5\,\mathrm{sen}\,t) + (e^{-2t}\,\mathrm{sen}\,t) * (e^{-3t}\cos t),$$

pela definição de convolução temos que

$$\begin{aligned}(e^{-2t}\,\mathrm{sen}\,t) * (e^{-3t}\cos t) &= \int_0^t e^{-2u}\,\mathrm{sen}\,(u)e^{-3(t-u)}\cos(t-u)du\\ &= e^{-3t}\int_0^t e^{u}\,\mathrm{sen}\,(u)\cos(t-u)du.\end{aligned}$$

Usando o método da integração por partes na integral acima encontramos a solução de (3.2) dada por

$$y(t) = \frac{1}{5}e^{-3x}(\cos x + 9e^x\cos x - 2\,\mathrm{sen}\,x + 28e^x\,\mathrm{sen}\,x)$$

3.2.1 Obtenção de uma solução particular de uma EDO não homogênea

Vamos agora descrever um método para encontrar uma solução particular de uma EDO de segunda ordem não homogênea. Considere o problema de valor inicial

$$ay'' + by' + cy = f(t),\ y'(0) = 0,\ y(0) = 0. \tag{3.3}$$

Aplicando a Transformada de Laplace na equação acima com as condições iniciais, obtemos

$$\mathcal{L}\left[y(t)\right] = \frac{1}{p(s)}\mathcal{L}\left[f(t)\right],$$

onde $p(s) = as^2 + bs + c$. Se g é uma função tal que $\mathcal{L}\left[g(t)\right] = \dfrac{1}{p(s)}$ temos que, $y(t) = g(t) * h(t)$ e dái concluímos que

$$y(t) = \int_0^t f(t-\xi)h(\xi)d\xi \tag{3.4}$$

é a solução particular procurada. A fungão g é chamda de *função de Green* para o problema (3.3).

Exemplo 3.3. Vamos encontrar uma solução particular para o problema

$$y'' + 4y = 3\cos 2t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0. \tag{3.5}$$

Primeiramente, observe que aplicando Transformada de Laplace na equação acima obtemos

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+4}\mathcal{L}\left[3\cos 2t\right].$$

Assim, a Função de Green para esse problema é $g(t-\xi) = 1/2\,\text{sen}(2(t-\xi))$, onde $g(t) = 1/2\,\text{sen}\,2t$ daí

$$y(t) = \int_0^t 1/2\,\text{sen}(2(t-\xi))3\cos(2\xi)d\xi = \frac{3}{2}t\cos t\,\text{sen}\,t$$

3.3 Oscilador Harmônico

Nesta seção, iremos abordar o estudo das oscilações, e o modo como a Transformada de Laplace é útil na análise de movimentos oscilatórios.

Podemos encontrar oscilações em todos os campos da física. Pêndulos e cordas de instrumentos musicais são apenas dois exemplos de sistemas mecânicos vibratórios. Um outro explemplo bem simples é o sistema constituído por uma massa m presa a uma mola. A figura 2 (a) mostra o sistema em equílibrio. Em (b), a mola foi esticada, sofrendo um deslocamento $x_1 > 0$ em relação o nível de equlíbrio $x = 0$.

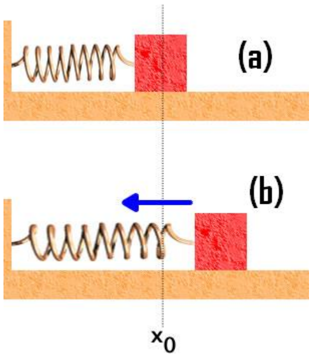

Figura 2: Sistema Massa-Mola

A *Lei de Hooke*[1] diz que "a extenção é proporcional à força", ou seja, $F(x) = -kx$. A constante k e chamada *constante da mola* ou *rigidez* e o sinal negativo da equação anterior indica que a força da mola tem sempre sentido contrário ao deslocamento da extremidade livre. Pela Lei de Hooke e pela 2ª lei de Newton[2] obtemos a seguinte equação do movimento correspondente

$$mx'' = F(x) = -Kx, \tag{3.6}$$

ou seja

$$x'' + \omega^2 x = 0, \tag{3.7}$$

onde

$$x'' = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{e} \quad \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

O sistema dinâmico descrito pela equação (3.7) é chamdo de *oscilador harmônico*, especificamente é a equação do *oscilador harmônico simples*.

Suponha que há, no oscilador, a presença de uma força resistiva proporcional à velocidade, invocando novamente a 2ª lei de Newton temos que $mx'' = -kx - \mu x'$,

[1]Em homenagem a Robert Hooke, um ciêntista inlgês do final do século XVII.

[2]A 2ª Lei de de Newton afirma que a força resultante sobre um corpo é igual ao produto da massa do corpo pela aceleração do corpo

onde μ é uma constante positiva, ou seja,

$$mx'' + \mu x' + kx = 0, \tag{3.8}$$

fazendo $2\alpha = \frac{\mu}{m}$ e $\omega^2 = \frac{k}{m}$ em (3.8) tem-se que:

$$x'' + 2\alpha x' + \omega^2 x = 0, \tag{3.9}$$

essa é a euqção do *oscilador harmônico amortecido*

Ainda há o caso em que a massa está sob a ação de uma força externa $f(t)$ que independe de sua posição e velocidade, mas que pode variar com tempo. Nesse caso, a 2ª lei de Newton nos dá $mx'' = -\mu x' - kx + F(t)$, isto é,

$$mx'' + \mu x' + kx = F(t), \tag{3.10}$$

que é a equação do *oscilador harmônico amortecido e forçado.* Faremos um expemplo envolvendo esse último sistema na próxima seção.

3.3.1 Oscilador Harmônico Simples

No que segue, estudaremos a equação (3.7), cuja solução pode ser obtida resolvendo a equação característica $\lambda^2 + \omega^2 = 0$, daí segue que a solução geral de (3.7) é dada por

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t. \tag{3.11}$$

Suponha que as condições iniciais sejam $x(0) = x_0$ e $x'(0) = v_0$, derivando (3.11) e aplicando as condições iniciais, encontramos

$$\begin{cases} x(0) = c_1 \\ x'(0) = c_2\omega \end{cases}$$

Assim, $c_1 = x_0$ e $c_2 = \dfrac{v_0}{\omega}$ e (3.11) pode ser escrita como

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega t, \tag{3.12}$$

se definirmos as constantes A e ϕ por

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}; \ \cos\phi = \frac{x_0}{A}; \ \operatorname{sen}\phi = \frac{v_0}{A\omega}, \tag{3.13}$$

desde que $0 \leq \phi < 2\pi$, usando (3.13) em (3.12) segue que

$$x(t) = A\cos(\omega t - \phi). \tag{3.14}$$

A equação (3.14) nos conta que estamos tratando de um movimento oscilatório em torno de $x = 0$, que é a posição central, de período $\dfrac{2\pi}{\omega}$ e cuja amplitude do movimento é A. Veja a figura abaixo:

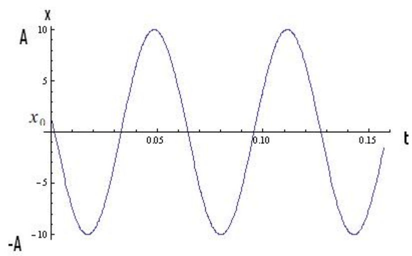

Figura 3: Oscilador Harmônico simples

3.3.2 Oscilador Harmônico Amortecido

Vamos no preocupar agora em estudar a equação (3.9), cuja solução será encontrada mediante o uso da Transformada de Laplace . Usando as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = v_0$, aplicando a Transformada de Laplace em (3.9) encontramos

$$s^2 x_0 s - v_0 + 2\alpha(sX - x_0) + \omega^2 X = 0,$$

isolando X obtemos

$$X(s) = \frac{sx_0 + (v_0 + 2\alpha)}{s^2 + 2as + \omega^2}.$$

A fração acima pode ser decomposta em uma soma de duas outras frações e em seguida, podemos completar o quadrado no denominador e assim obter

$$X(s) = \frac{(s+\alpha)x_0}{(s+\alpha)^2 + \omega^2 - \alpha^2} + \frac{v_0 + \alpha x}{(s+\alpha)^2 + \omega^2 - \alpha^2}.$$

Caso 1, $\boldsymbol{\omega^2 - \alpha^2 > 0}$: Nesse caso,

$$x = \mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] = x_0 e^{-\alpha t}\cos(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}) + \frac{v_0 + \alpha x_0}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}} e^{-\alpha t}\,\mathrm{sen}(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}t), \quad (3.15)$$

simplificando a expressão acima obtemos

$$x(t) = e^{-\alpha t}(x_0 \cos\beta t + \frac{v_0 + \alpha x_0}{\beta}\,\mathrm{sen}\,\beta t), \quad (3.16)$$

onde $\beta = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$. O movimento em questão é chamado de *oscilatório amortecido*, e definindo as constantes A e ϕ como em (3.13) com as devidas adaptações, isto é,

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \alpha x_0}{\beta}\right)^2};\ \cos\phi = \frac{x_0}{A};\ \mathrm{sen}\,\phi = \frac{v_0 + \alpha x_0}{A\beta},$$

obtemos

$$x(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\beta t - \phi). \quad (3.17)$$

O período de oscilação desse movimento é $\frac{2\pi}{\beta}$ e a frequência[3] é $\frac{\beta}{2\pi}$, quando $\alpha = 0$ segue que $\beta = \omega$ e a frequência passa a ser $\frac{\omega}{2\pi}$, conhecida como *frequência natural*. Observe também que $x(t) \to 0$ quando $x \to \infty$, assim, as oscilações decrescem exponencialmente, veja figura 4.

Caso 2, $\boldsymbol{\omega^2 - \alpha^2 = 0}$: Nesse caso,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{x_0}{s+\alpha} + \frac{v_0 + \alpha x_0}{s+\alpha}\right] = x_0 e^{-\alpha t} + (v_0 + \alpha x_0)te^{-\alpha t},$$

ou simplesmente (veja linha 5 da tabela 1),

$$x(t) = e^{-\alpha t}(x_0 + (v_0 + \alpha x_0)t). \quad (3.18)$$

[3]A frequência é o inverso do período

Aqui, a particula não oscila indefinidamente ao redor de zero, ao invés disso, se aproxima de 0 gradualmente, mas nunca o alcança. Para ver isso basta tomar o limite de $x(t)$ quando t tende ao infinito, observe a figura 5. O movimento é chamado *criticamente amortecido*, pois qualquer decréscimo na constante de amortecimento μ (veja (3.8)) produzirá oscilações.

Caso 3, $\omega^2 - \alpha^2 < 0$: Nesse caso,

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+\alpha)x_0}{(s+\alpha)^2-(\alpha^2-\omega^2)} + \frac{v_0+\alpha x_0}{(s+\alpha)^2-(\alpha^2-\omega^2)}\right] \\ &= x_0\cosh\gamma t + \frac{v_0+\alpha x_0}{\gamma}\operatorname{senh}\gamma t, \end{aligned} \tag{3.19}$$

onde $\gamma = \sqrt{\alpha^2-\omega^2}$. Esse caso descreve o chamado movimento *ultra-amortecido*, um movimento não oscilatório, veja figura 5.

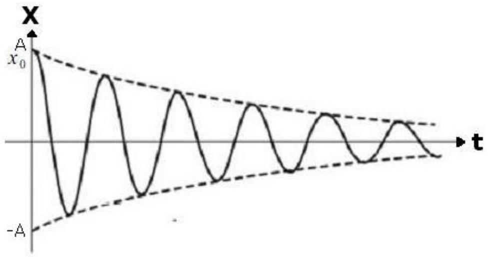

Figura 4: Oscilações amortecidas. A curva pontilhada é dada por $Ae^{-\alpha t}$

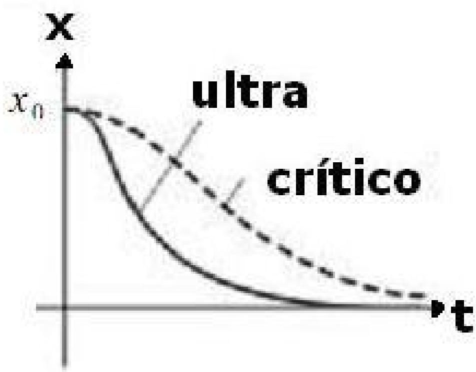

Figura 5: Comparação de amortecimentos

3.4 Funções Descontínuas

É muito comum modelar situações envolvendo análise de circuitos elétricos ou vibrações mecânicas com EDOs de coeficientes constantes e com o termo não homogêneo descontínuo. Esse termo geralmente é chamado de termo forçante. A resolção dessas EDOs envolve o uso de funções com decontinuidades de primeira espécie[4], nesse caso, é conveniente usar a função degrau unitário afim de facilitar os cálculos.

Exemplo 3.4. Considere o problema

$$2y'' + y' + 2y = g(t), \ y(0) = 0, \ y'(0) = 0, \tag{3.20}$$

onde

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 5 \leq t < 20 \\ 0, & 0 \leq t < 5 \text{ e } t \geq 20 \end{cases}. \tag{3.21}$$

Esse problema representa a resposta de um oscilador amortecido forçado, cujo termo forçante é unitário no intervalo de tempo $5 \leq t < 20$ e é zero em $0 \leq t < 5$ e $t \geq 20$. Observe que podemos escrever g como $g(t) = u_5(t) - u_{20}(t)$.

A Transformada de Laplace da equação (3.20) é

$$\begin{aligned} 2s^2Y - 2sy(0) - 2y'(0) + sY - y(0) + 2Y &= \mathcal{L}[u_5(t)] - \mathcal{L}[u_{20}(t)] \\ &= \frac{e^{-5s} - e^{-20s}}{s}. \end{aligned}$$

Usando as condições iniciais e resolvendo para Y, obtemos

$$Y(s) = \frac{e^{-5s} - e^{-20s}}{s(2s^2 + s + 2)}.$$

Observe que $Y(s) = (e^{-5s} - e^{-20s})H(s)$, onde $H(s) = 1/s(2s^2 + s + 2)$. Assim,

$$Y(s) = e^{-5s}H(s) - e^{-20s}H(s).$$

Então, se $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$, pelo teorema 2.6 do capítulo anterior temos, $y(t) = u_5(t)h(t-5) - u_{20}h(t-20)$. Para determinar H, usamos a expansão em frações parciais e encontramos

$$H(s) = \frac{1/2}{s} - \frac{1}{2}\left(\frac{(s+\frac{1}{4}) + \frac{1}{4}}{(s+\frac{1}{4})^2 + \frac{15}{16}}\right),$$

[4] São funções cujos limites laterais no ponto em questão existem, mas são diferentes.

de modo que pela tabela 1, linha 4, do capítulo anterior, obtemos

$$h(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[e^{-t/4}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{4}t\right) + \left(\frac{\sqrt{15}}{15}\right)e^{-t/4}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{4}t\right)\right].$$

A partir de $h(t)$ calcula-se $h(t-2)$ e aí obtem-se a resposta desejada.

O leitor deve ter em mente que, se fôssemos resolver (3.20) por outros métodos que não envolvesse nenhuma transformada integral, teriámos que resolver três equações distinas: para $0 < t < 5$ a equação seria $2y'' + y' + 2y = 0$ com as mesmas condições iniciais do problema; para $t > 5$, $2y'' + y' + 2y = 1$ e as condições iniciais são $y(5) = 0$ e $y'(5) = 0$; finalmente, para $t > 20$ voltaríamos a ter $2y'' + y' + 2y = 0$ e as condições iniciais são encontradas resolvendo o problema de valor inicial para $t > 5$ e depois derivando a solução. Veja a figura abaixo, onde é ilustrado a solução $y(t)$

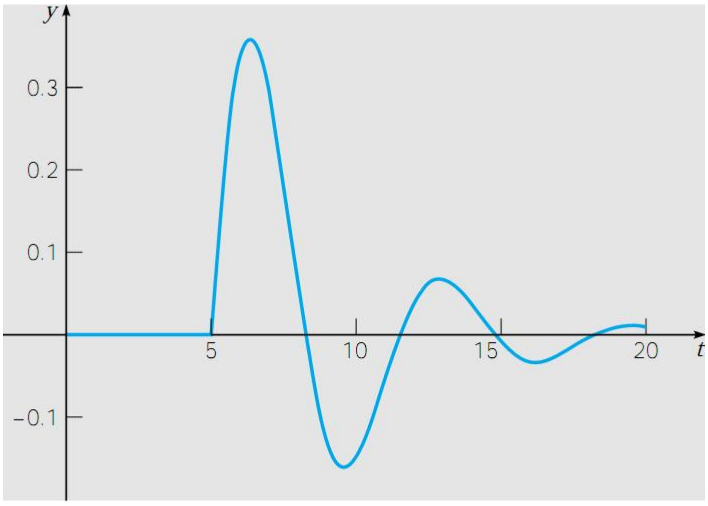

Figura 6: Solução do problema (3.20)

3.5 Comportamento da Derivada

Algumas vezes é interessante estudar o comportamento da derivada de um problema de valor inicial qualquer. Podemos resolver esse problema para encontrar sua solução e depois a derivamos para fazer de fato o estudo em questão. Essa seção, porém, tem o objetivo de mostrar ao leitor que, usando a Transformada de Laplace , podemos obter essa derivada sem a necessidade de calcular a solução do problema.

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'' + ax' + bx = f(t) \\ x(0) = x_0, \; x'(0) = y_0 \end{cases} \tag{3.22}$$

Fazendo $x' = y$ em (3.22), obtemos

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -ay - bx + f(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{3.23}$$

Se $X = \mathcal{L}[x]$ e $Y = \mathcal{L}[y]$, aplicando a Transformada de Laplace nessas duas equações, ficamos com o seguinte sistema linear em X e Y

$$\begin{cases} sX - Y = x_0 \\ bX + (a+s)Y = F(s) + y_0 \end{cases} \tag{3.24}$$

Pela regra de Cramer segue que

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} s & x_0 \\ b & F(s) + y_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & -1 \\ b & (a+s) \end{vmatrix}} = \frac{sF(s) + sy_0 - bx_0}{s^2 + as + b} \tag{3.25}$$

A equação (3.25) pode ser invertida para detremina $y(t) = x'(t)$.