**UFPB – CCEN – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**
**CÁLCULO DIFERENCIAL I**
**5ª LISTA DE EXERCÍCIOS – PERÍODO 2012.1**

**1.** Nos exercícios **1a)** $\to$ **1e)**, encontre a derivada da função dada, usando a definição.

**1a)** $f(x) = x^2 + 1$. **1b)** $f(x) = 2x^3$. **1c)** $f(x) = x^2 - 5$. **1d)** $f(x) = 2x^2 - 3x$.

**1e)** $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

**2.** Considere $f$ definida por $f(x) = \begin{cases} -x, & para\ x \le 0 \\ 2, & para\ x > 0 \end{cases}$.

**a)** Calcule $f'(-1)$ **b)** Existem $f'_-(0)$ e $f'_+(0)$? **c)** $f$ é derivável em $x = 0$?

**3.** Seja $f$ a função dada por $f(x) = |x| + x$.

**a)** Existe $f'(0)$? **b)** Existe $f'(x)$ para $x \neq 0$? **c)** Como se define a função $f'$?

**4.** Nos exercícios **4a)** $\to$ **4c)**, investigue a derivabilidade da função dada no ponto indicado.

**4a)** $f(x) = \begin{cases} x^2, & para\ x \le 0 \\ x, & para\ x > 0 \end{cases}$ ; $x = 0$. **4b)** $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & para\ 0 < x < 1 \\ 2x - 1, & para\ 1 \le x < 2 \end{cases}$ ; $x = 1$.

**4c)** $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & para\ 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{2}(x+1), & para\ 1 \le x < 2 \end{cases}$ ; $x = 1$.

**5.** Existe algum ponto no qual a função $y = |x^2 - 4x|$ não é derivável?

**6.** Suponha que uma função $f$ seja derivável em $x = 1$ e que $\lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{f(1+h)}{h} = 5$.

Quanto valem $f(1)$ e $f'(1)$?

**7.** Suponha que $f$ seja uma função derivável em $\mathbb{R}$, satisfazendo $f(a+b) = f(a) + f(b) + 5ab$, $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$. Se $\lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{f(h)}{h} = 3$, determine $f(0)$ e $f'(x)$.

**8.** Encontre o valor de $a$ e o de $b$, de modo que a função $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & se\ x \le 1 \\ ax + b, & se\ x > 1 \end{cases}$ seja derivável em $x = 1$.

**9.** Nos exercícios **9a)** $\to$ **9c)**, determine as equações das retas tangente e normal ao gráfico de $f$, no ponto cuja abscissa é fornecida.

**9a)** $f(x) = x^{2/3}$, $x = 8$. **9b)** $f(x) = x^{-3/4}$, $x = 16$. **9c)** $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 3$.

**10.** Qual é a equação da reta tangente à parábola $y = x^2$, com inclinação $m = -8$?
Faça um gráfico.

**11.** Qual é a equação da reta normal à curva $y = \dfrac{-x^3}{6}$, com inclinação $m = \dfrac{8}{9}$?

**12.** Se $y$ é a função dada por $y = \begin{cases} \sqrt{x-2}\,, & para\ x \geq 2 \\ -\sqrt{2-x}\,, & para\ x \leq 2 \end{cases}$, encontre as equações das retas tangente e normal ao gráfico de $y$, no ponto de abscissa $x = 2$.

**13.** Determine a equação da reta que tangencia o gráfico da função $y = x^2$ e é paralela à reta $y = 4x + 2$.

**14.** Verifique que a reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, no ponto de abscissa $a$, intercepta o eixo $X$ no ponto $(2a, 0)$.

**15.** Determine as equações das retas horizontais que são tangentes ao gráfico da função $g(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x - 1$.

**16.** Considere a função $f$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2\,, & para\ x \leq 1 \\ 2, & para\ x > 1 \end{cases}$.

**a)** Esboce o gráfico de $f$. **b)** $f$ é contínua em $x = 1$? **c)** $f$ é derivável em $x = 1$?

**17.** Repita o exercício anterior, considerando agora a função $f$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} x^2\,, & para\ x \leq 1 \\ 1, & para\ x > 1 \end{cases}.$$

**18.** Considere a função $f(x) = x\,|x|$, definida para todo $x$ em $\mathbb{R}$.

**a)** Existe $f'(0)$? **b)** Determine $f'(x)$ para $x < 0$ e para $x > 0$.

**c)** Esboce o gráfico de $f$ e o de $f'$.

**19.** Se $y = x^2 - \sqrt{1 + u^2}$ e $u = \dfrac{x+1}{x-1}$, calcule $\dfrac{dy}{dx}$.

**20.** Se $y = \dfrac{x+1}{x-1}$, verifique que $(1-x)\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2\dfrac{dy}{dx}$.

**21.** Suponha que $x = x(t)$ seja uma função derivável em $\mathbb{R}$. Se $y = \dfrac{1}{x^2+1}$, verifique que, $\forall t \in \mathbb{R}$, tem-se $\dfrac{dy}{dt} = -2xy^2\dfrac{dx}{dt}$.

**22.** Suponha que $x = x(t)$ seja uma função derivável até a segunda ordem. Se $y = x^3$, verifique que $\dfrac{d^2y}{dt^2} = 6x\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + 3x^2\dfrac{d^2x}{dt^2}$.

**23.** Sabendo-se que $g(-1) = 2$, $f(2) = -3$, $g'(-1) = -\dfrac{1}{3}$ e $f'(2) = 6$, determine as equações das retas tangente e normal à curva $h(x) = f(g(x))$, em $x = -1$.

**24.** Se $h(x) = [f(x)]^3 + f(x^3)$, calcule $h'(2)$, sabendo que $f(2) = 1$, $f'(2) = 7$ e que $f'(8) = -3$.

**25.** Use a Regra da Cadeia para mostrar que a derivada de uma função par é uma função ímpar e que a derivada de uma função ímpar é uma função par.

**26.** Calcule a derivada de primeira ordem de cada uma das funções abaixo.

**26a)** $y = \frac{\pi}{x} + ln\,2$

**26b)** $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0{,}5x^4$

**26c)** $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$

**26d)** $y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

**26e)** $y = x\,arcsen\,x$

**26f)** $y = \frac{\left(x^2+1\right)arctgx - x}{2}$

**26g)** $y = e^x \cos x$

**26h)** $y = \frac{1}{x} + 2ln\,x - \frac{ln\,x}{x}$

**26i)** $y = \left(3 - 2sen\,x\right)^5$

**26j)** $y = 2x + 5\cos^3 x$

**26k)** $y = \sqrt{\frac{3sen\,x - 2\cos x}{5}}$

**26l)** $y = \sqrt{xe^x + x}$

**26m)** $y = arccos\left(e^x\right)$

**26n)** $y = sen(3x) + \cos\left(\frac{x}{5}\right) + tg\left(\sqrt{x}\right)$

**26o)** $y = \frac{1+\cos(2x)}{1-\cos(2x)}$

**26p)** $y = arctg\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

**26q)** $y = ln(sen\,x)$

**26r)** $y = ln^2 x - ln\,(ln\,x)$

**27.** Verifique que a função $y = xe^{-x}$ é solução da equação $xy' = (1-x)y$.

**28.** Verifique que a função $y = \frac{1}{1+x+ln\,x}$ é solução da equação $xy' = y\left(y\,ln\,x - 1\right)$.

**29.** Se $a$ e $b$ são constantes quaisquer, verifique que a função $y = ae^{-x} + be^{-2x}$ é solução da equação $y'' + 3y' + 2y = 0$.

**30.** Se $n$ é um número natural, qual é a derivada de ordem $n$ da função $y = \left(ax+b\right)^n$?

**31.** Nos exercícios **31a)** $\rightarrow$ **31f)**, encontre $\frac{dy}{dx}$ em cada uma das equações que, implicitamente, definem $y$ como função de $x$.

**31a)** $y^3 = x + y$

**31b)** $\sqrt{x+y} = \sqrt{y} + 1$

**31c)** $\frac{y}{x-y} + \frac{x}{y} = \sqrt{x}$

**31d)** $4\cos x\,sen\,y = 1$

**31e)** $xy = cotg\,(xy)$

**31f)** $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$

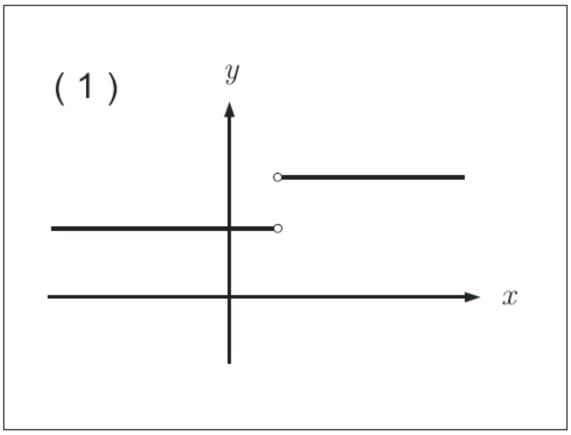
**32.** Determine as equações das retas tangente e normal à circunferência $x^2 + y^2 = 25$, no ponto $P_0 = (3,4)$.

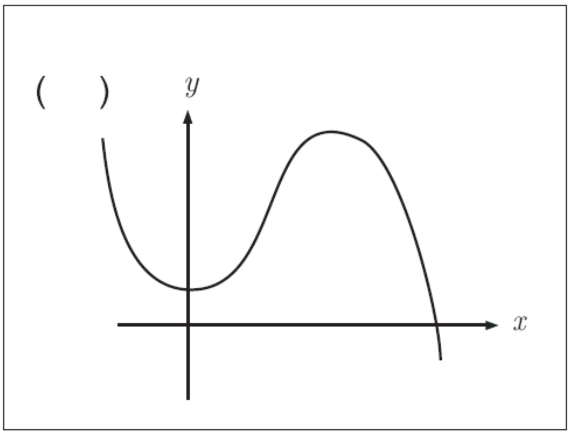
**33.** Mesma questão anterior, considerando agora a hipérbole $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ e $P_0 = \left(-5, \frac{9}{4}\right)$.

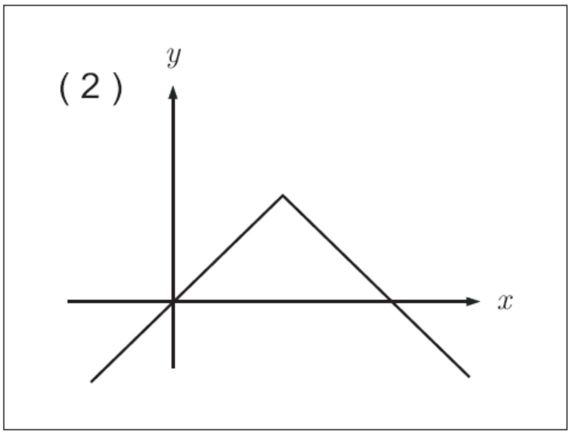
**34.** Suponha que $f$ seja uma função derivável em seu domínio $D$ e que, para todo $x$ em $D$, satisfaça $x f(x) + sen\left[f(x)\right] = 4$.

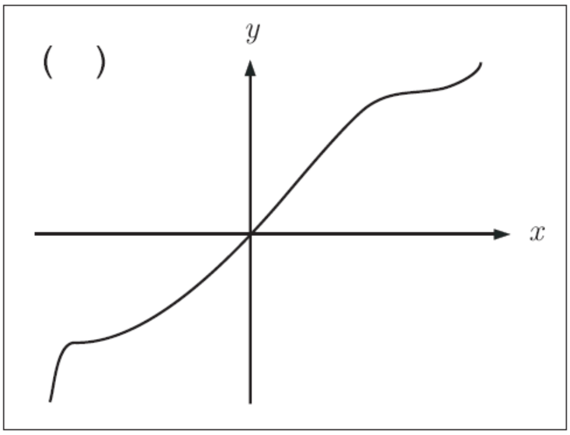
Se $x + \cos\left[f(x)\right] \neq 0$, mostre que $f'(x) = \frac{-f(x)}{x + \cos\left[f(x)\right]}$.

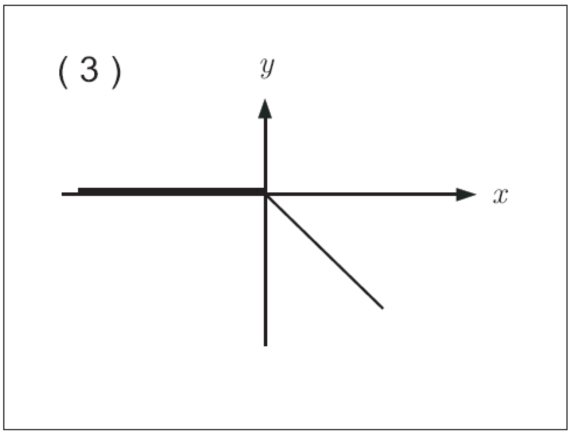
**35.** Os gráficos da coluna da esquerda são das derivadas das funções cujos gráficos estão na coluna da direita. Faça correspondência, numerando, convenientemente, a coluna da direita.

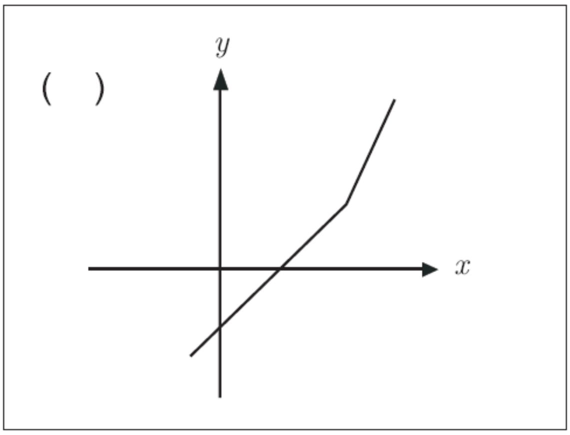


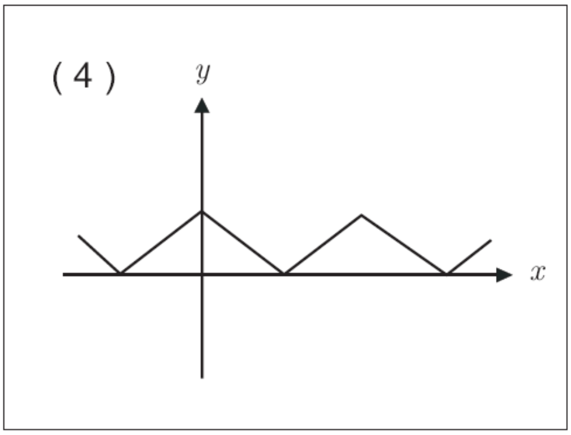



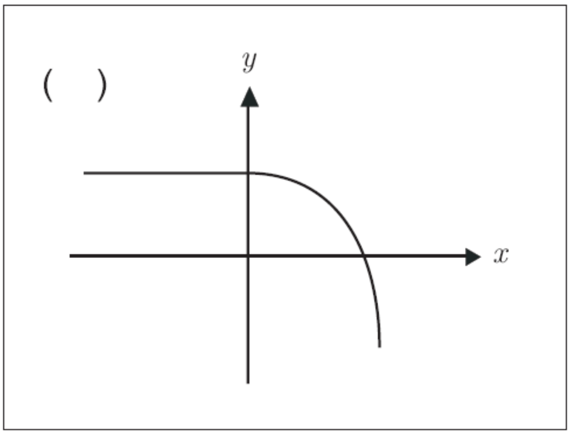



**36.** Para cada uma das funções $f$ definidas abaixo, comprove a existência da função inversa $g$, determine o domínio desta última e uma expressão que a defina explicitamente. Esboce, ainda, o gráfico de $f$ e o de $g$.

**36a)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}, x \geq 0$ **36b)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}, x \leq 0$ **36c)** $f(x) = x^2 - 4,\ x \leq 0$

**36d)** $f(x) = x^2 - 4,\ x \geq 0$ **36e)** $f(x) = -\sqrt{1-x},\ x \leq 1$ **36f)** $f(x) = \dfrac{x}{x+1},\ x > -1$

**37.** Por meio de restrições adequadas, faça com que cada uma das funções dadas abaixo gere duas funções invertíveis $f_1$ e $f_2$, determinando, em seguida, as respectivas inversas $g_1$ e $g_2$. Calcule as derivadas dessas inversas e esboce os gráficos das funções $f_i$ e $g_i$, $i = 1, 2$, em cada caso.

**a)** $y = x^2 - 2x - 3$ **b)** $y = -x^2 + x + 2$ **c)** $y = \sqrt{1 - x^2}$ **d)** $y = -\sqrt{4 - x^2}$

**38.** Verifique que a função $y = f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, definida para todo $x$ real, tem como inversa a função $x = g(y) = \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$, definida para $|y| < 1$.

**39.** Qual é a inversa da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$? E da função $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$? Especifique os domínios e as imagens, esboçando, também, os gráficos.

**40.** Considere a função $y = f(x) = x^2 - x - 2$, definida para $x \geq 1/2$, e seja $x = g(y)$ sua inversa.

**a)** Qual o domínio e qual a imagem de $g$?

**b)** Sabendo-se que $g(-2) = 1$, calcule $g'(-2)$.

**41.** Considere as funções $f(x) = arctgx + arctg\left(\dfrac{1}{x}\right)$ e $g(x) = arcsen\,x + arccos\,x$, definidas, respectivamente, para $x > 0$ e para $x \in [-1,1]$.

**a)** Mostre que $f'(x) = 0, \forall x > 0$, e que $g'(x) = 0, \forall x \in (-1,1)$.

**b)** Lembrando que as funções constantes são as que possuem derivada nula, mostre que $f(x) = \dfrac{\pi}{2}, \forall x > 0$, e que $g(x) = \dfrac{\pi}{2}, \forall x \in [-1,1]$.

**42.** Se $f$ é uma função derivável, tal que $f(2) = 1$ e $f'(2) = 1/2$, determine a equação da reta tangente à curva $y = arctg\big(f(x)\big)$, no ponto de abscissa $x = 2$.

**43.** Sabendo-se que no ponto $(0,1)$ o gráfico da função $f(x) = e^{x^2 + 2x}$ possui a mesma reta tangente que o de uma certa função $g$, determine $g'(0)$.

**44.** Se $f$ é uma função derivável, tal que $f'(x) = 2xf(x)$, mostre que a função $g$ dada por $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^{x^2}}$ é constante.

**45.** Para cada uma das funções definidas abaixo, determine o domínio e calcule a derivada de primeira ordem.

**45a)** $f(x) = ln\left(\sqrt{5 - x^2}\right)$ **45b)** $f(x) = ln(sen\,x)$ **45c)** $f(x) = x\,ln\,x - x$

**45d)** $f(x) = ln\,|x|$ **45e)** $f(x) = \dfrac{1}{ln\,x}$ **45f)** $f(x) = ln(ln\,x)$

**45g)** $f(x) = ln\left(\sqrt{\dfrac{2 - x}{3 - x}}\right)$ **45h)** $f(x) = ln(cos(3x + 5))$ **45i)** $f(x) = sen(ln(2x + 3))$

**46.** Considere a função $f(x) = ln\left(x^2 + 1\right)$.

**a)** Qual é o domínio de $f$?

**b)** Qual é a equação da reta tangente ao gráfico de $f$, no ponto de abscissa $-1$? E no ponto de abscissa $0$?

**47.** O *logaritmo* de um número $N > 0$, numa base $0 < b \neq 1$, é definido por meio da equivalência

$$log_b N = a \iff b^a = N.$$

**a)** Prove a propriedade de Mudança de Base: $log_b N = \dfrac{ln\,N}{ln\,b}$.

**b)** Se $f$ é a função definida por $f(x) = log_b x$, para $x > 0$, mostre que $f'(x) = \dfrac{1}{x\,ln\,b}$.

**48.** Calcule a derivada de primeira ordem de cada uma das funções abaixo.

**48a)** $f(x) = e^{sen\,x}$ **48b)** $f(x) = e^{x^2}$ **48c)** $f(x) = \left(e^x\right)^2$

**48d)** $f(x) = 3^{-x}$ **48e)** $f(x) = x^x$ **48f)** $f(x) = x^{(x^x)}$

**48g)** $f(x) = (x^x)^x$ **48h)** $f(x) = x^2 3^{x\,sen\,x}$ **48i)** $f(x) = 2^{x^x}$

**49.** As funções trigonométricas hiperbólicas – *seno hiperbólico*, *cosseno hiperbólico*, *tangente hiperbólica* e *cotangente hiperbólica* – denotadas, respectivamente, por *senh*, *cosh*, *tgh* e *cotgh*, são definidas pelas expressões abaixo:

$$senhx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad coshx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad tghx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad cotghx = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Com base nessas definições, mostre que:

**a)** $(cosh\,x)^2 - (senh\,x)^2 = 1$ **b)** $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{senh\,x}{x} = 1$ **c)** $(senh\,x)' = cosh\,x$

**d)** $(cosh\,x)' = senh\,x$ **e)** $(tghx)' = 1/(cosh\,x)^2$ **f)** $(cotghx)' = -1/(senh\,x)^2$

**50.** Para cada uma das funções dadas abaixo, calcule o limite quando $x \mapsto 0$.

**a)** $f(x) = \dfrac{sen\,2x}{2}$ **b)** $f(x) = \dfrac{sen\,x}{3x}$ **c)** $f(x) = \dfrac{tgx}{sen\,x}$

**d)** $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{1 + \operatorname{sen} x}$ **e)** $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}$ **f)** $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(2x^2)}{3x}$

**g)** $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^3)}{x^3}$ **h)** $f(x) = \dfrac{x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(2x^2)}$ **i)** $f(x) = \dfrac{(\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} 2x)}{x \operatorname{sen} 3x}$

**51.** Uma partícula se move de modo que, no instante $t$, a distância percorrida é dada por $s(t) = \dfrac{t^3}{3} - t^2 - 3t$.

**a)** Encontre as expressões que fornecem a velocidade e a aceleração da partícula.

**b)** Em que instante a velocidade é zero?

**c)** Em que instante a aceleração é zero?

**52.** Uma partícula move-se sobre a parábola $y = x^2$. Sabendo-se que suas coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ são funções deriváveis, em que ponto da parábola elas deslocam-se à mesma taxa?

**53.** Um ponto move-se ao longo da curva $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$, de tal modo que sua abscissa $x$ varia a uma velocidade constante de 3cm/s. Qual será a velocidade da ordenada $y$, quando $x = 2\,\text{cm}$?

**54.** Um ponto move-se sobre a parábola $y = 3x^2 - 2x$. Supondo-se que suas coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ são funções deriváveis e que $x'(t) \neq 0$, em que ponto da parábola a velocidade da ordenada $y$ será o triplo da velocidade da abscissa $x$?

**55.** Um cubo se expande de modo que sua aresta varia à razão de 12,5 cm/s. Encontre a taxa de variação de seu volume, no instante em que a aresta atinge 10cm de comprimento.

**56.** Uma esfera aumenta de modo que seu raio cresce à razão de 2,5 cm/s. Quão rapidamente varia seu volume no instante em que o raio mede 7,5cm?

( *Obs.: O volume de uma esfera de raio* $r$ *é dado por* $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ )

**57.** Sejam $x$ e $y$ os catetos de um triângulo retângulo e $\theta$ o ângulo oposto a $y$. Supondo-se que $x = 12$ e que $\theta$ decresce à razão de 1/30 rad/s, calcule $y'(t)$ quando $\theta = \pi/3$.

**58.** Uma escada de 8m está encostada em uma parede vertical. Se a extremidade inferior da escada for afastada do pé da parede a uma velocidade constante de 2m/s, com que velocidade a extremidade superior estará descendo no instante em que a inferior estiver a 3m da parede?

**59.** Uma viga medindo 30m de comprimento está apoiada numa parede e o seu topo está se deslocando a uma velocidade de 0,5m/s. Qual será a taxa de variação da medida do ângulo formado pela viga e pelo chão, quando o topo da viga estiver a uma altura de 18m?

**60.** A Lei de Boyle para a dilatação dos gases é dada pela equação $PV = C$, onde $P$ é a pressão, medida em Newtons por unidade de área, $V$ é o volume e $C$ é uma constante. Num certo instante, a pressão é de $3.000\, N/m^2$, o volume é de $5\, m^3$ e está crescendo à taxa de $2\, m^3/\text{min}$. Qual é a taxa de variação da pressão nesse instante?