UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CCEN - Departamento de Matemática
http://www.mat.ufpb.br/sergio

1ª Prova — Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Prof.: *Sérgio* Data: *13/Jan/2004* Turno: *Tarde*
Curso: Nome:

Período: *03.2* Turma: *08* Matrícula:

Obs.: Considere a constante $\mathcal{K}$ como sendo o último número da sua matrícula ⇑⇑⇑

1ª Questão Dados os pontos $A = (3, 0, 1)$, $B = (2, 1, 2)$ e $C = (\mathcal{K}, -1, 3)$.

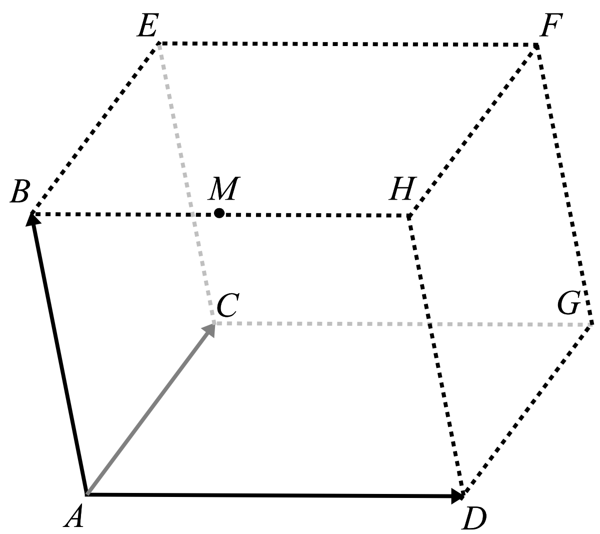
a) Verifique se A, B e C são vértices de um triângulo.

b) Esse triângulo é equilátero? (JUSTIFIQUE)

c) Determine a área desse triângulo.

2ª Questão Sabendo que $||\vec{u}|| = 6\sqrt{2}$, $||\vec{v}|| = (1 + 2\mathcal{K})$ e que 45^o é medida do ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, determine $\vec{u}.\vec{v}$ e $||3\vec{u} - 2\vec{v}||$.

3ª Questão Considere o seguinte paralelepípedo representado abaixo.



a) Escreva o vetor $\overrightarrow{GM}$ como uma combinação linear entre os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$, onde M é o ponto tal que

$$(\mathcal{K}+2)\overrightarrow{BM} = (\mathcal{K}+1)\overrightarrow{BH}$$

b) Considere que as coordenadas dos pontos são $A = (0,0,0)$, $B = (2,-1,\mathcal{K})$, $C = (3,1,1)$ e $D = (\mathcal{K},-2,-2)$. Os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ formam uma base para o $\mathbb{R}^3$? (JUSTIFIQUE SUA RESPOSTA).

c) Calcule o volume do paralelepípedo definido pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ do ítem anterior.

d) Escreva o vetor $\vec{d} = (-\mathcal{K}-2, -2, 2\mathcal{K})$ como combinação linear dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Boa Sorte

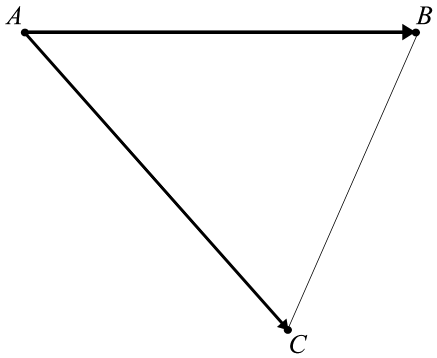
Nome:

Matrícula: ______ Assinatura

R E S P O S T A S

1ª Questão [3,0] Dados da questão:

- Ponto $A = (3, 0, 1)$,
- Ponto $B = (2, 1, 2)$ e
- Ponto $C = (\mathcal{K}, -1, 3)$.



Considere os vetores

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-1, 1, 1)$$
$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (\mathcal{K} - 3, -1, 2)$$
$$\vec{w} = \overrightarrow{BC} = (\mathcal{K} - 2, -2, 1)$$

a) Existem 3 maneiras de verificar se os pontos são vértices de um triângulo:

1. Verificando que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI.

   De fato, os vetores são LI, pois é impossível que $\vec{u} = x\vec{v}$ com $x \in \mathbb{R}$.

2. Calculando o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e verificando que o ângulo não é nulo, ou seja,

   $$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{||\vec{u}||.||\vec{v}||} \neq \pm 1$$

   Como $\vec{u}.\vec{v} = 4 - \mathcal{K}$, $||\vec{u}|| = \sqrt{3}$ e $||\vec{v}|| = \sqrt{\mathcal{K}^2 - 6\mathcal{K} + 14} =$ [1], temos:

   $$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\mathcal{K} - 19}{\sqrt{6}.\sqrt{\mathcal{K}^2 - 20\mathcal{K} + 103}}$$

   Que para qualquer valor de $\mathcal{K}$ temos $\cos(\vec{a}, \vec{b}) \neq \pm 1$.

3. Verificando que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam um paralelogramo, para tanto, verificaremos que a área é diferente de zero, ou seja, que o produto vetorial é não nulo.

   $$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ \mathcal{K} - 10 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

   $$\vec{u} \times \vec{v} = 3\vec{i} + (\mathcal{K} - 14)\vec{j} + (8 - \mathcal{K})\vec{k} \neq \overrightarrow{0}$$

b) Esse triângulo não é retângulo, pois

$$\vec{u}.\vec{v} = 2\mathcal{K} - 19 \neq 0$$
$$\vec{u}.\vec{w} = 2\mathcal{K} - 25 \neq 0$$
$$\vec{v}.\vec{w} = \mathcal{K}^2 - 22\mathcal{K} + 124 \neq 0$$

para todos os valores de $\mathcal{K}$.

c) A área desse triângulo[2] é igual a:

$$A_{\triangleleft} = \frac{||\vec{u} \times \vec{v}||}{2} = \frac{\sqrt{2\mathcal{K}^2 - 44\mathcal{K} + 269}}{2}$$

2ª Questão [2,0] Dados da questão:

- $||\vec{u}|| = \sqrt{3}$,
- $||\vec{v}|| = (10 + 2\mathcal{K})$ e
- ângulo $(\vec{u}, \vec{v}) = 30^o$.

Como $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||.\cos(\vec{u}, \vec{v})$, temos:

$$\vec{u}.\vec{v} = \sqrt{3}.(10 + 2\mathcal{K}).\frac{\sqrt{3}}{2} = 15 + 3\mathcal{K}$$

Para calcular $||\vec{u} + 2\vec{v}||^2$, usaremos o seguinte fato[3]:

$$||\vec{u} + 2\vec{v}||^2 = (\vec{u} + 2\vec{v}).(\vec{u} + 2\vec{v})$$

$$||\vec{u} + 2\vec{v}||^2 = \vec{u}.\vec{u} + 4\vec{v}.\vec{u} + 4\vec{v}.\vec{v}$$

$$||\vec{u} + 2\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 4\vec{v}.\vec{u} + 4||\vec{v}||^2$$

$$||\vec{u} + 2\vec{v}||^2 = 3 + 4.(15 + 3\mathcal{K}) + 4.(10 + 2\mathcal{K})^2$$

$$||\vec{u} + 2\vec{v}||^2 = 16\mathcal{K}^2 + 172\mathcal{K} + 463$$

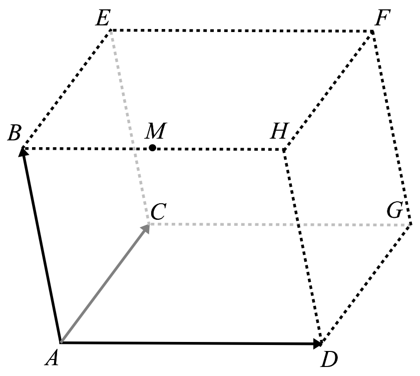
3ª Questão [3,0] Dados da questão:

[1] Valores de $||\vec{v}||$: $[\sqrt{14}, \sqrt{9}, \sqrt{6}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{14}, \sqrt{21}, \sqrt{30}, \sqrt{41}]$

[2] Valores de $||\vec{u} \times \vec{v}||$: $[\sqrt{269}, \sqrt{227}, \sqrt{189}, \sqrt{155}, \sqrt{125}, \sqrt{99}, \sqrt{77}, \sqrt{59}, \sqrt{45}, \sqrt{35}]$

[3] Valores de $||\vec{u} + 2\vec{v}||^2$: $[463, 651, 871, 1123, 1407, 1723, 2071, 2451, 2863, 3307]$

- figura:



- Pontos: $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 1, -1)$ e $C = (2, \mathcal{K} - 5, 1)$
- Vetor $\vec{d} = (-4, 12 - \mathcal{K}, -2)$.

a) Como $(\mathcal{K} + 2)\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BH}$, ou seja:

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{(\mathcal{K} + 2)}\overrightarrow{BH} = \frac{1}{(\mathcal{K} + 2)}\overrightarrow{AD}$$

logo,

$$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FG}$$
$$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$$
$$\overrightarrow{MG} = -\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{MG} = -\frac{1}{(\mathcal{K} + 2)}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{MG} = -1\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AC} + \left(\frac{\mathcal{K} + 1}{\mathcal{K} + 2}\right)\overrightarrow{AD}$$

b) Os 3 vetores

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \overrightarrow{AB} = (1, 1, -1) \\ \vec{v} &= \overrightarrow{AC} = (2, \mathcal{K} - 5, 1) \\ \vec{w} &= \overrightarrow{AD} = (1, -2, 0) \end{aligned}$$

formam uma base, se forem LI. Portanto pelo teorema, basta verificar que $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \overrightarrow{0}$ se, e somente se, $x = y = z = 0$ for a solução única, ou seja, que o sistema abaixo só possua a solução trivial.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrl} 1x & + & 2y & + & 1z & = 0 \\ 1x & + & (\mathcal{K} - 5)y & - & 2z & = 0 \\ -1x & + & 1y & + & 0z & = 0 \end{array} \right.$$

e para tanto, o determinante da matriz dos coeficientes, deve ser diferente de zero, ou seja:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & (\mathcal{K} - 5) & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathcal{K} + 2 \neq 0$$

Donde concluímos que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é base.

c) Para se calcular o volume basta calcular o produto misto entre os vetores, ou seja

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & (\mathcal{K} - 5) & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \mathcal{K} + 2$$

logo o volume é igual a $|\mathcal{K} + 2|$.

d) Para que o vetor $\vec{d} = -4\vec{i} + (12 - \mathcal{K})\vec{j} - 2\vec{k}$ seja uma combinação dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é preciso encontrar os valores x, y e $z \in \mathbb{R}$, tal que, $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{d}$, ou seja, basta resolver o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} x+ & & 2y & + & z = -4 \\ x+ & & (\mathcal{K} - 5)y & - & 2z = 12 - \mathcal{K} \\ -x+ & & y & & = -2 \end{array} \right.$$

tendo como solução $x = 1$, $y = -1$ e $z = -3$, ou seja:

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} - 3\vec{c}$$