V Bienal da SBM
Sociedade Brasileira de Matemática
UFPB - Universidade Federal da Paraíba
18 a 22 de outubro de 2010

PRINCÍPIO DAS GAVETAS DE DIRICHLET

Enio Romagnome *

Resumo

O presente trabalho é baseado em um dos princípios mais importante da Análise Combinatória, porém, pouco abordado no ensino de Matemática, daí a motivação para a realização deste. A Análise Combinatória, ao contrário do que muitos pensam, não se ocupa apenas na contagem de elementos de conjuntos. É preciso, muitas vezes, determinar a existência ou não de conjuntos satisfazendo a certas propriedades. Peter Gustav Lejeune Dirichlet, matemático alemão, nos dá uma ferramenta simples para resolver alguns desses problemas, é o chamado Princípio das gavetas de Dirichlet, também conhecido como Princípio das casas dos pombos. O princípio diz que se n objetos forem colocados em no máximo $n-1$ gavetas então pelo menos uma delas conterá pelo menos dois objetos. As aplicações desse teorema variam bastante, desde a obviedade como num nascimento de trigêmeos pelo menos dois são do mesmo sexo, até problemas pesados que, até hoje estão sem solução. O intuito do trabalho é apresentar algumas aplicações desse princípio na análise e na teoria dos números bem com na combinatória, mostrando alguns resultados curiosos. Pretendo, com isso, estimular o estudo desse fascinante teorema.

1 O Princípio de Dirichlet

Teorema 1.1. *Se n objetos forem colocados em no máximo, $n-1$ gavetas, então pelo menos uma delas conterá pelo menos dois objetos.*

Demonstração: Se cada gaveta contivesse no máximo um objeto, o número total de objetos seria menor ou igual a n. Absurdo contra hipótese. □

Teorema 1.2. *Se m objetos são colocados n gavetas, então pelo menos um gaveta contem $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor - 1$ objetos.*

Demonstração: Supondo que cada gaveta contenha no máximo, $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor$, então o número de objetos será no máximo $n\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor \leq n\left(\frac{m-1}{n}\right) = m-1 < m$. O que é uma contradição. □

2 Exercícios

1. Em uma gaveta há 6 meias do Fortaleza e 6 meias do Ceará. Quantas meias devemos retirar ao acaso para termos certeza de tirarmos um par de meias da mesma cor?

2. Qual o número mínimo de pessoas que deve haver em um grupo para garantir que nele haja pelo menos 5 pessoas nascidas no mesmo mês?

3. Mostre que em um grupo de 40 pessoas pelo menos 4 delas tem o mesmo signo.

4. 63127 compareceram há uma prova de vestibular composta de 25 questões de múltipla escolha com cinco opções por questão. Considere a afrimação: "Pelo menos dois candidatos responderam de modo idêntico as k primeiras questões das prova". Qual o maior valor de k para o qual podemos garantir a veracidade dessa afirmação?

*Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará , DEMEL, CE, Brasil, eniocost@hotmail.com

5. Mostar que todo inteiro positivo n tem um múltiplo que se escreve na basa 10 somente com os dígitos 0 e 1.
6. Em uma festa existem n pessoas. Mostrar que existem duas pessoas que têm exatamente o mesmo número de conecidos na festa.
7. A reta l está no mesmo plano que o $\triangle ABC$. Se $A, B, C \notin l$, mostre que l não pode intersectar, simultaneamente os três lados do $\triangle ABC$
8. Mostrar que em um conjunto com m elementos $a_1, \ldots, a_m$, tais que $a_i \not\equiv 1(\text{mod } m)$, para $i \in \{1, \ldots, m\}$, existem pelos 2 cuja diferença é divisível por m
9. Seja B um conjunto contendo K elementos relativamente primos com m. Mostrar que, se $k > \phi(m)$, onde ϕ é função de Euler, então B possui pelos menos dois elementos cuja diferença é divisível por m
10. Provar que 11 divide infinitos números da forma $363636_{\ldots}36$.
11. Considere o conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Mostre que existe um subconjunto de A tal que a soma de seus elementos é divível por n
12. No interior de um quadrado de lado l são colocados 5 pontos. Mostre uqe existem pelo menos dois pontos cuja distância é menor ou igual a $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
13. Escolnha dentre os elemnetos do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 200\}$ 101 números ao acaso. Mostre que, entre os números escolhidos, há dois números tais que uma deles divide o outro.
14. Mostrar que toda sequência de $n^2 + 1$ inteiros diferentes possui ums subsequência crescente de $n + 1$ termos ou uma subsequência decrescente de $n + 1$ termos.
15. Em um grupo de 6 pessoas, mostre que existem 3 que se conhecem multuamente ou existe 3 qua são completamente desconhecidas.
16. Mostrar que dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n > 1$, um inteiro, existe um racional $\dfrac{p}{q}$, onde $1 \leq q \leq n$ tal que $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{nq}$.

Referências

[1] CAJORI, Florian. *Uma História da Matemática.* Rio de Janeiro: Ed.:Ciência Moderna, 2007

[2] HARD, G.H. *An Introduction To The Teory Of The Numbers.* 4ª ed. London: Oxford Univerity Press, 1960.

[3] LIMA, Elon Larges *Análise Real*, vol. 1, (10ª Edição), Projeto Euclides, IMPA, 2004

[4] LIMA, Elon Larges *Curso de Análise*, vol. 1, (12ª Edição), Projeto Euclides, IMPA, 2004

[5] MORGADO, Augústo César de Oliveira *Análise Combinatória e Probabilidade*, 9ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006

[6] SANTOS, José Plínio de Oliveira. *Introdução à Teoria dos Números.* Rio de Janeiro: IMPA, 2007.