Teorema Fundamental da Trigonometria

Na ciência nada é sagrado, tudo é real deriva da experiência, da análise e da lógica e a experiência é o criério da verdade.
Prof. Grangeiro.

A relação entre o comprimento da circunferência e o diâmetro determinado por ela é mesma, independente do raio da circunferência. Os povos antigos, mesopotâmicos e gregos perceberam esta relação e calcularam com a aproximação decimal e até centesimal. O grego Arquimedes, usando polígonos regulares inscrito e circunscrito, com até 96 lados mostrou que $3\frac{10}{71} < \frac{C}{D} < 3\frac{10}{70}$. Os povos antigos usaram sempre polígonos regulares inscritos e/ ou circuncrito para encontrar esta relação. Outros matemáticos posteriormente, utilizando polígonos regulares inscritos com o número de lados cada vez maior emcontrou esta relação com aproximação milesimal. Atualmente os matemáticos utilizam séries infinitas para encontrar o valor desta relação com a aproximação que desejar, com milhares e milhares de casas decimais. No século XVIII Euler esta relação por π (pi), pelo fato da circunferência representar a periferia do círculo. Em 1884 mostro que o π é um número transcedental, ou seja não pode ser expresso em termos de números inteiros, das operações fundamentais e das operações de potenciação e radiciação.

O que é muito esquisito é que apesar de todo esse estudo sobre π, nenhuma equação simples foi encontrada para expressá-lo. Outro fato também esquisito é que a Análise Matemática não sabe encontrá-lo, pois não se pode utilizar séries infinitas como meio de eoncontrar o π, pois este já utiliza a relação $\lim_{t\to 0}\frac{\text{sen}t}{t} = 1$, que por sua vez utiliza o valor de π. Fazer isto é cair numa retundância, num círculo vicioso. Alguns escritores de livros de cálculo chamam o limite $\lim_{t\to 0}\frac{\text{sen}t}{t} = 1$ como limite fundamental da trigonometria, desconhecendo que o limite fundamental da trigonometria é o próprio π e que o $\lim_{t\to 0}\frac{\text{sen}t}{t} = 1$ deriva facilmente do limite π. O livro de análise do Professor Elon Lages também não traz nada a respeito do limite π.

Para corrigir esta deficiência da Análise Matemática e para maior compreensão do estudo do círculo e da circunferência pelo alunos do ensino médio é que eu resolvi publicar este trabalho. Demonstrarei o Teorema Fundamental da trigonometria de forma rogorosa, segundo os padrões da análise, e como corolário apresentarei uma série de resultados.

Teorema 0.1 (Teorema Fundamental da Trigonometria) *Dada uma circunferência de raio r, tem-se que a relação entre o comprimento C da circunferência e o seu diâmetro $D = 2r$, independe do raio r e é dada por*

$$\frac{C}{2r} = \lim_{n\to\infty} n \text{ sen}\left(\frac{180°}{n}\right).$$

Demonstração: Inicialmente tomemos um círculo de raio R e um polígono regular inscrito no círculo com n lados.

Calculemos o perímetro do polígono. Temos que $P_n = nl_n$, onde P_n é o perímetro do polígono, n o número de lados do polígono e l_n o comprimento do lado do polígono.

Temos que

$$\frac{l_n}{2} = r \text{ sen}\frac{\theta_n}{2} = r \text{ sen}\left(\frac{180°}{n}\right) \Rightarrow l_n = 2r \text{ sen}\left(\frac{180°}{n}\right),$$

pois $\theta_n = \dfrac{360°}{n}$. Então
$$P_n = 2rn \operatorname{sen}\left(\frac{180°}{n}\right).$$

Observe que a medida que n cresce o P_n também cresce, se aproximando cada vez mais do "comprimento da circunferência". Podemos então naturalmente definir o comprimento da circunferência como sendo o $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ se este limite existir. De fato este limite existe pois P_n é uma sequência crescente e limitada. Isto garante sua convergência. A observação que P_n é crescente e limitada pode ser observada diretamente pela figura, porém demonstrarei algebricamente em seguida.

Sendo assim, temos:
$$C = \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} 2rn \operatorname{sen}\left(\frac{180°}{n}\right) = 2r \lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{180°}{n}\right).$$

Portanto
$$\frac{C}{2r} = \pi = \lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{180°}{n}\right).$$

Observe que π independe de r.

■

Lema 0.2 *A sequência $P_n = 2rn\operatorname{sen}\left(\dfrac{180°}{n}\right)$ é crescente.*

Demonstração: Tomemos $\alpha = \dfrac{180°}{n+1}$ e $\beta = \dfrac{180°}{n}$. Temos então que $\beta = \alpha + \dfrac{1}{n}\alpha$. Tomemos os ângulos $\alpha_1 = \dfrac{1}{n}\alpha$, $\alpha_2 = \dfrac{2}{n}\alpha$, …, $\alpha_k = \dfrac{k}{n}\alpha$, …, $\alpha_n = \dfrac{n}{n}\alpha = \alpha$ e $\alpha_{n+1} = \dfrac{n+1}{n}\alpha = \alpha + \dfrac{1}{n}\alpha = \beta$.

Observe que
$$\operatorname{sen}\alpha_{k+1} - \operatorname{sen}\alpha_k < \operatorname{sen}\alpha_k - \operatorname{sen}\alpha_{k-1}.$$

De fato pois

$$
\begin{aligned}
& \text{sen}\alpha_{k+1} + \text{sen}\alpha_{k-1} = 2\text{sen}\left(\frac{\alpha_{k+1}+\alpha_{k-1}}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha_{k+1}-\alpha_{k-1}}{2}\right) \\
\Rightarrow\ & \text{sen}\alpha_{k+1} + \text{sen}\alpha_{k-1} < 2\text{sen}\alpha_k \\
\Rightarrow\ & \text{sen}\alpha_{k+1} - \text{sen}\alpha_k < \text{sen}\alpha_k - \text{sen}\alpha_{k-1}.
\end{aligned}
$$

Observe também que

$$\text{sen}\alpha_n = (\text{sen}\alpha_n - \text{sen}\alpha_{n-1}) + (\text{sen}\alpha_{n-1} - \text{sen}\alpha_{n-2}) + \ldots + (\text{sen}\alpha_1 - \text{sen}0) + \text{sen}0.$$

Logo

$$\text{sen}\alpha_n > (\text{sen}\alpha_n - \text{sen}\alpha_{n-1}) + (\text{sen}\alpha_n - \text{sen}\alpha_{n-1}) + \ldots + (\text{sen}\alpha_n - \text{sen}\alpha_{n-1}) =$$

$$= n\left(\text{sen}\alpha_n - \text{sen}\alpha_{n-1}\right) > n\left(\text{sen}\alpha_{n+1} - \text{sen}\alpha_n\right).$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
\text{sen}\alpha_n > n\left(\text{sen}\alpha_{n+1} - \text{sen}\alpha_n\right) \ &\Rightarrow\ (n+1)\,\text{sen}\alpha_n > n\,\text{sen}\alpha_{n+1} \\
&\Rightarrow\ (n+1)\,\text{sen}\alpha > n\,\text{sen}\beta \\
&\Rightarrow\ (n+1)\,\text{sen}\left(\frac{180°}{n+1}\right) > n\,\text{sen}\left(\frac{180°}{n}\right).
\end{aligned}
$$

Portanto

$$2r(n+1)\,\text{sen}\left(\frac{180°}{n+1}\right) > 2rn\,\text{sen}\left(\frac{180°}{n}\right).$$

■

Lema 0.3 *A sequência* $P_n = 2rn\,\text{sen}\left(\frac{180°}{n}\right)$ *é limitada.*

Demonstração: Observe que

$$\text{sen}\frac{180°}{n} = 2\,\text{sen}\frac{90°}{n}\cdot\cos\frac{90°}{n} = 4\,\text{sen}\frac{45°}{n}\cos\frac{45°}{n}\cdot\cos\frac{90°}{n} < 4\,\text{sen}\frac{45°}{n},$$

ou seja $\text{sen}\frac{180°}{n} < 4\,\text{sen}\frac{45°}{n}$.

No Lema 0.2 dividimos α em n ângulos congruentes entre si e mostramos que

$$\text{sen}\alpha > n\left(\text{sen}\alpha - \text{sen}\left(\alpha - \frac{1}{n}\alpha\right)\right).$$

Usando este resultado para $\alpha = 45°$ temos

$$\begin{aligned}\text{sen}45° &> n\left[\text{sen}45° - \text{sen}\left(45° - \frac{45°}{n}\right)\right] \\ &= n\text{sen}45° - n\text{sen}45° \cdot \cos\frac{45°}{n} + n\cos 45°\text{sen}\frac{45°}{n}\end{aligned}$$

Portanto

$$P_n = \text{sen}45° > n\ \text{sen}45° - n\ \text{sen}45° + n\cos 45°\ \text{sen}\frac{45°}{n} = n\cos 45°\ \text{sen}\frac{45°}{n}.$$

Então

$$1 > n\ \text{sen}\frac{45°}{n}.$$

Portanto

$$2Rn\ \text{sen}\frac{180°}{n} < 8rn\ \text{sen}\frac{45°}{n} < 8r \quad \text{ou} \quad \frac{P_n}{2r} < 4.$$

■

Corolário 0.1 *O valor de π também pode ser dado pela expressão*

$$\pi = \lim_{k\to\infty} 2^k\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}},$$

com k raízes.

Demonstração: Sendo $\pi = \lim_{n\to\infty} n\ \text{sen}\frac{180°}{n}$, tomemos $n = 2^{k+1}$. Sendo

$\cos\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$, temos

$$\begin{aligned}\cos\frac{180^\circ}{2^{k+1}} &= \sqrt{\frac{1+\cos\left(\dfrac{180^\circ}{2^k}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{\dfrac{1+\cos\left(\dfrac{180^\circ}{2^{k-1}}\right)}{2}}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{\dfrac{1+\cos 45^\circ}{2}}}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}\end{aligned}$$

com k raízes quadradas.

Temos que

$$\operatorname{sen}\frac{180^\circ}{2^{k+1}} = \sqrt{1-\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}.$$

Portanto

$$\pi = \lim_{k\to\infty} 2^k\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}},$$

com k raízes.

■

Corolário 0.2 *A área de um círculo de raio r é dada por $A = \pi r^2$.*

Demonstração: Tomemos um polígono regular inscrito de n lados no círculo de raio r e calculemos sua área.

Dividindo o polígono em n triângulos iguais temos $A = nA_\Delta$ onde $A_\Delta = H_n l_n$. Então $A = H_n \cdot n l_n = H_n \dfrac{P_n}{2}$.

Definindo a área do círculo como $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ se este limite existir temos

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} H_n \frac{P_n}{2}.$$

Observe que $\lim\limits_{n\to\infty} H_n = r$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_n}{2} = \dfrac{2\pi r}{2} = \pi r$.

Portanto $A = \lim\limits_{n\to\infty} H_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_n}{2} = r\cdot \pi r = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi r^2$.

$\blacksquare$

Definamos uma nova unidade de medida, o radiano, tal que

$$2\pi\text{radianos} \equiv 2\pi\text{rad} \equiv 360^\circ.$$

Portanto $\pi\text{rad} = 180^\circ$. Esta nova unidade de medida é mais conveniente para o estudo da análise que o grau. Para encontrar o comprimento de um arco da circunferência com o ângulo α em radianos basta multiplicar α por r. Isto surgge do fato de o comprimento do arco ser proporcional ao ângulo.

Corolário 0.3 *Sendo t medido em radiano tem-se* $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\text{sen}t}{t} = 1$.

Demonstração: Se $0 < t < 1$ então $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$0 < \frac{\pi}{n+1} < t < \frac{\pi}{n} \Rightarrow 0 < \text{sen}\left(\frac{\pi}{n+1}\right) < \text{sen}t < \text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

e

$$\frac{n+1}{\pi} > \frac{1}{t} > \frac{n}{\pi} \Rightarrow \frac{n}{\pi} < \frac{1}{t} < \frac{n+1}{\pi}.$$

Logo

$$\frac{n}{\pi}\text{sen}\left(\frac{\pi}{n+1}\right) < \frac{\text{sen}t}{t} < \frac{n+1}{\pi}\text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Sendo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\pi}\text{sen}\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}(n+1)\text{sen}\frac{\pi}{n+1} = \frac{1}{\pi}\cdot 1\cdot\pi = 1$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\pi}\text{sen}\frac{\pi}{n} = \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}n\text{sen}\frac{\pi}{n} = \frac{1}{\pi}\cdot 1\cdot\pi = 1,$$

pois

$$\lim_{n\to\infty} n\text{sen}\frac{\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} n\text{sen}\frac{180^\circ}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1.$$

Então pelo teorema do confronto temos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\text{sen}t}{t} = 1.$$

Mas $n \to \infty \Rightarrow t \to 0^+$. Logo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1.$$

Se $t \leq 0$ tomemos $u = -t$. Então

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = \lim_{u\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(-u)}{-u} = \lim_{u\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen} u}{-u} = \lim_{u\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1.$$

Portanto pelo teorema dos limites laterais temos

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1.$$

$\blacksquare$