

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Funções de uma variável complexa

Professor: Alexandre de Bustamante Simas

E-mail: alexandre@mat.ufpb.br / Home page: <http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/>

Lista 1

Exercícios

1. Escreva os números complexos abaixo na forma $z = x + iy$:

$$\begin{aligned} a) (1 - 5i)^2 - 4i, \quad b) \frac{3 - 4i}{2i}, \quad c) \frac{z - i\bar{z}}{\bar{z} - iz}, \quad d) \frac{(1 + 2i)^2}{3 + 4i}, \\ e) (1 - i)^{12}, \quad f) i^{-3333}, \quad g) 1 + i + i^2 + \dots + i^{1789}. \end{aligned}$$

2. Determine o número real a para que $\frac{2+ai}{1-i}$: i) seja um número real; ii) seja um número imaginário puro (isto é, com parte real nula).

3. Faça um esboço e identifique os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} a) \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z - 1), \quad b) \operatorname{Im}(z - 1) = |z + 1|, \quad c) |\bar{z}| = |z - 1|, \quad d) z \cdot \bar{z} = 1, \\ e) z^2 \text{ é imaginário puro}, \quad f) z = \bar{z}, \quad g) z \cdot \bar{z} + z + \bar{z} = 0, \quad h) z + \frac{1}{z} \text{ é real}, \\ i) \operatorname{Re}\left(\frac{z + 1}{z - 1}\right) = 1. \end{aligned}$$

5. Sejam z_1 e z_2 números complexos quaisquer, mostre que

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

6. Mostre que vale a desigualdade: $|z_1 + z_2 + z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|$.

7. Mostre que se $z_2 \neq -z_3$, então vale

$$\left| \frac{z_1}{z_2 + z_3} \right| \leq \frac{|z_1|}{||z_2| - |z_3||}.$$

8. Mostre que se $|z_1| < 1$ e $|z_2| < 1$, então

$$|z_1 + z_2| < |1 + \bar{z}_1 z_2|.$$

9. Seja $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ o polinômio dado por

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n,$$

onde $a_0, a_1, \dots, a_n$ são números reais. Mostre que $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$.

10. Quantos valores distintos a expressão $i^n + i^{-n}$ pode ter, sendo n um número inteiro?

11. Determine:

$$a)(1 - i\sqrt{3})^5, \quad b)(\sqrt{3} + i)^{-12}.$$

12. Determine as raízes quartas de -16 .

13. Determine quais são os complexos que tem o cubo igual ao seu conjugado.

14. Calcule

$$\left| \sqrt[3]{7 + i\sqrt{15}} \right|,$$

onde $\sqrt[3]{7 + i\sqrt{15}}$ é qualquer solução da equação

$$z^3 = 7 + i\sqrt{15}.$$

15. Determine os valores inteiros de n para os quais $(1 - \sqrt{3}i)^n$ é real.

16. Mostre que as raízes n -ésimas do número complexo z formam um polígono regular de n lados que está inscrito em uma circunferência de raio $\sqrt[n]{|z|}$.

17. Encontre todas as soluções das equações:

$$a)z^2 = 1 - i\sqrt{3}, \quad b)z^5 = -1, \quad (\bar{z})^3 = 1; \quad z^7 = -(1 + i).$$

18. Deduza a fórmula

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}, \quad z \neq 1.$$

19. Calcule $(2 + i)(3 + i)$, e deduza a igualdade:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}.$$

20. Calcule $|1 - z|^2 + |1 + z|^2$.

21. Seja $P(z)$ um polinômio com coeficientes reais. Sabendo que $P(3 + 2i) = 4 - 18i$, determine o valor de $P(3 - 2i)$.

22. Mostre que se z e z_0 são números complexos, e m é um número natural, então

$$z^m - z_0^m = (z - z_0)(z^{m-1} + z^{m-2}z_0 + z^{m-3}z_0^2 + \cdots + zz_0^{m-2} + z_0^{m-1}).$$

23. Seja $z = x + iy$, e faça

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^3 y (y - ix)}{(x^6 + y^2)(x + iy)}, & \text{se } z \neq 0, \\ 0, & \text{se } z = 0. \end{cases}.$$

Mostre que $\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = 0$, se $\gamma(t)$ é qualquer reta no plano complexo que tende à origem quando $t \rightarrow 0$. Mostre que, no entanto, $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ não existe.

24. Calcule o limite ou prove que não existe:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^m - z_0^m}{z - z_0},$$

onde m é um número natural.

25. Mostre que as funções parte real e parte imaginária são contínuas.

26. Calcule o limite ou prove que não existe:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0}.$$

27. Calcule o limite ou prove que não existe:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}}{z - z_0}.$$