

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Análise Funcional

Professor: Alexandre de Bustamante Simas

E-mail: alexandre@mat.ufpb.br / Home page: <http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/>

Lista 4

Exercícios

1. Mostre que todo espaço vetorial admite uma norma.
2. Seja $Y \subset X$ um subespaço do espaço normado X . Mostre que

$$\max_{\substack{f \in X^*, \|f\| \leq 1 \\ f|_Y = 0}} |f(x)| = \inf_{y \in Y} |x - y|.$$

3. Seja $x \in X$ tal que para todo f pertencente a um conjunto denso em X^* temos $f(x) = 0$. Mostre que $x = 0$.
4. Seja $T \in B(X, Y)$, mostre que

$$T = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \sup_{\substack{f \in Y^* \\ \|f\|=1}} |f(Tx)|.$$

5. Mostre que $p : \ell^\infty(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $p(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ é um funcional sublinear.
6. Use o item anterior para mostrar que existe um funcional linear f em $(\ell^\infty(\mathbb{N}))^*$ tal que para todo $x \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ $f(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$, e se o limite existe, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
7. Seja M subespaço de X . O anulador de M é definido por

$$X^0 = \{f \in X^*; \forall x \in M, f(x) = 0\}.$$

O anulador de um subespaço $N \subset X^*$ é definido por

$$N^\dagger = \{x \in X; \forall f \in N, f(x) = 0\}.$$

- a) Mostre que M^0 e $N^\dagger$ são subespaços fechados de X^* e X , resp.;
- b) Mostre que $\widehat{N^\dagger} = \hat{X} \cap N^0$;
- c) Mostre que $M \subset (M^0)^\dagger$ e, se M for fechado, então $M = (M^0)^\dagger$;
- d) Mostre que $N \subset (N^\dagger)^0$ e, se X for reflexivo e N for fechado, então $(N^\dagger)^0 = N$;
- e) Mostre que se M é fechado, $(X/M)^* = Y^0$ (a igualdade no sentido de isomorfismo isométrico, e X/M sendo o espaço quociente);
- f) Mostre que se M é fechado, $Y^* = X^*/Y^0$.

8. Seja E subconjunto de X , mostre que

$$\overline{\text{span}(E)} = \bigcap \{ \text{Ker}(f); f \in X^*, \text{Ker}(f) \supset E \}.$$

9. Mostre que um espaço de Banach é reflexivo se, e somente se, seu dual é reflexivo.

10. Se X é reflexivo, mostre que para todo $f \in X^*$, existe $x \in X$, com $\|x\| = 1$, tal que $f(x) = \|f\|$.

11. Seja $f : c_0 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x(j)/j!$. Mostre que $f \in c_0^*$, $\|f\| = \sum_{j=1}^{\infty} x(j)/j!$, mas não existe $x \in c_0$, com $\|x\| = 1$ e $f(x) = \|f\|$. Conclua que c_0 não é reflexivo.

12. Seja $T : X \rightarrow Y$ uma transformação linear. Mostre que T é contínua se, e somente se, para qualquer sequência fracamente convergente $x_n \rightharpoonup x$, temos a convergência fraca das imagens $Tx_n \rightharpoonup Tx$.

13. Se $x_n \rightharpoonup x$ em um espaço de Banach X , mostre que existe uma sequência de combinações lineares dos elementos x_n que converge fortemente para x .

14. Mostre que operadores compactos levam sequências fracamente convergentes em sequências fortemente convergentes.

15. Seja K um conjunto compacto na topologia forte. Mostre que se $(x_n) \subset K$ é tal que $x_n \rightharpoonup x$, então $x_n \rightarrow x$.

16. Considere X com a topologia fraca. Se $y \in X$ e $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), mostre que $M_\alpha : X \rightarrow X$ e $T_y : X \rightarrow X$ dadas por $M_\alpha(x) = \alpha x$ e $T_y(x) = x + y$ são homeomorfismos. Faça o mesmo para a topologia fraca- $\star$.

17. Seja X espaço de Banach de dimensão infinita. Mostre que qualquer aberto não-vazio na topologia fraca é ilimitado. Mostre o mesmo para abertos na topologia fraca- $\star$ em X^* .

18. Seja $(\psi_n) \subset C[-1, 1]$. Mostre que podemos usar a sequência (ψ_n) para induzir funcionais contínuos em $C[-1, 1]$ através do parêntese de dualidade:

$$\langle \psi_n, \phi \rangle = \int_{-1}^1 \phi(t) \psi_n(t) dt, \quad \phi \in C[-1, 1].$$

Seja μ uma medida boreliana finita em $C[-1, 1]$, mostre que μ induz um funcional contínuo em $C[-1, 1]$ através do parêntese de dualidade

$$\langle \mu, \phi \rangle = \int \phi d\mu, \quad \phi \in C[-1, 1].$$

Considere δ_0 a medida de Dirac no ponto 0, i.e., $\delta_0(A) = 1$ se $0 \in A$ e $\delta_0(A) = 0$ se $0 \notin A$.

Mostre que se $\psi_n \xrightarrow{w^*} \delta_0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \psi_n(t) dt = 1$, e existe $C > 0$, tal que para todo n , $\int_{-1}^1 |\psi_n(t)| dt \leq C$.

19. Mostre que se X tem dimensão infinita, a topologia fraca em X e fraca- $\star$ em X^* não são geradas por normas.
20. Seja X espaço normado. Mostre que todo conjunto compacto na topologia fraca é limitado.
21. Mostre que se $F \subset X^*$ é compacto na topologia fraca- $\star$ e limitado (em norma), então F é fracamente- $\star$ compacto.
22. Seja X espaço de Banach. Mostre que $F \subset X^*$ é fracamente- $\star$ compacto se, e somente se, F é fechado na topologia fraca- $\star$ e limitado (em norma).
23. Seja X um espaço de Banach reflexivo. Mostre que um conjunto é fracamente compacto se, e somente se, este conjunto é fracamente fechado e limitado (em norma).
24. Dizemos que um espaço normado X é fracamente sequencialmente completo se dada qualquer sequência $(x_n) \subset X$, tal que para todo $f \in X^*$ $f(x_n)$ é convergente, então existe $x \in X$, tal que $x_n \rightharpoonup x$.
Mostre que todo espaço reflexivo é fracamente sequencialmente completo.
25. Seja X espaço de Banach de dimensão infinita. Mostre que X não possui base enumerável, i.e., não existe sequência $(x_n) \subset X$, tal que $X = \text{span}(x_n)$. Use isto para mostrar que a topologia fraca- $\star$ não possui base de vizinhanças enumerável na origem, e conclua que a topologia fraca- $\star$ em X^* não é metrizável (ou seja, para garantir a metrizabilidade, temos que reduzir o espaço topológico, por exemplo tomando um subconjunto compacto de X^*).
26. Faça o mesmo do item anterior para a topologia fraca em X .