UFPB - CCEN - Departamento de Matemática - 2011.2

Introdução à Álgebra Linear

Lista 1

(1) Em $V = \mathbb{R}^3$, considere o subconjunto $W = \{ \ (x, y, z) \in V \mid x \leq y \leq z \ \}$. Pode-se afirmar que W é um subespaço vetorial? Justifique.

(2) Em $V = M(2, 2)$, considere o subconjunto $U = \{ \ A \in V \mid \det(A) = 0 \ \}$, onde "det" significa determinante. Pode-se afirmar que U é um subespaço vetorial? Justifique.

(3) Em $V = \mathcal{P}_3$, considere o subconjunto $S = \{ \ 2 + ax - bx^3 \in V \mid a, b \in \mathbb{R} \ \}$. Pode-se afirmar que S é um subespaço vetorial? Justifique.

(4) Considere o intervalo fechado $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ e o espaço vetorial $V = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Defina $T = \{ \ f \in V \mid f(1) = 0 \ \}$. Pode-se afirmar que T é um subespaço vetorial? Justifique.

(5) Seja $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e defina $Q = \{ \ f \in V \mid f(x) = f(x + 1), \ \forall x \in \mathbb{R} \ \}$. Pode-se afirmar que Q é um subsepaço vetorial? Justifique.

(6) Determine uma base para o seguinte subespaço vetorial de $V = \mathcal{P}_5$:

$$W = \{ \ a - d + x(b + ax - cx^2) - x^3(b - dx) + cx^5 \ \in \ V \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \ \}$$

(7) Considere os subespaços vetoriais W, U de $V = M(3, 3)$ dados por:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ w & 0 & 0 \\ t & 0 & r \end{pmatrix} \in V \ \middle| \ x = 2y - z, \ \ t = w + r \right\}$$

e $U = [A, B, C]$, onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenha bases para W, $W + U$ e $W \cap U$. Pode-se afirmar que $W + U = V$? Justifique.

(8) Considere o subespaço vetorial

$$W \ = \ \{ \ (2x + z - w, \ z + y - x, \ 0, \ y - 3x, \ 0, \ x - w) \in \mathbb{R}^6 \mid x, y, z, w \in \mathbb{R} \ \}$$

(a) Determine explicitamente uma base para W.

(b) Se $U \subset \mathbb{R}^6$ é qualquer subespaço vetorial satisfazendo $U + W = \mathbb{R}^6$ e $U \cap W = [v]$ (para algum vetor não-nulo $v \in \mathbb{R}^6$), calcule $\dim(U)$.

(c) Considere o subespaço vetorial

$$T = [\,(0,0,1,0,0,0),\ (0,0,0,0,1,0),\ (2,-3,1,2,2,1)\,] \subset \mathbb{R}^6$$

Pode-se afirmar que $W \oplus T = \mathbb{R}^6$? Justifique.

(9) Verifique se cada subconjunto abaixo é LI ou LD.

(a) $\{\,(1,0,-1,2),\ (0,1,1,1),\ (-1,2,3,0)\,\} \subset \mathbb{R}^4$.

(b) $\{\,2-x+x^4,\ x^2-2x^4,\ 1+2x-x^3-x^4\,\} \subset \mathcal{P}_4$.

(c) $\{\,\mathrm{e}^{2x},\ \mathrm{sen}(2x),\ \cos(x)\,\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(10) Em $V = \mathbb{R}^4$, considere o hiperplano

$$H = \{\,(x,y,z,w) \in V \mid 3x + z - 2w = 0\,\}$$

(a) Exiba uma base para H e determine $\dim(H)$.

(b) Considere o subespaço $U = [(3,0,1,-2)] \subset V$. Pode-se afirmar que $V = H \oplus U$? Justifique.

(11) Seja $V = \mathcal{P}_3$. Considere os subespaços vetoriais $W = \{\ a + x(b+ax) + bx^3 \in V \mid a,b \in \mathbb{R}\ \}$ e $U = \{\ 2c + dx(1-x^2) \in V \mid c,d \in \mathbb{R}\ \}$. Pode-se afirmar que $W \oplus U = V$? Justifique.

(12) Uma matriz (a_{ij}) é dita *triangular superior* se $a_{ij} = 0$ sempre que $i > j$. Em $V = \mathrm{M}(3,3)$, considere os subespaços vetoriais $T = \{\text{matrizes triangulares superiores}\} \subset V$ e $\mathcal{A} = \{\text{matrizes anti-simétricas}\} \subset V$. Considere também o subespaço

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2+x_3 & x_4+x_5 \\ -x_3 & x_6 & x_7+x_8 \\ -x_5 & -x_8 & x_9 \end{pmatrix} \in V \ \middle|\ x_1,\ldots,x_9 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pode-se afirmar que $W = T \oplus \mathcal{A}$? Justifique.

(13) Seja $V \neq \{0_V\}$ um espaço vetorial (de dimensão finita) e seja $W \subset V$ um subespaço vetorial. Prove que existe um subespaço vetorial $U \subset V$ tal que $V = W \oplus U$.

(14) Seja $V = \mathrm{M}(5,5)$. Calcule a dimensão dos subespaços vetoriais $\mathcal{S} = \{\text{matrizes simétricas}\} \subset V$ e $\mathcal{A} = \{\text{matrizes anti-simétricas}\} \subset V$.

(15) Dado um número natural n arbitrário, pergunta-se: existe base de $\mathcal{P}_n$ formada por $n+1$ polinômios de grau n? Justifique.