

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Funções de uma variável complexa

Professor: Alexandre de Bustamante Simas

E-mail: alexandre@mat.ufpb.br / Home page: <http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/>

Lista 2

Exercícios

1. Determine em quais pontos as funções abaixo são deriváveis, e calcule suas derivadas nesses pontos:

a) $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$;

b) $f(z) = e^{-y}(\cos(x) + i\operatorname{sen}(x))$;

c) $f(z) = e^{-x}(\cos(x) - i\operatorname{sen}(y))$;

d) $f(z) = e^y(\cos(x) + i\operatorname{sen}(x))$;

e) $f(z) = \operatorname{Re}(z)$;

f) $f(z) = \exp(|z|)$.

2. Seja $f(z)$ uma função inteira. Mostre que a função $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ também é inteira. Mostre também que $h(z) = \overline{f(z)}$ é derivável em 0 se, e somente se, $f'(0) = 0$.

3. Calcule a derivada das seguintes funções e determine seus pontos singulares:

a) $f(z) = \frac{3z - 1}{(z - 1)(z + 4)}$;

b) $f(z) = \frac{iz^5 + 2z - i}{(z - 2i)(z + 1)^2}$;

c) $f(z) = \frac{1}{(z - i)z(z^2 + i)}$;

d) $f(z) = \frac{z - i}{z + i}$.

4. Calcule: $\exp\left(\frac{5+\pi i}{4}\right)$, $\exp\left(\frac{7+3\pi i}{2}\right)$, $\exp\left(\frac{-1-5\pi i}{6}\right)$, $\exp\left(\frac{\pi i}{2}\right)$, $\exp(2 + 3\pi i)$.

5. Mostre que a função $f(z) = z\operatorname{Re}(z)$ é diferenciável apenas em $z = 0$ e calcule $f'(0)$.

6. Mostre que a função $f(z) = \sqrt{|xy|}$ satisfaz as equações de Cauchy-Riemann em $z = 0$, mas não é diferenciável em $z = 0$.

7. Mostre que $f(z) = e^{z^2}$ é uma função inteira e calcule $f'(z)$.

8. Determine $\operatorname{Re}(e^{iz^2})$.

9. Defina o seno e o co-seno complexos por

$$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \operatorname{sen} \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Mostre que essas funções são inteiras e calcule suas derivadas. Escreva essas funções na forma $x + iy$.

Mostre que essas funções são periódicas e determine seus períodos. Encontre os zeros dessas funções.

10. Resolva a desigualdade $|e^{-iz}| < 1$.

11. Seja $\tan(z) = \frac{\text{sen}(z)}{\cos(z)}$. Calcule a derivada de $\tan(z)$ e determine seus pontos singulares. Escreva essa função na forma $x + iy$.

12. Mostre que:

a) $\overline{\cos(z)} = \cos(\bar{z})$;

b) $\overline{\text{sen}(z)} = \text{sen}(\bar{z})$;

c) $|\cos(z)|^2 + |\text{sen}(z)|^2 = 1$, se, e só se z é real;

d) $\text{sen}^2(z) + \cos^2(z) = 1$.

13. Mostre que $2\text{sen}(z_1 + z_2)\text{sen}(z_1 - z_2) = \cos(2z_2) - \cos(2z_1)$.

14. Resolva as equações: $e^z = -1$, $e^z = 1 + i$, $e^z = -i$, $e^z = 3i$.

15. O paradoxo de Bernoulli diz que:

$$(-z)^2 = z^2 \Rightarrow 2\log(-z) = 2\log(z) \Rightarrow \log(-z) = \log(z).$$

Aonde está o erro?

16. Calcule, ou mostre que não existe (considerando o ramo principal do logaritmo):

$$\lim_{z \rightarrow -1} \log(z).$$

17. Determine $\arg_0(z)$, onde z é cada um dos números $1 + i$, $(1 + i)^4$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\right)^5$. Calcule o logaritmo (ramo principal) desses números.

18. Usando o ramo principal de z^λ , calcule: $2^{\sqrt{2}}$, $(5i)^{1+i}$, 1^i , i^i , 1^{-i} .

19. Obtenha uma expressão para a função $\sqrt{z-1}$ usando o ramo principal do logaritmo.

20. Calcule a derivada de $(\log(z^2))^n$, onde n é um número natural.