

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Análise Funcional

Professor: Alexandre de Bustamante Simas

E-mail: alexandre@mat.ufpb.br / Home page: <http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/>

Lista 2

Exercícios

1. Considere a “norma” em $\mathbb{R}^d$: Dado $B \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto aberto, simétrico (no sentido de que $B = -B$), convexo e limitado (com relação a qualquer norma, já que todas são equivalentes), defina

$$\|v\|_B = \inf\{\lambda > 0; \frac{1}{\lambda}v \in B\}.$$

Mostre que $\|\cdot\|$ é uma norma. Quem é a bola unitária definida por essa norma?

2. Considere

$$\mathbb{R}[x] = \left\{ P = \sum_{k=0}^N c_P(k)x^k; N \in \mathbb{N}, c_P(k) \in \mathbb{R} \right\}.$$

Defina as normas em $\mathbb{R}[x]$:

$$\begin{aligned}\|P\|_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} |c_P(k)|; \\ \|P\|_2 &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} |c_P(k)|^2 \right)^{1/2}; \\ \|P\|_{\infty} &= \max_{k \geq 0} \{|c_P(k)|\}.\end{aligned}$$

Mostre que as normas definidas acima, estão bem definidas e são, de fato, normas. Além disso, mostre que nenhuma dessas normas são equivalentes entre si. No entanto, mostre que é possível encontrar algum par de normas acima satisfazendo a desigualdade $\|P\| \leq C\|P\|'$, para algum $C > 0$.

3. Sejam V e W dois espaços vetoriais. Mostre que $V \times W$ com a soma e multiplicação por escalar canônicos, pode ser transformado num espaço vetorial normado com relação a qualquer uma das normas:

$$\|(v, w)\|_p = (\|v\|_V^p + \|w\|_W^p)^{1/p},$$

para $p \in [1, \infty)$, ou

$$\|(v, w)\|_{\infty} = \max\{\|v\|_V, \|w\|_W\}.$$

Mostre também que todas essas normas são equivalentes.

4. Caracterize todos os espaços de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, no qual a semi-norma de $\mathcal{L}_\mu^1(\Omega)$ é, de fato, uma norma.
5. Considere V e W espaços vetoriais normados, e $V \times W$ o espaço vetorial normado com a norma definida em um exercício anterior. Mostre que $V \times W$ é Banach se, e somente se, V e W são espaços de Banach. Assim, produto cartesiano de espaços de Banach, é um espaço de Banach.
6. Relembre que em análise na reta, se uma série de números reais é absolutamente convergente, então a soma não depende a ordem dos termos da série. Mostre que, num espaço de Banach, uma série absolutamente convergente também não depende da ordem dos termos da série.
7. Sejam c e c_0 os conjuntos das sequências (α_n) em $\mathbb{R}$ tais que $\lim_n \alpha_n$ existe e $\lim_n \alpha_n = 0$, respectivamente. Mostre que esses conjuntos são subespaços fechados de $\ell^\infty(\mathbb{N})$, e portanto são Banach com a norma do sup. Mostre que dado $x \in c$ existe $y \in c_0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $x = y + (\alpha, \alpha, \alpha, \dots)$.
8. Seja $C_c(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções contínuas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com suporte compacto, i.e., tal que

$$\text{Supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}; f(x) \neq 0\}}$$

é compacto, com a norma $\|\cdot\|_\infty$. Mostre que este espaço não é completo, e encontre um espaço de Banach contendo $C_c(\mathbb{R})$, tal que a norma obtida pela restrição a este espaço seja $\|\cdot\|_\infty$.

9. Mostre que o operador $I : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ dado pela integral

$$I(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

é contínuo. Use isto para dar uma prova mais curta do fato de que $C^1([0, 1])$ é Banach com a norma $\|f\|_{C^1} = \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}$.

10. Mostre que $D : (C^1([0, 1]), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow C([0, 1])$ dado por $D(f)(x) = f'(x)$ não é um operador limitado.

11. Mostre que a norma de um operador limitado $L : V \rightarrow W$ entre dois espaços normados é a menor constante $C \geq 0$ tal que a desigualdade $\|Lv\| \leq C\|v\|$ vale para todo $v \in V$.
12. Calcule a norma do operador identidade $f \mapsto f$, quando olhado como:
- $C^1([0, 1]) \rightarrow C^1([0, 1])$;
 - $C([0, 1]) \rightarrow L^1([0, 1])$ (com a medida de Lebesgue em L^1);
13. Seja $T : X \rightarrow Y$ um operador linear entre os espaços normados X e Y . Mostre que $\text{Ker}(T)$ e $\text{Im}(T)$ são espaços subespaços vetoriais. Mostre também que se $\dim(X) = n < \infty$, então $\dim(Y) \leq n$. Conclua que se $\dim(X) < \infty$, então T é limitado.
14. Sejam X, Y, Z espaços normados, e sejam $T : X \rightarrow Y$ e $L : Y \rightarrow Z$ operadores lineares limitados. Mostre que a norma do operador é sub-multiplicativa, i.e., mostre que

$$\|LT\| \leq \|L\| \|T\|.$$

15. Seja $T \in B(X)$, onde X é um espaço de Banach. Mostre que o operador e^T definido pela série

$$e^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}$$

pertence a $B(X)$ e vale $\|e^T\| \leq e^{\|T\|}$.

16. Seja $K : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \times (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável, com μ σ -finita. Suponha que existe $C > 0$ tal que

$$\int |K(x, y)| d\mu(x) \leq C,$$

para quase todo y (com rel. a μ). Mostre então que o operador integral $T_K : L^1_\mu(\Omega) \rightarrow L^1_\mu(\Omega)$ dado por

$$(T_K f)(x) = \int K(x, y) f(y) d\mu(y),$$

$f \in L^1_\mu(\Omega)$ é limitado e $\|T_K\| \leq C$.

17. Seja $D \subset \mathbb{C}$ aberto e limitado. Suponha ainda que ∂D é a união de imagens de uma quantidade finita de curvas C^1 $\gamma_1, \dots, \gamma_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, onde consideramos parametrizadas pelo comprimento de arco, i.e., $|\gamma'_i(t)| = 1$, para $i = 1, \dots, k$, $t \in [0, 1]$. Seja V o espaço das funções contínuas $C(\overline{D})$ tal

que a derivada complexa $f'(z)$ existe, e pode ser estendida continuamente para $\overline{D}$. Fixe $p \in [1, \infty)$.

Considere a norma em V :

$$\|f\|_{H^p(D)} = \|f|_{\partial D}\|_{L^p(\partial D)} = \left(\sum_{i=1}^k \int_0^1 |f(\gamma_i(t))|^p dt \right)^{1/p}.$$

Mostre que, para todo $z \in D$, o operador linear de *avaliação*

$$E_z : V \rightarrow \mathbb{C}, \quad E_z(f) = f(z),$$

é contínuo com relação à norma $\|\cdot\|_{H^p(D)}$. Mostre também que se $O \subset D$ é aberto, com fecho compacto $\overline{O} \subset D$, então

$$T : V \rightarrow C(\overline{O}), \quad T(f) = f|_{\overline{O}}$$

é um operador limitado de $(V, \|\cdot\|_{H^p(D)})$ em $(C(\overline{O}), \|\cdot\|_{\infty})$.

18. Defina o espaço de Hardy $H^p(D)$ como o completamento de V (do exercício anterior) com relação à norma $\|\cdot\|_{H^p(D)}$. Conclua, utilizando o exercício anterior, que existe uma maneira canônica de identificar funções do espaço de Hardy $H^p(D)$ com funções holomorfas em D (ou seja, podemos considerar funções do espaço de Hardy como funções holomorfas tais que a norma $\|\cdot\|_{H^p(D)}$ é finita).

Dica: Comece notando que o espaço das funções holomorfas em $\overline{O}$ é completo com relação à norma do sup, e que se f é limite uniforme em compactos de funções holomorfas, então f é holomorfa (use o teorema de Morera para provar isso).

19. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida com μ σ -finita. Defina o operador de multiplicação por ϕ em $L^p_{\mu}(\Omega)$, definido por $\mathcal{M}_{\phi} : L^p_{\mu}(\Omega) \rightarrow L^p_{\mu}(\Omega)$ como

$$(\mathcal{M}_{\phi}\psi)(t) = \phi(t)\psi(t),$$

para $\psi \in L^p_{\mu}(\Omega)$. Mostre que $\mathcal{M}_{\phi}$ é um operador linear limitado e calcule a sua norma.

20. Mostre que um produto interno num espaço vetorial pré-Hilbert é conjuntamente contínuo com relação à norma induzida, ou seja, mostre que se $v_n \rightarrow v$ e $w_n \rightarrow w$, quando $n \rightarrow \infty$, então $\langle v_n, w_n \rangle \rightarrow \langle v, w \rangle$.

21. Mostre que num espaço com produto interno V vale a identidade do paralelogramo:

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2,$$

para todo $v, w \in V$. Em particular, se uma norma provém de um produto interno, valerá a identidade do paralelogramo.

22. Prove que a norma em $L_\mu^p(\Omega)$ provém de um produto interno se, e somente se, $p = 2$. Em particular, o único espaço $L_\mu^p(\Omega)$ que é um espaço de Hilbert é o espaço $L_\mu^2(\Omega)$. Também em particular, conclua que $\ell^p(\mathbb{N})$ é Hilbert se, e somente se, $p = 2$.

23. Mostre que a identidade do paralelogramo caracteriza os espaços de Hilbert entre os espaços de Banach no seguinte sentido: Se um espaço normado satisfaz a identidade do paralelogramo, então é possível definir um produto interno de tal forma que a norma deste espaço surge deste produto interno. Note que se H é um espaço de Hilbert, então temos que a identidade da polarização neste caso nos fornece:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

24. Generalize o exercício anterior para o caso de espaços de Hilbert complexos e obtenha uma identidade da polarização complexa.

25. Seja V um espaço normado, e seja H um espaço de Hilbert. Mostre que se $T : V \rightarrow H$ é um isomorfismo isométrico, então V é um espaço de Hilbert.

26. Mostre que a norma num espaço de Hilbert é estritamente sub-aditiva, i.e.,

$$\|v + w\| < \|v\| + \|w\|,$$

para todo $v, w \in V$, a menos que v ou w seja um múltiplo não-negativo do outro.

27. Prove o teorema de Lax-Milgram:

a) Suponha que H é um espaço de Hilbert, e suponha que

$$B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}(\text{ou } \mathbb{C}),$$

é linear em ambas as coordenadas (ou sesqui-linear na segunda, no caso complexa). Suponha ainda que B é limitada no sentido de que existe $M > 0$ tal que

$$|B(x, y)| \leq M\|x\|\|y\|,$$

para todo $x, y \in H$. Mostre que existe um operador linear $T : H \rightarrow H$, com

$$B(x, y) = \langle Tx, y \rangle,$$

onde $\|T\| \leq M$.

b) Assuma agora que B é coerciva, isto é, suponha que existe $c > 0$, tal que

$$|B(x, x)| \geq c\|x\|^2,$$

para todo $x \in H$. Mostre que neste caso T (da letra (a)) possui uma inversa, e $\|T^{-1}\| \leq 1/c$.

c) Conclua, em particular, que se $f : H \rightarrow \mathbb{R}(\text{ou } \mathbb{C})$ é um funcional linear limitado, então existe um único elemento $u \in H$, tal que

$$B(u, v) = f(v),$$

para todo $v \in H$.

28. Considere o espaço de Hardy $H^2(D)$. Mostre que $H^2(D)$ é um espaço de Hilbert, e mostre que para todo $a \in D$ existe uma função $k_a \in H^2(D)$ tal que

$$f(a) = \langle f, k_a \rangle_{H^2(D)}.$$

29. Seja (K_n) uma sequência não-crescente de conjuntos convexos fechados no espaço de Hilbert H tal que $\cap_n K_n \neq \emptyset$. Prove que para todo $f \in H$, a sequência $u_n = P_{K_n} f$ (de projeções de f sobre K_n) converge para um limite, e identifique o limite.

Dica: Aplique a identidade do paralelogramo em $f - u_n$ e $f - u_m$.

30. Mostre que se H é um espaço de Hilbert, H^* também é um espaço de Hilbert, e encontre um isomorfismo isométrico natural entre H e H^{**} .

31. Mostre que todo espaço com produto interno admite um completamento que é um espaço de Hilbert.

32. Sejam μ e ν duas medidas no mesmo espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$. Defina a medida $m = \mu + \nu$. Mostre que para toda função f integrável com relação a μ e ν , temos que f é integrável com relação a m , e

$$\int f dm = \int f d\mu + \int f d\nu.$$

Mostre também que f é integrável com relação a m , se e somente se f é integrável com relação a μ e ν .

33. Sejam μ e ν medidas σ -finitas num mesmo espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$. Seja ν_{abs} a parte da medida ν absolutamente contínua com relação a μ obtida pelo teorema de Radon-Nikodym. Prove que a derivada de Radon-Nikodym $\frac{d\nu_{abs}}{d\mu}$ é única μ -q.t.p..

Dica: Suponha que g e h sejam duas derivadas. Considere $E_{m,n} \subset \{g > h; g \leq n\}$, tais que $\mu(E_{m,n}) < \infty$ e $E_{m,n} \uparrow \{g > h; g \leq n\}$. Como vale para todo n , conclua que $\mu(g > h) = 0$. Faça o mesmo para $\{g < h\}$.

34. (Esperança condicional) Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de medida, tal que P é uma medida de probabilidade, i.e., $P(\Omega) = 1$. Chamamos uma função $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$ -mensurável de variável aleatória. E chamamos a integral de uma variável aleatória $X \in L_P^1(\Omega)$, de esperança de X , e denotamos

$$E(X) = \int X dP.$$

Seja $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ uma sub- σ -álgebra de $\mathcal{F}$. Definimos a esperança condicional de $X \in L_P^1(\Omega)$ dado a σ -álgebra $\mathcal{G}$, $E(X | \mathcal{G})$, como sendo qualquer variável aleatória Y $\mathcal{G}$ -mensurável tal que, para todo $A \in \mathcal{G}$, vale

$$E(1_A Y) = \int_A Y dP = \int_A X dP = E(1_A X).$$

- a) Mostre que se $Y = E(X | \mathcal{G})$ existe, então Y é integrável. Dica: Considere $A = \{Y > 0\}$.
- b) Mostre que a esperança condicional é única P -qtp.
- c) Prove a existência da esperança condicional usando o teorema de Radon-Nikodym. Dica: Comece supondo $X \geq 0$ e defina a função $\nu(A) = \int_A X dP$, para $A \in \mathcal{G}$. Mostre que ν é uma medida e é absolutamente contínua com relação a P . Mostre que a derivada de Radon-Nikodym é uma versão da esperança condicional. Para X geral, considere $X = X^+ - X^-$, e aplique a parte provada.
- d) Considere $M = L_{\mathcal{G}}^2(\Omega)$ o subconjunto de $L_P^2(\Omega)$ formado pelas funções de quadrado integrável $\mathcal{G}$ -mensuráveis. Mostre que M é um subespaço fechado de $L_P^2(\Omega)$, e dada $X \in L_P^2(\Omega)$, considere $P_M(X)$ a projeção ortogonal sobre M . Mostre que $P_M(X) = E(X | \mathcal{G})$ P -q.t.p..
- Dica: Tome $A \in \mathcal{G}$, e defina $Y = 1_A \in L_{\mathcal{G}}^2(\Omega)$. Trabalhe com o produto interno em $L_P^2(\Omega)$.

35. (Adjunta em espaços de Hilbert) Seja H um espaço de Hilbert e $T \in B(H)$. Mostre que:

- a) Existe uma única transformação $T^* \in B(H)$, chamada de adjunta de T , tal que $\langle Tx, y \rangle =$

$\langle x, T^*y \rangle$, para todos $x, y \in H$.

b) $\|T^*\| = \|T\|$, $\|T^*T\| = \|T\|^2$, $(aS + bT)^* = \bar{a}S^* + \bar{b}T^*$, $(ST)^* = T^*S^*$, e $T^{**} = T$.

c) Denote por Ker e Im , o núcleo e a imagem de operadores, então mostre que $\text{Im}(T)^\perp = \text{Ker}(T^*)$ e $\text{Ker}(T)^\perp = \overline{\text{Im}(T^*)}$.

36. Considere o operador $T : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ dado por

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

Mostre que $\|T\| = 1$, mas T não é isometria.

37. Defina a função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(x) = \begin{cases} ke^{-1/(1-x^2)}, & \text{para } |x| < 1, \\ 0, & \text{para } |x| \geq 1. \end{cases},$$

onde $k > 0$ é uma constante tal que

$$\int h(x)dx = \int_{-1}^1 h(x)dx = 1.$$

Para $\varepsilon > 0$ defina $h_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}h(\frac{x}{\varepsilon})$, para $x \in \mathbb{R}$. Mostre que

a) $h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

b) dada $f \in C(\mathbb{R})$, defina f_ε por

$$f_\varepsilon(x) = h_\varepsilon * f(x) = \int_{\mathbb{R}} h_\varepsilon(x-y)f(y)dy,$$

converge uniformemente para f quando $\varepsilon \rightarrow 0$, em qualquer subconjunto compacto de $\mathbb{R}$.

c) Mostre que para toda $f \in C(\mathbb{R})$, $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$.

d) Mostre que $\text{Supp}(f_\varepsilon) \subset \text{Supp}(f) + [-\varepsilon, \varepsilon]$.

38. Seja $\Delta : C^2(\mathbb{T}^d) \rightarrow C(\mathbb{T}^d)$ o laplaciano definido por

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x).$$

Dizemos que $u \in H^1(\mathbb{T}^d)$ é uma solução fraca da equação diferencial parcial elíptica

$$-\Delta u + \lambda u = f,$$

onde $f \in L^2(\mathbb{T}^d)$, se para toda função $v \in H^1(\mathbb{T}^d)$ vale

$$\sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{T}^d} \partial_{x_i} u \partial_{x_i} v dx + \lambda \int_{\mathbb{T}^d} u v dx = \int_{\mathbb{T}^d} f v dx.$$

a) Forneça uma motivação para esta definição.

b) Defina a função $B : H^1(\mathbb{T}^d) \times H^1(\mathbb{T}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$B(u, v) = \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{T}^d} \partial_{x_i} u \partial_{x_i} v dx + \lambda \int_{\mathbb{T}^d} u v dx.$$

Mostre que B é uma forma bilinear limitada e coerciva para alguns valores de λ , determine esses valores. Essas definições são no sentido do teorema de Lax-Milgram, um exercício dessa lista.

c) Mostre que para certos valores de λ , e para cada função $f \in L^2(\mathbb{T}^d)$, existe uma única solução fraca pertencente a $H^1(\mathbb{T}^d)$ para a equação

$$-\Delta u + \lambda u = f.$$

d) Aplique o teorema de regularidade elíptica visto em sala de aula para mostrar que se $f \in L^2(\mathbb{T}^d)$, então na realidade podemos melhorar a conclusão da letra c), e concluir que a única solução fraca pertence a $H^2(\mathbb{T}^d)$.

e) Generalize a letra d) e mostre que se $f \in H^k(\mathbb{T}^d)$, então a única solução fraca da equação pertence a $H^{k+2}(\mathbb{T}^d)$.

f) Finalmente, mostre que se $f \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$, então a única solução fraca da equação pertence a $C^\infty(\mathbb{T}^d)$.