

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Análise Funcional

Professor: Alexandre de Bustamante Simas

E-mail: alexandre@mat.ufpb.br / Home page: <http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/>

Lista 1

Exercícios

1. Seja $A \neq \emptyset$ uma família de índices. Se $\mathcal{F}_\alpha$, $\alpha \in A$ são σ -álgebras, então mostre que $\cap_{\alpha \in A} \mathcal{F}_\alpha$ é uma σ -álgebra. Conclua que dada qualquer família de conjuntos, existe a menor σ -álgebra que a contém.
2. Prove o Lema de Borel-Cantelli: Se $A_1, A_2, \dots, \in \mathcal{F}$ é uma sequência de conjuntos tais que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty,$$

então

$$\mu(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k) = 0.$$

O evento considerado acima é chamado o evento “ A_n infinitas vezes”:

$$\{A_n \text{ infinitas vezes}\} = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Justifique essa nomenclatura notando que x pertence a $\{A_n \text{ infinitas vezes}\}$ se e só se x pertence a A_n para infinitos valores diferentes de n .

3. Mostre que se $A_1, A_2, \dots$, são tais que $A_n \downarrow A$, mas $\mu(A_n) = \infty$, então não necessariamente $\mu(A) = \infty$, o que mostra que a hipótese de pelo menos um termo da sequência ter medida finita é essencial para a continuidade da medida por cima.

4. Mostre que se $\mathcal{A}$ gera $\mathcal{S}$, então $f^{-1}(\mathcal{A}) := \{f^{-1}(A); A \in \mathcal{A}\}$ gera $\sigma(f)$.

5. Mostre que se f é contínua e $g_n \rightarrow g$ qtp, então $f \circ g_n \rightarrow f \circ g$ qtp.

6. Consideremos um espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$ (sem medida). Uma função simples neste espaço é uma função da forma

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^m c_n 1_{A_n}(x),$$

com $A_n \in \mathcal{F}$, e c_n são números reais. Mostre que a classe de funções reais $\mathcal{F}$ -mensuráveis é a menor classe de funções que contém as funções simples e é fechada por limites pontuais.

7. Use o exercício anterior para concluir que uma função real g é mensurável com relação à σ -álgebra $\sigma(f)$, se, e somente se existe uma função mensurável $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g = h \circ f$.

8. Podemos obter a função h da questão anterior de maneira construtiva. Comece notando que

$$\{x; m2^{-n} \leq g(x) < (m+1)2^{-n}\} = f^{-1}(B_{n,m}),$$

para algum $B_{n,m}$ boreliano de $\mathbb{R}$. Defina $h_n(x) = m2^{-n}$, para x em $B_{n,m}$, e mostre que existe $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável tal que $h_n \rightarrow h$ e $g = h \circ f$.

9. Dizemos que uma função f é semi-contínua inferiormente (s.c.i.) se

$$\liminf_{y \rightarrow x} f(y) \geq f(x),$$

e que f é semi-contínua superiormente (s.c.s.) se $-f$ é s.c.i.. Mostre que f é s.c.i. se e só se para todo $a \in \mathbb{R}$, $\{x; f(x) \leq a\}$ é fechado. Conclua que as funções s.c.i. e s.c.s. são mensuráveis.

10. Prove que se $f \leq 0$ qtp e $\int f d\mu = 0$, então $f = 0$ qtp.

11. Dizemos que uma medida μ no espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$ é completa se dado qualquer $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) = 0$, então, para todo $S \subset A$, $S \in \mathcal{F}$ e $\mu(S) = 0$. Suponha que μ é uma medida em $(\Omega, \mathcal{F})$ que não é completa. Mostre que

$$\overline{\mathcal{F}} = \{A \cup N; A \in \mathcal{F}, N \subset F \in \mathcal{F}, \mu(F) = 0\},$$

é uma σ -álgebra, e que existe uma única medida $\bar{\mu}$ em $\overline{\mathcal{F}}$, tal que $\bar{\mu} = \mu$ em $\mathcal{F}$, e tal que $\bar{\mu}$ é completa. Chamamos $\bar{\mu}$ de completamento de μ .

12. Seja μ uma medida em $(\Omega, \mathcal{F})$, e seja $\bar{\mu}$ seu completamento em $(\Omega, \overline{\mathcal{F}})$. Mostre que se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é $\overline{\mathcal{F}}$ -mensurável, então existe f_0 $\mathcal{F}$ -mensurável, tal que $f_0 = f$ fora de um conjunto de $\bar{\mu}$ medida zero.

Dica: Comece provando para funções simples, depois para positivas, etc..

13. Prove a desigualdade de Markov: Seja $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) \geq 0$, para todo x , $g(x) > 0$, se $x > 0$, e $g(x)$ é não-decrescente. Se f é uma função real mensurável, então mostre que para todo $a > 0$:

$$\mu(|f| \geq a) \leq \frac{1}{g(a)} \int g \circ f d\mu.$$

14. Use a questão anterior para mostrar que se f_n converge para f em $L^p_\mu(X)$, $p \geq 1$, então f_n converge em medida para f .

15. Mostre que se f_n converge para f em medida, então f_n admite uma subsequência f_{n_k} tal que f_{n_k} converge para f qtp. Conclua que se uma f_n converge para f em $L^p_\mu(X)$, $p \geq 1$, então existe uma subsequência de f_n que converge em qtp para f .

Dica: Escolha uma subsequência n_k tal que

$$\mu(|f_{n_k} - f| > 2^{-k}) < 2^{-k},$$

e use o Lema de Borel-Cantelli (exercício 2).

16. Seja $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Suponha que $\mu(\Omega) < \infty$, então, podemos renormalizar o espaço para supor que $\mu(\Omega) = 1$, sem perda de generalidade. Mostre que se f e $\varphi(f)$ são integráveis, então

$$\varphi\left(\int f d\mu\right) \leq \int \varphi(f) d\mu.$$

Dica: Faça $c = \int f d\mu$ e comece encontrando uma função afim $\ell(x) = ax + b$, tal que $\varphi(c) = \ell(c)$, e $\varphi(x) \geq \ell(x)$. Para observar que essa função existe, note que a convexidade implica que

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{\varphi(c) - \varphi(c-h)}{h} \leq \lim_{h \downarrow 0} \frac{\varphi(c+h) - \varphi(c)}{h},$$

onde os limites existem, porque as sequências são monótonas. Tomando a como qualquer número entre os dois limites, e fazendo $\ell(x) = a(x - c) + \varphi(c)$, temos que ℓ definida desta forma funciona.

17. Supondo que $\mu(\Omega) < \infty$, e mais uma vez renormalizando para $\mu(\Omega) = 1$, escolha uma função φ adequada na questão anterior para provar a desigualdade de Lyapunov: Se $p > q > 0$

$$\left(\int |f|^q d\mu \right)^{1/q} \leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Em particular, conclua que em espaços de medida finita $p > q \geq 1$ implica que $L_\mu^p(X) \subset L_\mu^q(X)$.

Mostre que isso não é necessariamente verdade se o espaço de medida for σ -finito, mas não finito. Faça $\Omega = (1, \infty)$, μ =Lebesgue, e $f(x) = 1/x$.

18. Tome $f \geq 0$ mensurável, e faça, para cada $A \in \mathcal{F}$:

$$\nu(A) = \int_A f d\mu.$$

Mostre que ν é uma medida.

Dica: Use o teorema da convergência monótona.

19. Sejam f_n funções mensuráveis. Suponha que

$$f_n \rightarrow f \text{ pontualmente, } f_n \geq 0, \quad \int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu < \infty.$$

Prove que f_n converge para f em $L_\mu^1(X)$.

Dica: Escreva $|f - f_n| = 2(f - f_n)^+ - (f - f_n)$ e aplique o teorema da convergência dominada ao primeiro termo do lado direito.

20. Mostre que se $\sum_n \int |f_n| d\mu < \infty$, então $\sum_n \int f_n d\mu = \int \sum_n f_n d\mu$.

21. Mostre que se $g_n \geq 0$, então $\sum_{n=1}^\infty \int g_n d\mu = \int \sum_{n=1}^\infty g_n d\mu$.

22. Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e Y um espaço métrico. Seja $F : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que:

- i) Para todo $y \in Y$ fixado, a função $x \mapsto F(x, y)$, definida em X é $\mathcal{F}$ -mensurável;
- ii) Para quase todo ponto $x \in X$ fixado, a função $y \mapsto F(x, y)$, definida em Y , é contínua;
- iii) Existe $g : X \rightarrow [0, \infty)$ integrável, tal que para quase todo $x \in X$ e todo $y \in Y$,

$$|F(x, y)| \leq g(x).$$

Então, mostre que

1. Para todo $y \in Y$, a função $x \mapsto F(x, y)$ é integrável em X ;

2. A função $y \mapsto \int F(x, y) d\mu(x)$ é contínua em Y .

23. Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e I um intervalo em $\mathbb{R}$, e seja $F : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que:

i) Para todo $y \in Y$ fixado, a função $x \mapsto F(x, y)$, definida em X é integrável com relação a μ ;

ii) Para quase todo $x \in X$, e para todo $y \in Y$, existe a derivada parcial $\frac{\partial}{\partial y} F(x, y)$;

iii) Existe $g : X \rightarrow [0, \infty)$ integrável tal que para quase todo $x \in X$ e todo $y \in I$,

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) \right| \leq g(x).$$

Então, mostre que

1. A função $y \mapsto \int F(x, y) d\mu(x)$ é diferenciável em I ;

2. Para todo $y \in I$ fixado, a função $x \mapsto \frac{\partial}{\partial y} F(x, y)$, definida em X , é integrável com relação a μ ;

3. Vale a fórmula

$$\frac{\partial}{\partial y} \int F(x, y) d\mu(x) = \int \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) d\mu(x).$$

24. Sejam f_n funções integráveis com $\int |f_n| d\mu \leq K < +\infty$, para todo n . Mostre que se $f_n \rightarrow f$ q.t.p., então f é integrável e

$$\int |f| d\mu \leq K.$$

Dica: Use o Lema de Fatou.

25. Mostre que se $|x_{n,m}| \leq M_m$, e $\sum_{m=1}^{\infty} M_m < \infty$, e se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,m} = x_m$, para todo m , então $\sum_{m=1}^{\infty} |x_m| < +\infty$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} x_{n,m} = \sum_{m=1}^{\infty} x_m.$$

Dica: Considere o espaço $\{1, 2, \dots\}$ com a medida de contagem (medida que associa cada conjunto à sua cardinalidade) e use o teorema da convergência dominada.

26. Dado $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrável com relação à medida de Lebesgue, definimos a transformada de Fourier de f como

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x) dx,$$

onde $t \in \mathbb{R}$. Mostre que $\widehat{f}$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Dica: Use o exercício 22.

27. Mostre que se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável e $g(x) = xf(x)$ também é integrável, então

$$\frac{d}{dt} \widehat{f}(t) = -i \widehat{(xf)}(t).$$

Dica: Use o exercício 23.

28. Prove a seguinte fórmula de mudança de variáveis: Seja $f : \Omega \rightarrow S$ uma função mensurável de $(\Omega, \mathcal{F})$

em $(S, \mathcal{S})$. Seja $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável tal que $g \geq 0$, ou $\int |g \circ f| d\mu < \infty$. Então, prove que

$$\int g \circ f d\mu = \int g d(\mu \circ f^{-1}),$$

onde $\mu \circ f^{-1}$ é a medida dada por $\mu \circ f^{-1}(A) = \mu(f^{-1}(A))$.

Dica: Comece provando para o caso em que g é uma função indicadora, depois simples, etc..

29. Medidas produto.

Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu_1)$ e $(Y, \mathcal{B}, \mu_2)$ dois espaços de medida σ -finitos. Faça $\Omega = X \times Y$ e

$$\mathcal{S} = \{A \times B; A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}.$$

i) Os conjuntos de $\mathcal{S}$ são chamados de retângulos. Mostre que $\mathcal{S}$ é uma semi-álgebra.

Seja $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{S})$. $\mathcal{F}$ é chamada σ -álgebra produto, e é denotada usualmente por $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ou $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

ii) Prove que existe uma única medida σ -finita μ em $\mathcal{F}$ tal que

$$\mu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B).$$

μ é usualmente denotada por $\mu_1 \times \mu_2$ ou $\mu_1 \otimes \mu_2$.

Dica: Para provar o item ii) precisaremos usar o teorema de extensão de medidas. Note que, pelas hipóteses do teorema, é suficiente mostrar que se $A \times B = \cup_i A_i \times B_i$, com essa união sendo disjunta e contável (finita ou enumerável), então

$$\mu(A \times B) = \sum_i \mu(A_i \times B_i).$$

Para tanto, observe que

$$1_A(x)\mu_2(B) = \sum_i 1_{A_i}(x)\mu_2(B_i),$$

em seguida integre com relação a μ_1 e use o exercício 21 para concluir o resultado.

iii) Usando indução no item ii), mostre que se $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mu_i)$ são espaços de medida σ -finitos, $i = 1, \dots, n$, e $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$. Então, existe uma única medida em Ω , definida na σ -álgebra gerada pelos retângulos da forma $A_1 \times \dots \times A_n$, com $A_i \in \mathcal{F}_i$, e tal que

$$\mu(A_1 \times \dots \times A_n) = \prod_{i=1}^n \mu_i(A_i).$$

Observação: Se $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mu_i) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, onde λ é a medida de Lebesgue, então a medida produto nesse espaço é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$.

30. Teorema de Fubini.

Para o teorema de Fubini, precisaremos do seguinte resultado sobre σ -álgebras que podemos assumir sem a demonstração:

Dizemos que uma classe de conjuntos $\mathcal{P}$ é um sistema π , se dados dois conjuntos $A, B \in \mathcal{P}$, então

$A \cap B \in \mathcal{P}$.

Dizemos que $\mathcal{L}$ é um sistema λ se $\Omega \in \mathcal{L}$, se $A \in \mathcal{L}$, então $A^c \in \mathcal{L}$, e se $A_1, A_2, \dots$, é uma sequência disjunta de conjuntos, então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{L}$.

Teorema ($\pi - \lambda$ de Dynkin): Se $\mathcal{P}$ é um sistema π e $\mathcal{L}$ é um sistema λ que contém $\mathcal{P}$, então $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$.

Prove o teorema de Fubini: Se $f \geq 0$ ou $\int |f| d\mu_1 \times \mu_2 < \infty$, então

$$\int_X \int_Y f(x, y) \mu_2(dy) \mu_1(dx) = \int f d\mu_1 \times \mu_2 = \int_Y \int_X f(x, y) \mu_1(dx) \mu_2(dy).$$

Faremos essa prova em algumas etapas:

i) Comece provando que a aplicação $y \rightarrow f(x, y)$ com x fixado é $\mathcal{B}$ -mensurável.

Dica: Comece considerando $f = 1_E$, onde $E \in \mathcal{F}$. Defina $E_x = \{y; (x, y) \in E\}$. Prove que se $E \in \mathcal{F}$, então $E_x \in \mathcal{B}$. Para tanto, considere $\mathcal{E} = \{E \in \mathcal{F}; E_x \in \mathcal{B}\}$, e mostre que $\mathcal{E}$ é uma σ -álgebra que contém os retângulos.

Em seguida, temos que funções simples são $\mathcal{B}$ -mensuráveis, depois positivas, etc..

ii) Prove que a aplicação $x \rightarrow \int_Y f(x, y) \mu_2(dy)$ é $\mathcal{A}$ -mensurável e conclua a primeira igualdade do teorema de Fubini, completando assim a demonstração.

Dica: Comece provando ambos os resultados para a função indicadora 1_E , ou seja, mostre que se $E \in \mathcal{F}$, então a aplicação $g(x) = \mu_2(E_x)$ é $\mathcal{A}$ -mensurável e $\int_X \mu_2(E_x) \mu_1(dx) = \mu_1 \times \mu_2(E)$. Para provar isso, note que como $\mu_1 \times \mu_2$ é σ -finita, então existe uma sequência $E_n \uparrow E$, com $\mu_1 \times \mu_2(E_n) < \infty$. Mostre que, pelo teorema da convergência monótona, se provarmos o resultado para E com $\mu_1 \times \mu_2(E) < \infty$, então o resultado vale para o caso geral.

Verifique agora que se $E = A \times B$, então $E_x = B$, daí $g(x) = \int_Y 1_{A \times B} \mu_2(dy) = \mu_2(B)$ é constante, logo mensurável. Além disso, $\int_X \int_Y 1_{A \times B} \mu_2(dy) \mu_1(dx) = \int_X 1_A \mu_2(B) \mu_1(dx) = \mu_1 \times \mu_2(A \times B)$. Portanto, conclua que o resultado vale para retângulos.

Defina agora a classe

$$\mathcal{L} = \{E \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}; \text{a aplicação em questão é mensurável, e vale a igualdade de Fubini para } 1_E\}.$$

Mostre que $\mathcal{L}$ é um sistema λ , pode ser útil usar que $(E_x)^c = (E^c)_x$.

Como $\mathcal{L}$ contém os retângulos, o resultado vale para todos os conjuntos mensuráveis E na σ -álgebra produto (pelo teorema $\pi - \lambda$ de Dynkin).

Conclua que o resultado vale para funções simples, em seguida tome uma sequência de funções simples $f_n \uparrow f$, com $f \geq 0$, etc..

31. Mostre que a hipótese de que μ_1 e μ_2 são σ -finitas não pode ser omitida. De fato, considere $X = (0, 1)$, $\mathcal{A} = \text{Borelianos}$, $\mu_1 = \text{Lebesgue}$. Considere agora $Y = (0, 1)$, $\mathcal{B} = \text{conjunto das partes}$, $\mu_2 =$

medida de contagem. Defina $f(x, y) = 1$ se $x = y$, e $f(x, y) = 0$ caso contrário. Conclua que

$$\int_X \int_Y f(x, y) \mu_2(dy) \mu_1(dx) \neq \int_Y \int_X f(x, y) \mu_1(dx) \mu_2(dy).$$

32. Mostre que podemos concluir o teorema de Fubini se $\int_X \int_Y |f(x, y)| \mu_2(dy) \mu_1(dx) < \infty$.

33. Seja $g \geq 0$ mensurável em $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Seja λ a medida de Lebesgue. Prove que

$$\int_X g d\mu = (\mu \times \lambda)(\{(x, y) : 0 \leq y < g(x)\}) = \int_0^\infty \mu(\{x; g(x) > y\}) dy.$$

34. Sejam F, G medidas de Stieltjes, e sejam μ e ν suas medidas correspondentes em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Mostre que:

i) $\int_{(a,b]} (F(y) - F(a)) dG(y) = (\mu \times \nu)(\{(x, y); a < x \leq y \leq b\});$

ii) Prove a fórmula de integral por partes:

$$\begin{aligned} \int_{(a,b]} F(y) dG(y) &= F(b)G(b) - F(a)G(a) + \sum_{x \in (a,b]} \mu(\{x\})\nu(\{x\}) \\ &\quad - \int_{(a,b]} G(y) dF(y). \end{aligned}$$

iii) Se $F = G$ é contínua, então $\int_{(a,b]} 2F(y) dF(y) = F^2(b) - F^2(a)$.

35. Veja que em (ii) da questão anterior a soma é necessária: Tome $F(x) = G(x) = 1_{[0,\infty)}(x)$, e $a < 0 < b$.