UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CCEN - Departamento de Matemática

http://www.mat.ufpb.br/sergio

3ª Prova — **Cálculo Vetorial e Geometria Analítica**

Prof.: *Sérgio* Data: *07/Out/2003* Turno: *Tarde*

Curso: Nome:

Período: *03.1* Turma(s): Matrícula:

1ª Questão Considere a superfície dada pela equação

$$s_1 : [(-1)^{\mathcal{K}}]\frac{x^{\left[\frac{3+(-1)^{\mathcal{K}}}{2}\right]}}{8^{[1+(-1)^{\mathcal{K}}]}} + \frac{(y+5-\mathcal{K})^{\left[\frac{3-(-1)^{\mathcal{K}}}{2}\right]}}{8^{[1-(-1)^{\mathcal{K}}]}} + \frac{(z+\mathcal{K})^2}{100} = 1$$

Classifique-a, esboce-a e preencha a tabela abaixo, de acordo com as interseções com os planos paralelos aos planos coordenados.

$\mathcal{K} =$	Plano $\alpha : x =$	Plano $\beta : y =$	Plano $\gamma : z =$
Cônica:			
Equação:			
Eixo Focal:			
Centro	$C = (\quad,\quad,\quad)$	$C = (\quad,\quad,\quad)$	$C = (\quad,\quad,\quad)$
Raio	$r =$	$r =$	$r =$
a	$a =$	$a =$	$a =$
b	$b =$	$b =$	$b =$
c	$c =$	$c =$	$c =$
Foco(s)	$F_1 = (\quad,\quad,\quad)$ $F_2 = (\quad,\quad,\quad)$	$F_1 = (\quad,\quad,\quad)$ $F_2 = (\quad,\quad,\quad)$	$F_1 = (\quad,\quad,\quad)$ $F_2 = (\quad,\quad,\quad)$
Vértice(s)	$A_1 = (\quad,\quad,\quad)$ $A_2 = (\quad,\quad,\quad)$	$A_1 = (\quad,\quad,\quad)$ $A_2 = (\quad,\quad,\quad)$	$A_1 = (\quad,\quad,\quad)$ $A_2 = (\quad,\quad,\quad)$
Vértices	$B_1 = (\quad,\quad,\quad)$ $B_2 = (\quad,\quad,\quad)$	$B_1 = (\quad,\quad,\quad)$ $B_2 = (\quad,\quad,\quad)$	$B_1 = (\quad,\quad,\quad)$ $B_2 = (\quad,\quad,\quad)$
Assíntotas			
Diretriz			

2ª Questão Considere a superfície dada pela equação

$$S_2 : 16x^2 - 32\mathcal{K}x - [(-1)^{\mathcal{K}}]9y^2 + [(-1)^{\mathcal{K}}]9z^2 = 144 - 16\mathcal{K}^2$$

Classifique-a, esboce-a e preencha a tabela abaixo, de acordo com as interseções com os planos paralelos aos planos coordenados.

$\mathcal{K} =$	Plano $\alpha : x =$	Plano $\beta : y =$	Plano $\gamma : z =$
Cônica:			
Equação:			
Eixo Focal:			
Centro	$C = (\quad , \quad , \quad)$	$C = (\quad , \quad , \quad)$	$C = (\quad , \quad , \quad)$
Raio	$r =$	$r =$	$r =$
a	$a =$	$a =$	$a =$
b	$b =$	$b =$	$b =$
c	$c =$	$c =$	$c =$
Foco(s)	$F_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $F_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$F_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $F_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$F_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $F_2 = (\quad , \quad , \quad)$
Vértice(s)	$A_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $A_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$A_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $A_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$A_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $A_2 = (\quad , \quad , \quad)$
Vértices	$B_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $B_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$B_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $B_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$B_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $B_2 = (\quad , \quad , \quad)$
Assíntotas			
Diretriz			

Boa Sorte

Observações:

a) Substitua a constante $\mathcal{K}$, em todas as questões, pelo último número da sua matrícula;

b) Preencher as duas tabelas anteriores, conforme indicado.

R E S P O S T A S

Como a resolução depende do valor de $\mathcal{K}$, a resposta será dada em dois casos.

Caso: $\mathcal{K}$ é par

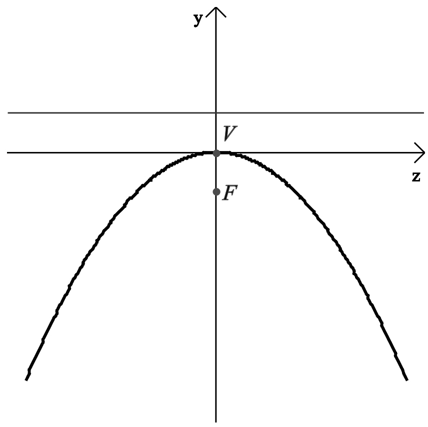
1ª Questão [5,0] Dados da questão:

$$S_1 : \frac{x^2}{64} + (y + 5 - \mathcal{K}) + \frac{(z + \mathcal{K})^2}{100} = 1$$

Na interseção da superfície S_1 com o plano $\boxed{\gamma : x = 0}$, temos a seguinte equação da **parábola**:

$$(y + 5 - \mathcal{K}) + \frac{(z + \mathcal{K})^2}{100} = 1$$

$$(z + \mathcal{K})^2 = -100(y + 5 - \mathcal{K} - 1)$$

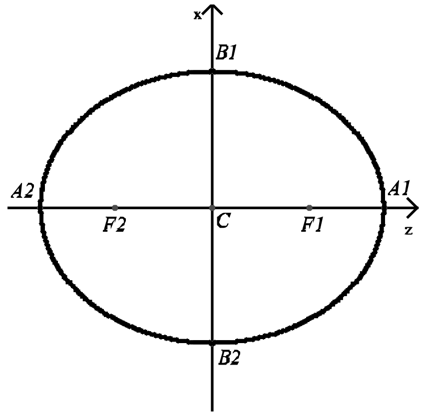


Donde:

- Vértice: $V = (0, \mathcal{K} - 4, -\mathcal{K})$
- $c = 16$
- Eixo focal: y
- Foco: $F = (0, \mathcal{K} - 20, \mathcal{K})$
- Reta diretriz: $y = \mathcal{K} + 12$

Na interseção da superfície S_1 com o plano $\boxed{\beta : y = \mathcal{K} - 5}$, temos a seguinte equação da **elípse**:

$$\frac{x^2}{64} + \frac{(z + \mathcal{K})^2}{100} = 1$$



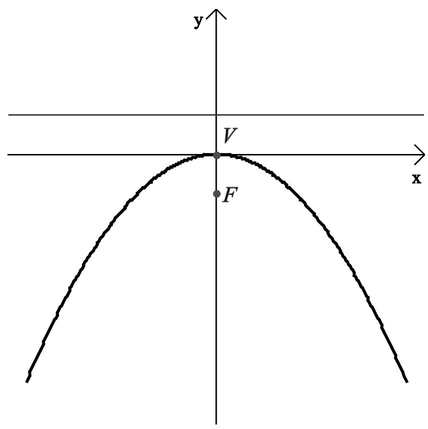
Donde:

- Centro: $C = (0, \mathcal{K} - 5, -\mathcal{K})$
- $a = 10$
- $b = 8$
- $c = \sqrt{100 - 64} = 6$
- Eixo focal: z
- Vértices: $A_1 = (0, \mathcal{K} - 4, -\mathcal{K} - 10)$ e $A_2 = (0, \mathcal{K} - 5, -\mathcal{K} + 10)$
- Focos: $F_1 = (0, \mathcal{K} - 4, -\mathcal{K} - 6)$ e $F_2 = (0, \mathcal{K} - 5, -\mathcal{K} + 6)$
- Eixo menor: $B_1 = (-8, \mathcal{K} - 5, -\mathcal{K})$ e $B_2 = (8, \mathcal{K} - 5, -\mathcal{K})$

Na interseção da superfície S_1 com o plano $\boxed{\alpha : z = -\mathcal{K}}$, temos a seguinte equação da **parábola**:

$$(y + 5 - \mathcal{K}) + \frac{x^2}{64} = 1$$

$$(x - 0)^2 = -64(y + 5 - \mathcal{K} - 1)$$

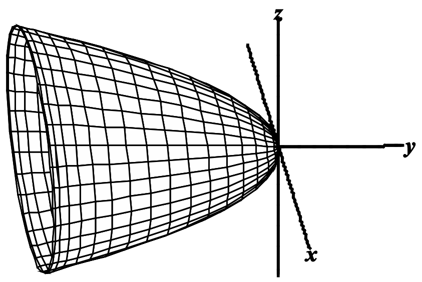


Donde:

- Vértice: $V = (0, \mathcal{K} - 4, -\mathcal{K})$

- $c = 16$
- Eixo focal: y
- Foco: $F = (0, \mathcal{K} - 20, -\mathcal{K})$
- Reta diretriz: $y = \mathcal{K} + 12$

Portanto a superfície S_1 é uma



Parabolóide Elíptica

2ª Questão [5,0] Dados da questão:

$S_2 : 16x^2 - 32\mathcal{K}x - 9y^2 + 9z^2 = 144 - 16\mathcal{K}^2$

Completando quadrados na equação acima temos:

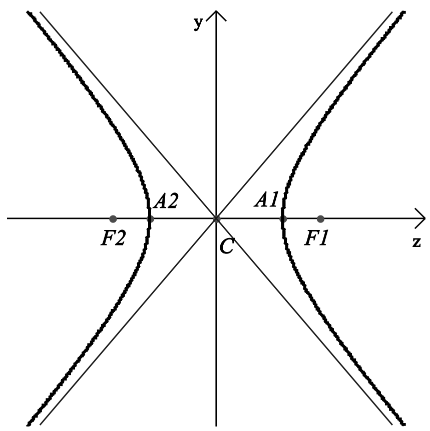
$16[(x-2\mathcal{K})^2 - \mathcal{K}^2] - 9y^2 + 9z^2 = 144 - 16\mathcal{K}^2$

$16(x-2\mathcal{K})^2 - 9y^2 + 9z^2 = 144 \quad \div (9 \times 16)$

$$S_2 : \frac{(x-2\mathcal{K})^2}{9} - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1$$

Estando a equação da superfície mais "agradável", começaremos a classificá-la.
Na interseção da superfície S_2 com o plano $\boxed{\gamma : x = 2\mathcal{K}}$, temos a seguinte equação da **hipérbole**:

$$\frac{z^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$$

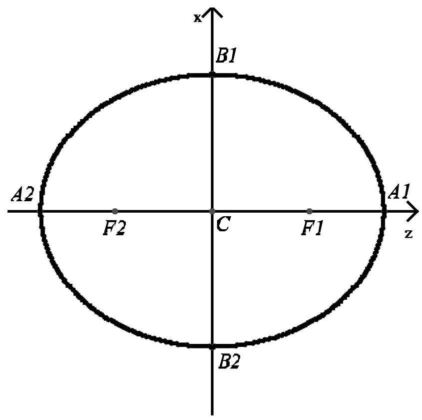


Donde:

- Centro: $C = (2\mathcal{K}, 0, 0)$
- $a = 4$
- $b = 4$
- $c = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$
- Eixo focal: z
- Vértices: $A_1 = (2\mathcal{K}, 0, 4)$ e $A_2 = (2\mathcal{K}, 0, -4)$
- Focos: $F_1 = (2\mathcal{K}, 0, 4\sqrt{2})$ e $F_2 = (2\mathcal{K}, 0, -4\sqrt{2})$
- Assíntotas: $y = \pm z$

Na interseção da superfície S_2 com o plano $\boxed{\beta : y = 0}$, temos a seguinte equação da **elípse**:

$$\frac{(x-2\mathcal{K})^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$$

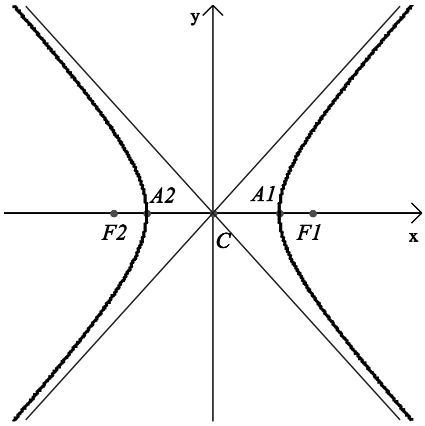


Donde:

- Centro: $C = (2\mathcal{K}, 0, 0)$
- $a = 4$
- $b = 3$
- $c = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$
- Eixo focal: z
- Vértices: $A_1 = (2\mathcal{K}, 0, 4)$ e $A_2 = (2\mathcal{K}, 0, -4)$
- Focos: $F_1 = (2\mathcal{K}, 0, \sqrt{7})$ e $F_2 = (2\mathcal{K}, 0, -\sqrt{7})$
- Eixo menor: $B_1 = (2\mathcal{K}+3, 0, 0)$ e $B_2 = (2\mathcal{K}-3, 0, 0)$

Na interseção da superfície S_2 com o plano $\boxed{\alpha : z = 0}$, temos a seguinte equação da **hipérbole**:

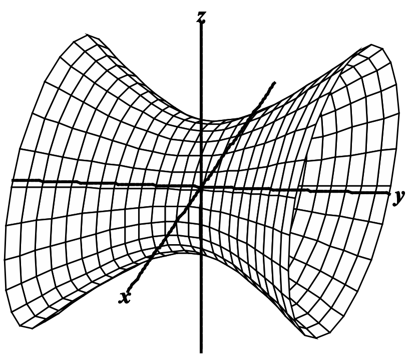
$$\frac{(x-2\mathcal{K})^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$



Donde:

- Centro: $C = (2\mathcal{K}, 0, 0)$
- $a = 3$
- $b = 4$
- $c = \sqrt{9+16} = 5$
- Eixo focal: x
- Vértices: $A_1 = (2\mathcal{K} - 3, 0, 0)$ e $A_2 = (2\mathcal{K} + 3, 0, 0)$
- Focos: $F_1 = (2\mathcal{K} - 5, 0, 0)$ e $F_2 = (2\mathcal{K} + 5, 0, 0)$
- Assíntotas: $y = \pm\frac{4}{3}x$

Portanto a superfície S_2 é uma



Hiperbolóide Elíptica de uma folha

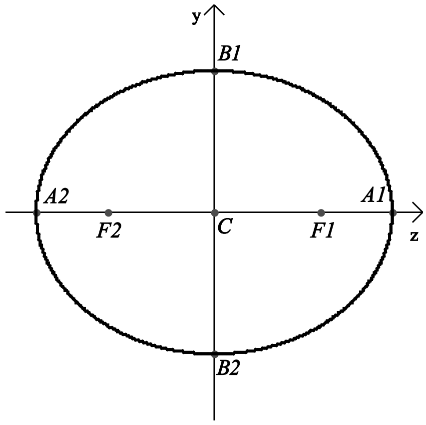
Caso: $\mathcal{K}$ é ímpar

1ª Questão [5,0] Dados da questão:

$$S_1 : -x + \frac{(y+5-\mathcal{K})^2}{64} + \frac{(z+\mathcal{K})^2}{100} = 1$$

Na interseção da superfície S_1 com o plano $\boxed{\gamma : x = 0}$, temos a seguinte equação da **elípse**:

$$\frac{(y+5-\mathcal{K})^2}{64} + \frac{(z+\mathcal{K})^2}{100} = 1$$



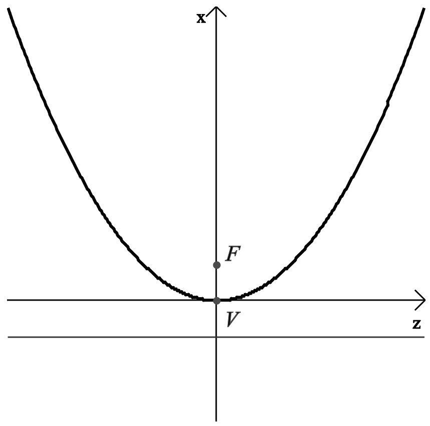
Donde:

- Centro: $C = (0, \mathcal{K} - 5, -\mathcal{K})$
- $a = 10$
- $b = 8$
- $c = \sqrt{100-64} = 6$
- Eixo focal: z
- Vértices: $A_1 = (0, \mathcal{K} - 5, -\mathcal{K} - 10)$ e $A_2 = (0, \mathcal{K} - 5, -\mathcal{K} + 10)$
- Focos: $F_1 = (0, \mathcal{K} - 5, -\mathcal{K} - 6)$ e $F_2 = (0, \mathcal{K} - 5, -\mathcal{K} + 6)$
- Eixo menor: $B_1 = (0, \mathcal{K} + 3, -\mathcal{K})$ e $B_2 = (0, \mathcal{K} - 13, -\mathcal{K})$

Na interseção da superfície S_1 com o plano $\boxed{\beta : y = \mathcal{K} - 5}$, temos a seguinte equação da **parábola**:

$$-x + \frac{(z+\mathcal{K})^2}{100} = 1$$

$$(z+\mathcal{K})^2 = 100(x+1)$$



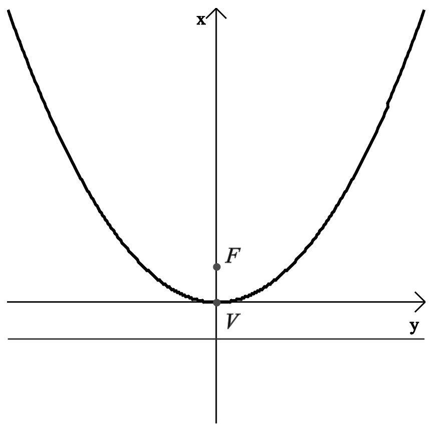
Donde:

- Vértice: $V = (-1, \mathcal{K} - 5, -\mathcal{K})$
- $c = 25$
- Eixo focal: x
- Foco: $F = (24, \mathcal{K} - 5, -\mathcal{K})$
- Reta diretriz: $x = -26$

Na interseção da superfície S_1 com o plano $\boxed{\alpha : z = -\mathcal{K}}$, temos a seguinte equação da **parábola**:

$$-x + \frac{(y + 5 - \mathcal{K})^2}{64} = 1$$

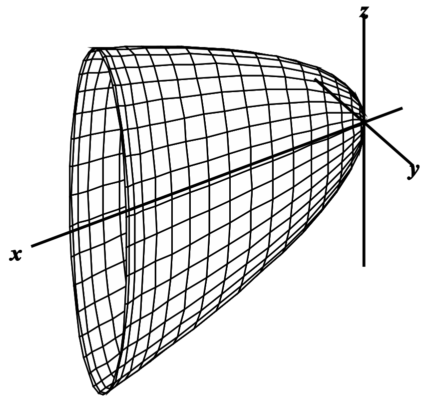
$$(y + 5 - \mathcal{K})^2 = 64(x + 1)$$



Donde:

- Vértice: $V = (-1, \mathcal{K} - 5, -\mathcal{K})$
- $c = 16$
- Eixo focal: x
- Foco: $F = (15, \mathcal{K} - 5, -\mathcal{K})$
- Reta diretriz: $x = -17$

Portanto a superfície S_1 é uma



Parabolóide Elíptica

2ª Questão [5,0] Dados da questão:

$$S_2 : 16x^2 - 32\mathcal{K}x + 9y^2 - 9z^2 = 144 - 16\mathcal{K}^2$$

Completando quadrados na equação acima temos:

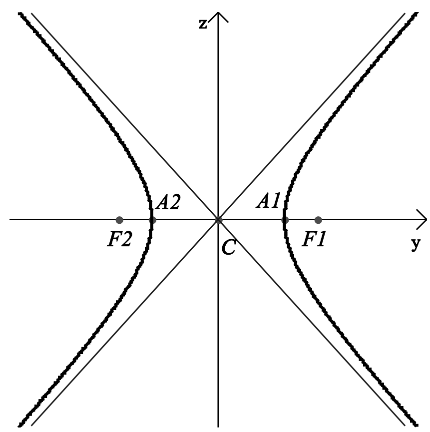
$$16[(x - 2\mathcal{K})^2 - \mathcal{K}^2] + 9y^2 - 9z^2 = 144 - 16\mathcal{K}^2$$

$$16(x - 2\mathcal{K})^2 + 9y^2 - 9z^2 = 144 \quad \div (9 \times 16)$$

$$S_2 : \frac{(x - 2\mathcal{K})^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{16} = 1$$

Estando a equação da superfície mais "agradável", começaremos a classificá-la.
Na interseção da superfície S_2 com o plano $\boxed{\gamma : x = 2\mathcal{K}}$, temos a seguinte equação da **hipérbole**:

$$\frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{16} = 1$$



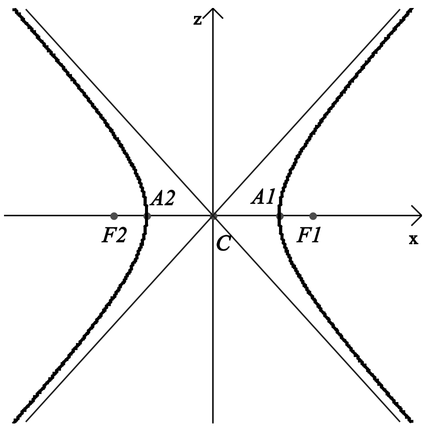
Donde:

- Centro: $C = (2\mathcal{K}, 0, 0)$
- $a = 4$
- $b = 4$
- $c = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$

- Eixo focal: y
- Vértices: $A_1 = (2\mathcal{K}, 4, 0)$ e $A_2 = (2\mathcal{K}, -4, 0)$
- Focos: $F_1 = (2\mathcal{K}, 4\sqrt{2}, 0)$ e $F_2 = (2\mathcal{K}, -4\sqrt{2}, 0)$
- Assíntotas: $z = \pm y$

Na interseção da superfície S_2 com o plano $\boxed{\beta : y = 0}$, temos a seguinte equação da **hipérbole**:

$$\frac{(x-2\mathcal{K})^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$$

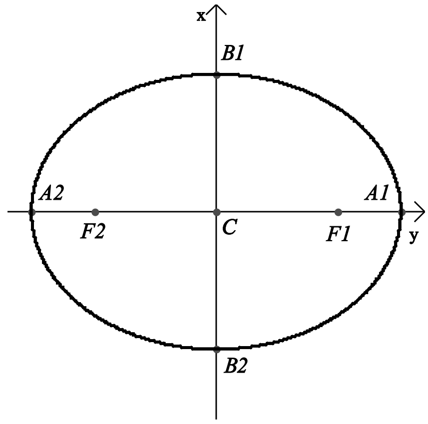


Donde:

- Centro: $C = (2\mathcal{K}, 0, 0)$
- $a = 3$
- $b = 4$
- $c = \sqrt{16+9} = 5$
- Eixo focal: x
- Vértices: $A_1 = (2\mathcal{K}+3, 0, 0)$ e $A_2 = (2\mathcal{K}-3, 0, 0)$
- Focos: $F_1 = (2\mathcal{K}-5, 0, 0)$ e $F_2 = (2\mathcal{K}+5, 0, 0)$
- Assíntotas: $y = \pm\frac{4}{3}x$

Na interseção da superfície S_2 com o plano $\boxed{\alpha : z = 0}$, temos a seguinte equação da **elípse**:

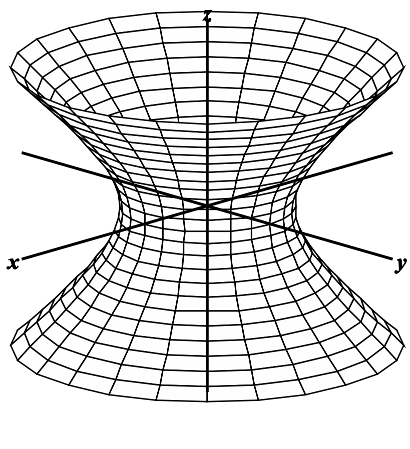
$$\frac{(x-2\mathcal{K})^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$



Donde:

- Centro: $C = (2\mathcal{K}, 0, 0)$
- $a = 4$
- $b = 3$
- $c = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$
- Eixo focal: y
- Vértices: $A_1 = (2\mathcal{K}, 4, 0)$ e $A_2 = (2\mathcal{K}, -4, 0)$
- Focos: $F_1 = (2\mathcal{K}, \sqrt{7}, 0)$ e $F_2 = (2\mathcal{K}, -\sqrt{7}, 0)$
- Eixo menor: $B_1 = (2\mathcal{K}+3, 0, 0)$ e $B_2 = (2\mathcal{K}-3, 0, 0)$

Portanto a superfície S_2 é uma



Hiperbolóide Elíptica de uma folha