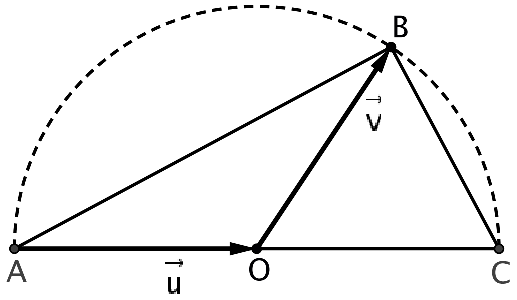
UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CCEN - Departamento de Matemática

http://www.mat.ufpb.br/sergio

1ª Prova	Cálculo Vetorial e Geometria Analítica	
Prof.: *Sérgio*	Data: */Nov/2008*	Turno: *Virtual*
Curso:	Nome:	
Período: *08.2*	Pólo:	Matrícula:

1ª Questão Considere o triângulo ABC inscrito na semicircunferência de centro no ponto O e de raio $r = 1$, conforme a figura abaixo. Escreva os vetores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$ como combinação linear dos vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AO}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ e calcule o produto interno $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.



2ª Questão Dados três vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ quaisquer em $\mathbb{R}^3$, assinale com a letra **V** para VERDADEIRO ou a letra **F** para FALSO, os ítens abaixo, **justificando cada resposta dada**.

a) Se $\vec{a} = 2\vec{b}$ então o produto vetorial $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ( )

b) Se o produto misto $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \neq 0$ então o produto vetorial $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$ ( )

3ª Questão Supondo que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$ e que 45^o é medida do ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, determine os valores $\vec{u} \cdot \vec{v}$ e $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (2\vec{u})$.

4ª Questão Qual a área do triângulo formado pelos pontos $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 2, 2)$ e $C = (2, 1, 3)$?

5ª Questão Considere os vetores $\vec{u} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ e $\vec{w} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

a) Calcule $\vec{u} \times \vec{w}$ e $\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right]$

b) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^3$? JUSTIFIQUE SUA RESPOSTA.

c) Escreva o vetor $\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ como combinação linear dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, ou seja, encontre os valores de x, y e z onde $\vec{a} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$.

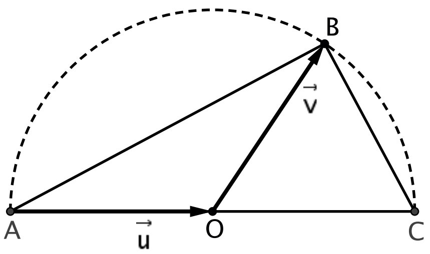
Boa Sorte

R E S P O S T A S

1ª Questão Dados da questão:

- ABC é um triângulo inscrito na semi-circunferência,
- O é centro e $r = 1$ é o raio;
- $\vec{u} = \overrightarrow{AO}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

Na figura abaixo, considere:



Observe que:

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = -\vec{v} - \vec{u}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = -\vec{v} + \vec{u}$$

logo

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} &= (-\vec{v} - \vec{u}) \cdot (-\vec{v} + \vec{u}) \\ &= \|\vec{v}\|^2 - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} - \|\vec{u}\|^2 \\ &= 1 + 0 - 1 = 0 \end{aligned}$$

2ª Questão Dados: $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ quaisquer em $\mathbb{R}^3$

a) Como $\vec{a} = 2\vec{b}$ então os vetores são paralelos logo LD (mesma direção), logo a área do paralelogramo formado pelos dois vetores é nulo, logo $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ (V)

b) Como o produto misto $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ representa um volume de um paralelepípedo $(Area_{base} \times altura \neq 0)$ temos que tanto a $altura \neq 0$ como $Area_{base} \neq 0$ e como o produto vetorial que está associado a uma área $\|\vec{a} \times \vec{b}\| \neq 0$ implica que $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$ (V)

3ª Questão Dados da questão:

- $\|\vec{u}\| = 2$,
- $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$;
- ângulo $(\vec{u}, \vec{v}) = 45^o$.

Usando a definição temos:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= 2.\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Usando a propriedade da distributiva temos:

$$\begin{aligned} (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (2\vec{u}) &= \vec{u} \cdot (2\vec{u}) - \vec{v} \cdot (2\vec{u}) \\ &= 2(\vec{u} \cdot \vec{u}) - 2(\vec{v} \cdot \vec{u}) \\ &= 2(\|\vec{u}\|^2) - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) \\ &= 2.4 - 2.2 = 4 \end{aligned}$$

4ª Questão Dados da questão:

- Ponto $A = (1, 1, 1)$,
- Ponto $B = (2, 2, 2)$ e
- Ponto $C = (2, 1, 3)$.

Considere os vetores:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (1, 0, 2)$$

A área do triângulo será a metade da área do paralelogramo formado pelos vetores, ou seja:

$$A_{\Delta} = \frac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{2}$$

Como $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, a área

$$A_{\Delta} = \frac{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} u.a$$

.

5ª Questão Dados da questão:

- Vetores $\vec{u} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$,
- $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$,
- $\vec{w} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ e
- $\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

a)

$$\vec{u}\times\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 1 & -1\\ 3 & 1 & -2\end{vmatrix}=0\vec{i}-5\vec{j}-5\vec{k}$$

e

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -2\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}=-15$$

b) $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^3$, pois

- São 3 vetores em $\mathbb{R}^3$ e
- São LI.
  De fato, pelo teorema

  $$x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}=\vec{0}$$

  se, e somente se, $x=y=z=0$ for a solução única, ou seja, que o sistema abaixo só possua a solução trivial.

  $$\begin{cases}-2x + 1y + 3z = 0\\ 1x - 1y + 1z = 0\\ -1x - 2y - 1z = 0\end{cases}$$

  e para tanto o determinante da matriz dos coeficientes, deve ser diferente de zero, ou seja:

  $$\begin{vmatrix}-2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & -2 & -1\end{vmatrix}=-15\neq 0$$

c) Para que o vetor $\vec{a}=4\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ seja uma combinação dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é preciso encontrar os valores x, y e $z\in\mathbb{R}$, tal que, $x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}=\vec{a}$, ou seja, basta resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases}-2x + 1y + 3z = 4\\ 1x - 1y + 1z = 1\\ -1x - 2y - 1z = -2\end{cases}$$

tendo como solução $x=\dfrac{1}{15}$, $y=\dfrac{1}{3}$ e $z=\dfrac{19}{15}$, ou seja:

$$\vec{a}=\frac{1}{15}\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}+\frac{19}{15}\vec{w}$$