UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CCEN - Departamento de Matemática
http://www.mat.ufpb.br/sergio

2ª Prova — Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Prof.: *Sérgio* Data: *19/Fev/2004* Turno: *Manhã*
Curso: Nome:

Período: *03.2* Turma: *02* Matrícula:

1ª Questão Determinar as equações paramétricas e a equação normal do plano α que:

- contém o ponto $A = (1, \mathcal{K}, 2)$ e
- é paralelo ao plano β, cujas equações paramétricas são $\beta : \begin{cases} x = 2 - 2p + 2q \\ y = \mathcal{K} + 2p + q \\ z = 3 + p + q \end{cases}$

2ª Questão Determine a equação normal do plano γ que contém a reta $r : \begin{cases} x = -2 + (\mathcal{K} - 2)t \\ y = 2 + 2t \\ z = 2 - (\mathcal{K} + 1)t \end{cases}$ e é paralela à reta $s : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z}{2}$

3ª Questão Seja m a reta, perpendicular ao plano $\sigma : 2x - 3y + 2z - 2\mathcal{K} = 0$, que passa pela origem e n a reta que passa pelos pontos $B = (1, 1, \mathcal{K} - 1)$ e $C = (2, 2, \mathcal{K} - 2)$.

Determine a posição relativa entre as retas m e n.

4ª Questão Determine a distância, o ângulo e a interseção, caso existam, entre:

4.a) o ponto A e o plano β

4.b) a reta r e o plano σ

cujas as equações estão definidas nas questões anteriores.

Boa Sorte

Observações:

a) Considere a constante

$$\boxed{\mathcal{K} = \frac{2|m-n| - 1 + (-1)^{|m-n|}}{4}}$$

onde $\boxed{m}$ e $\boxed{n}$ são, respectivamente, os dois últimos números da sua matrícula;

b) Em todas as questões, exibir um esboço gráfico, para a resolução dos problemas.

R E S P O S T A S

1ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Ponto $A = (1, \mathcal{K}, 2)$
- Plano $\beta : \begin{cases} x = 2 - 2p + 2q \\ y = \mathcal{K} + 2p + q \\ z = 3 + p + q \end{cases}$

Para determinar o vetor normal do plano π, vamos utilizar dois vetores paralelos ao plano γ, ou seja $\overrightarrow{v_1} = (-3, -3, 1)$ e $\overrightarrow{v_2} = (2, 1, 3)$, logo

$$\overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_\pi} = -10\vec{i} - 11\vec{j} + 3\vec{k}$$

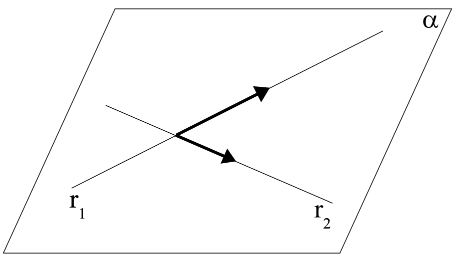
Para determinar a equação do plano π vamos utilizar o fato que os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{n_\pi}$ são perpendiculares, ou seja, $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{n_\pi} = 0$

$$(x - 1, y + 1, z - 2).(-10, -11, 3) = 0$$

$$\boxed{\pi : -10x + 11y + 3z + 15 = 0}$$

2ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Reta $r_1 : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ e
- Reta $r_2 : \dfrac{x + 1}{1} = \dfrac{-y - 1}{2} = \dfrac{z}{-3}$.



Considere $\vec{u} = (1, -1, -3)$ e $\vec{v} = (1, -2, -3)$ os vetores diretores das retas r_1 e r_2 e o ponto $A = (-1, 2, 2)$ da reta r_1, logo o plano α procurado é definido pelo ponto A e pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Para determinar o vetor normal do plano α, vamos utilizar os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, logo

$$\overrightarrow{n_\alpha} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_\alpha} = -3\vec{i} - \vec{k}$$

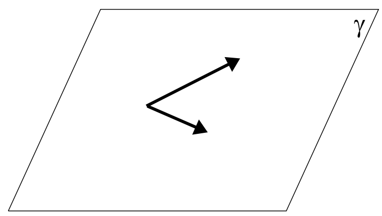
Para determinar a equação do plano π vamos utilizar o fato que os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{n_\pi}$ são perpendiculares, ou seja, $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{n_\alpha} = 0$

$$(x + 1, y - 2, z - 2).(-3, 0, -1) = 0$$

$$\boxed{\alpha : -3x - z - 1 = 0}$$

3ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Pontos $A = (1, 5, 0)$ e
  $B = (m, -1, 2)$
- Plano $\gamma : \begin{cases} x = 1 + 3p \\ y = 1 + 2p + q \\ z = 3 + 3q \end{cases}$



Para determinar a reta definida pelos ponto A e B paralela ao plano γ, o vetor diretor $\overrightarrow{AB} = (m - 1, -6, 2)$ deve ser perpendicular ao vetor $\overrightarrow{n_\gamma}$.

Para determinar o vetor normal do plano γ, vamos utilizar dois vetores paralelos ao plano, ou seja $\overrightarrow{v_1} = (3,2,0)$ e $\overrightarrow{v_2} = (0,1,3)$, logo

$$\overrightarrow{n_\gamma} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_\gamma} = 6\vec{i} - 9\vec{j} + 3\vec{k}$$

Como $\overrightarrow{n_\gamma} \perp \overrightarrow{AB}$, temos $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_\gamma} = 0$

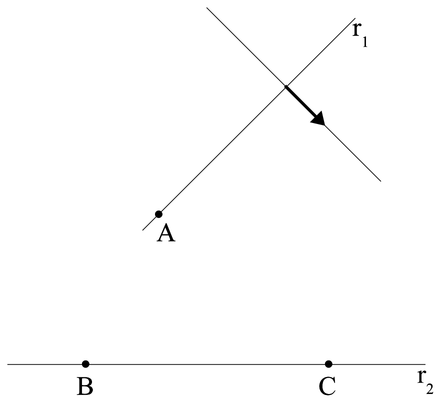
$$(m-1,-6,2).(6,-9,3) = 0$$

$$6m - 6 + 54 + 6 = 0$$

$$\boxed{m = -\frac{54}{6} = -9}$$

4ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Pontos $A = (1,1,1)$, $B = (1,0,-1)$ e $C = (2,1,-2)$
- Reta $y = 2x - 3$, $z = -x$



A reta r_1 é definida pelo ponto A e pela escolha do vetor $\overrightarrow{v_1} = (1,0,1)$, onde $\overrightarrow{v_1}$ é perpendicular ao vetor $\vec{v} = (1,2,-1)$ da reta dada, pois $\vec{v}.\overrightarrow{v_1} = 0$.

Logo a reta é definida como:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases}$$

A reta r_2 é definida pelo ponto B e pelo vetor $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{BC} = (1,1,-1)$, ou seja,

$$r_2 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = \quad + t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

Como os vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ são claramente LI, temos duas possibilidades para a posição relativa entre as retas, ou seja, reversas ou concorrentes.

Para diferenciar retas reversas das concorrentes, basta calcular o volume do paralelepípedo gerado pelos vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{AB} = (0,-1,-2)$, se o volume for positivo, as retas são reversas, se igual a zero, são concorrentes.

$$Volume = |[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{AB}]| = 0$$

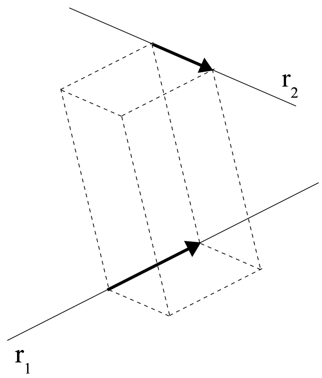
$$[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{AB}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$Volume = |-4| = 4 \neq 0$$

Logo as retas são $\boxed{\text{reversas}}$.

5ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Reta $r_1 : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3 - t \\ z = -4 - t \end{cases}$ e
- Reta $r_2 : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{-y-1}{2} = \dfrac{z}{-3}$



Como os vetores diretores $\overrightarrow{v_1} = (-2,-1,-1)$ e $\overrightarrow{v_2} = (1,-2,-3)$ das retas r_1 e r_2, respectivamente, são claramente LI, temos duas possibilidades para a posição relativa entre as retas, ou seja, reversas ou concorrentes.

Para diferenciar retas reversas das concorrentes, basta calcular o volume do paralelepípedo gerado pelos vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{AB} = (-2,2,4)$, se o volume for positivo, as retas são reversas, se igual a zero, são concorrentes.

$$Volume = |[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{AB}]| = 0$$

$$[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{AB}] = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = |4| = 4$$

logo são reversas.

• A distância entre as retas será obtida através de: $Volume = A_{base} \times h$, onde $A_{base} = ||\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}||$ e $h = d(r_1, r_2)$.

Como

$$\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i} - 7\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$A_{base} = \sqrt{1^2 + (-7)^2 + 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

logo,

$$\boxed{d(r_1, r_2) = \frac{4}{5\sqrt{3}} = \frac{4}{15}\sqrt{3}}$$

• O ângulo formado pelas retas, será calculado, como sendo o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, ou seja,

$$\cos(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = \frac{\overrightarrow{v_1} . \overrightarrow{v_2}}{||\overrightarrow{v_1}||||\overrightarrow{v_2}||}$$

$$\cos(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{14}}$$

$$\boxed{(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{14}}\right)}$$