

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Funções de uma variável complexa

Professor: Alexandre de Bustamante Simas

E-mail: alexandre@mat.ufpb.br / Home page: <http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/>

Lista 3

Exercícios

1. Calcule:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(ni)}{ni}$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ni}$;

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ni}$;

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$;

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n}{n}$, onde $|\alpha| < 1$;

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} n\alpha^n$, onde $|\alpha| < 1$.

2. Determine o raio de convergência das séries abaixo:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(3i)^n} (z-1)^n$;

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{11^{n+2i}}{n!} z^n$;

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2i}}{2^n} (z-\pi)^n$;

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{(4+3i)^n} z^n$;

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7n}{(5+i)^n} (z+2)^n$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(ni)} z^n$;

g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^{ni}} z^n$;

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3in}} z^n$;

i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{ni}}{i(2n)!} z^n$;

j) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$;

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n z^n$;

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$;

n) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\log(n)} z^n$.

3. Calcule $\int_{\gamma} f(z)dz$, onde f e γ são dados:

a) $f(z) = z\bar{z}$ e $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

b) $f(z) = \frac{z+1}{z}$ e $\gamma(t) = 3e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

c) $f(z) = \frac{z+1}{z}$ e $\gamma(t) = e^{it}/4$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

d) $f(z) = \frac{z+1}{z}$ e $\gamma(t) = 5i + e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

e) $f(z) = \frac{1}{z^2-2}$ e $\gamma(t) = 2 + e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

f) $f(z) = \frac{1}{z^2-2}$ e $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

g) $f(z) = \pi e^{\pi \bar{z}}$ e γ é o quadrado de vértices $0, 1, 1+i$ e i , percorrido no sentido anti-horário;

h) $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ e $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi, r > 0, n \geq 2$;

i) $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n}$ e $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi, r > 0, n \geq 2$;

j) $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2}$ e $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

l) $f(z) = \frac{\log(z)}{z^n}$ e $\gamma(t) = 1 + e^{it}/4$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

m) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ e $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

4. Mostre que $\int_{\gamma} \frac{e^{kz}}{z} dz = 2\pi i$, onde $k \in \mathbb{R}$ e $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Use esse resultado para mostrar que

$$\int_0^\pi e^{k \cos(t)} \cos(k \sin(t)) dt = \pi.$$

5. Mostre que se $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, então

$$\int_0^t e^{\alpha t} dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}.$$

6. Mostre que

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

7. Use a questão anterior para mostrar que

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

8. Seja f uma função inteira e suponha que existem $M \geq 0$, $R > 0$ e $n \geq 1$ tais que $|f(z)| \leq M|z|^n$ para $|z| \geq R$. Mostre que f é um polinômio de grau $\leq n$.

9. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa, onde U é um domínio. Suponha que existe $a \in U$ tal que $|f(a)| \leq |f(z)|$, para todo $z \in U$. Mostre que ou $f(a) = 0$, ou f é uma função constante.

10. Seja $f(z)$ holomorfa para $|z| < 1$ e tal que $|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$. Mostre que se $n \geq 1$, então

$$\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \leq (n+1) \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < (n+1)e.$$

Dica: Use a fórmula de Cauchy para a n -ésima derivada de f .

11. Sejam f uma função holomorfa num domínio U , que contém a região fechada e limitada determinada por uma curva de Jordan suave por partes γ , e z um ponto interior a essa região. Se K é o máximo de $|f|$ ao longo de γ e δ é a distância mínima de z a γ , então

$$|f(z)| \leq K \left(\frac{\ell(\gamma)}{2\pi\delta} \right)^{1/n}, \quad n \geq 1.$$

Dica: Use a fórmula de Cauchy para $g(z) = (f(z))^n$.

12. Demonstre a regra de l'Hôpital para funções holomorfas: se $f(z_0) = g(z_0) = 0$, então

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Se por acaso tivermos que $f'(z_0) = g'(z_0) = 0$, então

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f''(z_0)}{g''(z_0)},$$

e assim sucessivamente.