UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CCEN - Departamento de Matemática

http://www.mat.ufpb.br/sergio

3ª Prova — Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Prof.: *Sérgio* Data: *07/Out/2003* Turno: *Noite*

Curso: ____________ Nome: ______________________________

Período: *03.1* Turma(s): ☐☐ Matrícula: ☐☐☐☐☐☐☐◯

1ª Questão Considere a superfície dada pela equação

$$s_1 : \frac{(x+\mathcal{K})^2}{100} + [(-1)^{\mathcal{K}}]\frac{y^{\left[\frac{3+(-1)^{\mathcal{K}}}{2}\right]}}{8^{[1+(-1)^{\mathcal{K}}]}} + \frac{(z+5-\mathcal{K})^{\left[\frac{3-(-1)^{\mathcal{K}}}{2}\right]}}{8^{[1-(-1)^{\mathcal{K}}]}} = 1$$

Classifique-a, esboce-a e preencha a tabela abaixo, de acordo com as interseções com os planos paralelos aos planos coordenados.

$\mathcal{K} =$	Plano $\alpha : x =$	Plano $\beta : y =$	Plano $\gamma : z =$
Cônica:			
Equação:			
Eixo Focal:			
Centro	$C = (\quad,\quad,\quad)$	$C = (\quad,\quad,\quad)$	$C = (\quad,\quad,\quad)$
Raio	$r =$	$r =$	$r =$
a	$a =$	$a =$	$a =$
b	$b =$	$b =$	$b =$
c	$c =$	$c =$	$c =$
Foco(s)	$F_1 = (\quad,\quad,\quad)$ $F_2 = (\quad,\quad,\quad)$	$F_1 = (\quad,\quad,\quad)$ $F_2 = (\quad,\quad,\quad)$	$F_1 = (\quad,\quad,\quad)$ $F_2 = (\quad,\quad,\quad)$
Vértice(s)	$A_1 = (\quad,\quad,\quad)$ $A_2 = (\quad,\quad,\quad)$	$A_1 = (\quad,\quad,\quad)$ $A_2 = (\quad,\quad,\quad)$	$A_1 = (\quad,\quad,\quad)$ $A_2 = (\quad,\quad,\quad)$
Vértices	$B_1 = (\quad,\quad,\quad)$ $B_2 = (\quad,\quad,\quad)$	$B_1 = (\quad,\quad,\quad)$ $B_2 = (\quad,\quad,\quad)$	$B_1 = (\quad,\quad,\quad)$ $B_2 = (\quad,\quad,\quad)$
Assíntotas			
Diretriz			

2ª Questão Considere a superfície dada pela equação

$$S_2 : [(-1)^{\mathcal{K}}]9x^2 + 16y^2 - 32\mathcal{K}y - [(-1)^{\mathcal{K}}]9z^2 = 144 - 16\mathcal{K}^2$$

Classifique-a, esboce-a e preencha a tabela abaixo, de acordo com as interseções com os planos paralelos aos planos coordenados.

$\mathcal{K} =$	Plano $\alpha : x =$	Plano $\beta : y =$	Plano $\gamma : z =$
Cônica:			
Equação:			
Eixo Focal:			
Centro	$C = (\quad , \quad , \quad)$	$C = (\quad , \quad , \quad)$	$C = (\quad , \quad , \quad)$
Raio	$r =$	$r =$	$r =$
a	$a =$	$a =$	$a =$
b	$b =$	$b =$	$b =$
c	$c =$	$c =$	$c =$
Foco(s)	$F_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $F_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$F_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $F_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$F_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $F_2 = (\quad , \quad , \quad)$
Vértice(s)	$A_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $A_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$A_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $A_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$A_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $A_2 = (\quad , \quad , \quad)$
Vértices	$B_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $B_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$B_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $B_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$B_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $B_2 = (\quad , \quad , \quad)$
Assíntotas			
Diretriz			

Boa Sorte

Observações:

a) Substitua a constante $\mathcal{K}$, em todas as questões, pelo último número da sua matrícula;

b) Preencher as duas tabelas anteriores, conforme indicado.

R E S P O S T A S

Como a resolução depende do valor de $\mathcal{K}$, a resposta será dada em dois casos.

Caso: $\mathcal{K}$ é par

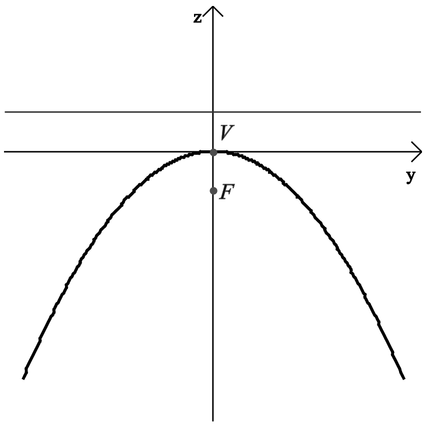
1ª Questão [5,0] Dados da questão:

$$S_1 : \frac{(x+\mathcal{K})^2}{100} + \frac{y^2}{64} + (z+5-\mathcal{K}) = 1$$

Na interseção da superfície S_1 com o plano $\boxed{\alpha : x = -\mathcal{K}}$, temos a seguinte equação da **parábola**:

$$\frac{y^2}{64} + (z+5-\mathcal{K}) = 1$$

$$(y-0)^2 = -64(z+5-\mathcal{K}-1)$$



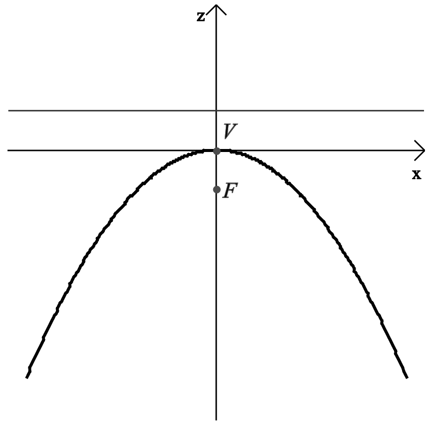
Donde:

- Vértice: $V = (-\mathcal{K}, 0, \mathcal{K}-4)$
- $c = 16$
- Eixo focal: z
- Foco: $F = (-\mathcal{K}, 0, \mathcal{K}-20)$
- Reta diretriz: $z = \mathcal{K}+12$

Na interseção da superfície S_1 com o plano $\boxed{\gamma : y = 0}$, temos a seguinte equação da **parábola**:

$$\frac{(x+\mathcal{K})^2}{100} + (z+5-\mathcal{K}) = 1$$

$$(x+\mathcal{K})^2 = -100(z+5-\mathcal{K}-1)$$

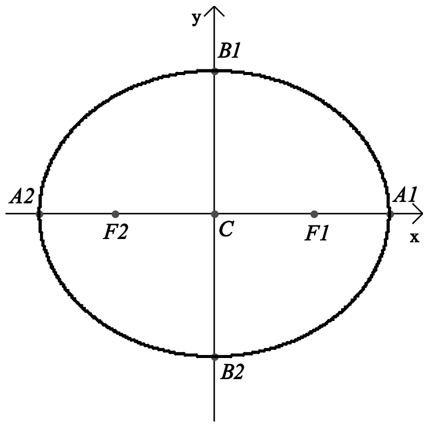


Donde:

- Vértice: $V = (-\mathcal{K}, 0, \mathcal{K}-4)$
- $c = 16$
- Eixo focal: z
- Foco: $F = (-\mathcal{K}, 0, \mathcal{K}-20)$
- Reta diretriz: $z = \mathcal{K}+12$

Na interseção da superfície S_1 com o plano $\boxed{\beta : z = \mathcal{K}-5}$, temos a seguinte equação da **elípse**:

$$\frac{(x+\mathcal{K})^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

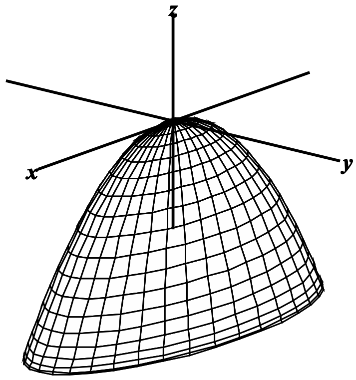


Donde:

- Centro: $C = (-\mathcal{K}, 0, \mathcal{K}-5)$
- $a = 10$
- $b = 8$
- $c = \sqrt{100-64} = 6$
- Eixo focal: x
- Vértices: $A_1 = (-\mathcal{K}-10, 0, \mathcal{K}-4)$ e $A_2 = (-\mathcal{K}+10, 0, \mathcal{K}-5)$

- Focos: $F_1 = (-\mathcal{K} - 6, 0, \mathcal{K} - 4)$ e $F_2 = (-\mathcal{K} + 6, 0, \mathcal{K} - 5)$
- Eixo menor: $B_1 = (-\mathcal{K}, -8, \mathcal{K} - 5)$ e $B_2 = (-\mathcal{K}, 8, \mathcal{K} - 5)$

Portanto a superfície S_1 é uma



Parabolóide Elíptica

2ª Questão [5,0] Dados da questão:

$S_2 : 9x^2 + 16y^2 - 32\mathcal{K}y - 9z^2 = 144 - 16\mathcal{K}^2$

Completando quadrados na equação acima temos:

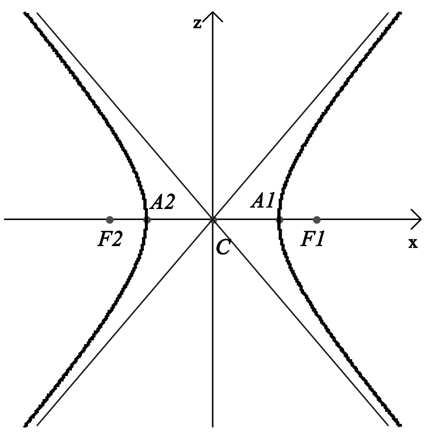
$9x^2 + 16[(y - 2\mathcal{K})^2 - \mathcal{K}^2] - 9z^2 = 144 - 16\mathcal{K}^2$

$9x^2 + 16(y - 2\mathcal{K})^2 - 9z^2 = 144 \quad \div (9 \times 16)$

$$S_2 : \frac{x^2}{16} + \frac{(y - 2\mathcal{K})^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$$

Estando a equação da superfície mais "agradável", começaremos a classificá-la. Na interseção da superfície S_2 com o plano $\boxed{\alpha : x = 0}$, temos a seguinte equação da **hipérbole**:

$$\frac{(y - 2\mathcal{K})^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$$

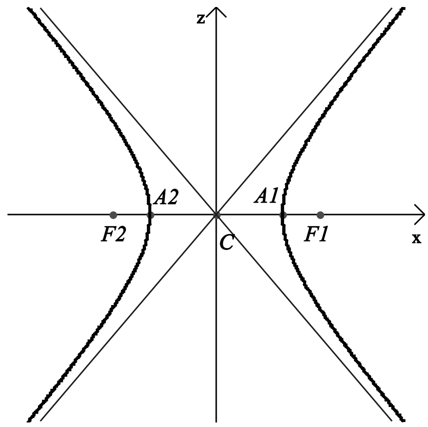


Donde:

- Centro: $C = (0, 2\mathcal{K}, 0)$
- $a = 3$
- $b = 4$
- $c = \sqrt{9 + 16} = 5$
- Eixo focal: y
- Vértices: $A_1 = (0, 2\mathcal{K} - 3, 0)$ e $A_2 = (0, 2\mathcal{K} + 3, 0)$
- Focos: $F_1 = (0, 0, 2\mathcal{K} - 5)$ e $F_2 = (0, 2\mathcal{K} + 5, 0)$
- Assíntotas: $z = \pm\frac{4}{3}y$

Na interseção da superfície S_2 com o plano $\boxed{\gamma : y = 2\mathcal{K}}$, temos a seguinte equação da **hipérbole**:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{16} = 1$$

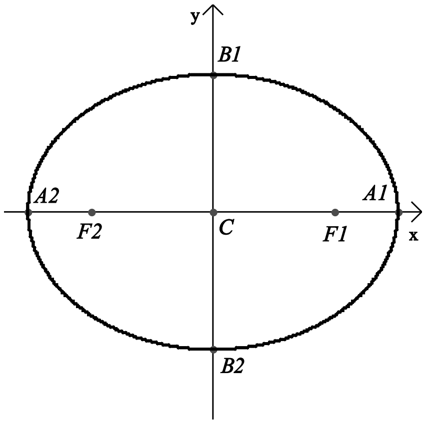


Donde:

- Centro: $C = (0, 2\mathcal{K}, 0)$
- $a = 4$
- $b = 4$
- $c = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$
- Eixo focal: x
- Vértices: $A_1 = (4, 2\mathcal{K}, 0)$ e $A_2 = (-4, 2\mathcal{K}, 0)$
- Focos: $F_1 = (4\sqrt{2}, 2\mathcal{K}, 0)$ e $F_2 = (-4\sqrt{2}, 2\mathcal{K}, 0)$
- Assíntotas: $z = \pm x$

Na interseção da superfície S_2 com o plano $\boxed{\beta : z = 0}$, temos a seguinte equação da **elípse**:

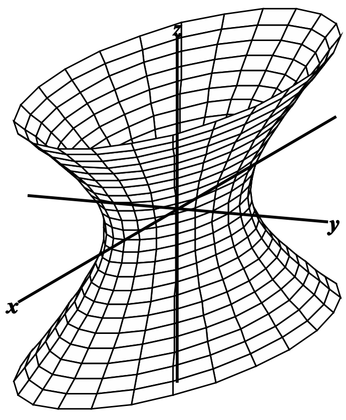
$$\frac{x^2}{16} + \frac{(y-2\mathcal{K})^2}{9} = 1$$



Donde:

- Centro: $C = (0, 2\mathcal{K}, 0)$
- $a = 4$
- $b = 3$
- $c = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$
- Eixo focal: x
- Vértices: $A_1 = (4, 2\mathcal{K}, 0)$ e $A_2 = (-4, 2\mathcal{K}, 0)$
- Focos: $F_1 = (\sqrt{7}, 2\mathcal{K}, 0)$ e $F_2 = (-\sqrt{7}, 2\mathcal{K}, 0)$
- Eixo menor: $B_1 = (0, 2\mathcal{K}+3, 0)$ e $B_2 = (0, 2\mathcal{K}-3, 0)$

Portanto a superfície S_2 é uma



Hiperbolóide Elíptica de uma folha

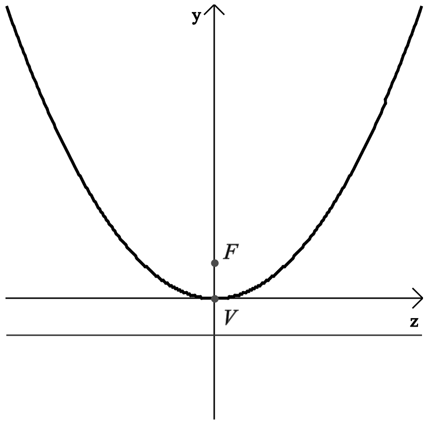
Caso: $\mathcal{K}$ é ímpar

1ª Questão [5,0] Dados da questão:

$$S_1 : \frac{(x+\mathcal{K})^2}{100} - y + \frac{(z+5-\mathcal{K})^2}{64} = 1$$

Na interseção da superfície S_1 com o plano $\boxed{\alpha : x = -\mathcal{K}}$, temos a seguinte equação da **parábola**:

$$-y + \frac{(z+5-\mathcal{K})^2}{64} = 1$$
$$(z+5-\mathcal{K})^2 = 64(y+1)$$

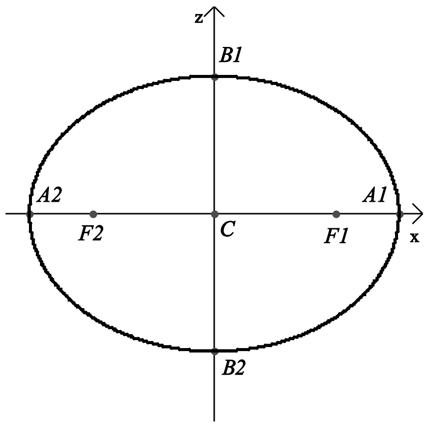


Donde:

- Vértice: $V = (-\mathcal{K}, -1, \mathcal{K}-5)$
- $c = 16$
- Eixo focal: y
- Foco: $F = (-\mathcal{K}, 15, \mathcal{K}-5)$
- Reta diretriz: $y = -17$

Na interseção da superfície S_1 com o plano $\boxed{\gamma : y = 0}$, temos a seguinte equação da **elípse**:

$$\frac{(x+\mathcal{K})^2}{100} + \frac{(z+5-\mathcal{K})^2}{64} = 1$$



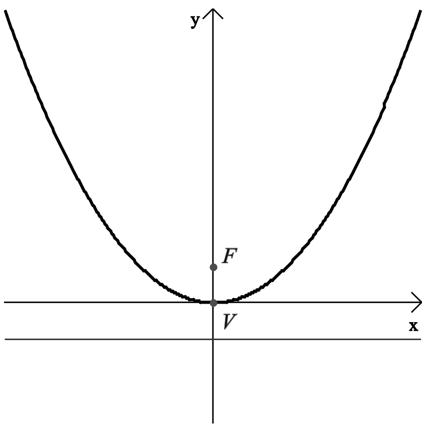
Donde:

- Centro: $C = (-\mathcal{K}, 0, \mathcal{K}-5)$

- $a = 10$
- $b = 8$
- $c = \sqrt{100-64} = 6$
- Eixo focal: x
- Vértices: $A_1 = (-\mathcal{K}-10, 0, \mathcal{K}-5)$ e $A_2 = (-\mathcal{K}+10, 0, \mathcal{K}-5)$
- Focos: $F_1 = (-\mathcal{K}-6, 0, \mathcal{K}-5)$ e $F_2 = (-\mathcal{K}+6, 0, \mathcal{K}-5)$
- Eixo menor: $B_1 = (-\mathcal{K}, 0, \mathcal{K}+3)$ e $B_2 = (-\mathcal{K}, 0, \mathcal{K}-13)$

Na interseção da superfície S_1 com o plano $\boxed{\beta : z = \mathcal{K}-5}$, temos a seguinte equação da **parábola**:

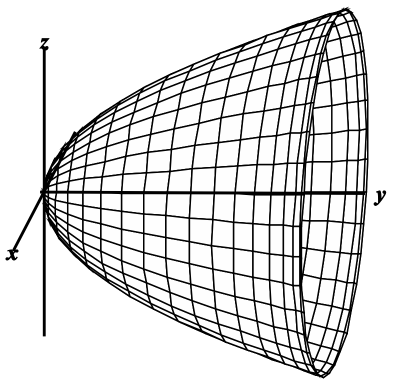
$$\frac{(x+\mathcal{K})^2}{100} - y = 1$$
$$(x+\mathcal{K})^2 = 100(y+1)$$



Donde:

- Vértice: $V = (-\mathcal{K}, -1, \mathcal{K}-5)$
- $c = 25$
- Eixo focal: y
- Foco: $F = (-\mathcal{K}, 24, \mathcal{K}-5)$
- Reta diretriz: $y = -26$

Portanto a superfície S_1 é uma



Parabolóide Elíptica

2ª Questão [5,0] Dados da questão:

$$S_2 : -9x^2+16y^2-32\mathcal{K}y+9z^2 = 144-16\mathcal{K}^2$$

Completando quadrados na equação acima temos:

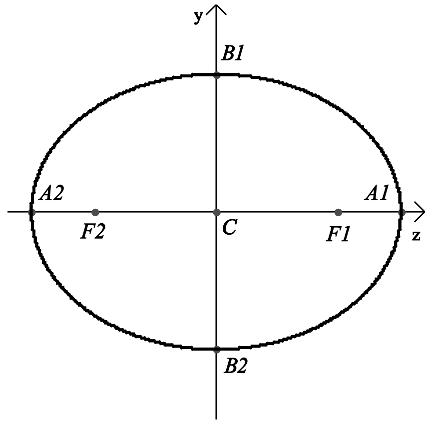
$$-9x^2+16[(y-2\mathcal{K})^2-\mathcal{K}^2]+9z^2 = 144-16\mathcal{K}^2$$

$$-9x^2+16(y-2\mathcal{K})^2+9z^2 = 144 \quad \div(9\times 16)$$

$$S_2 : -\frac{x^2}{16} + \frac{(y-2\mathcal{K})^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$$

Estando a equação da superfície mais "agradável", começaremos a classificá-la.
Na interseção da superfície S_2 com o plano $\boxed{\alpha : x = 0}$, temos a seguinte equação da **elípse**:

$$\frac{(y-2\mathcal{K})^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$$

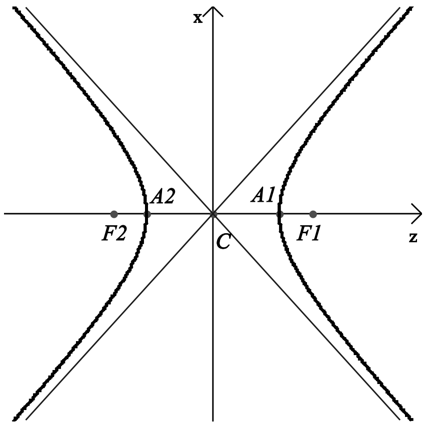


Donde:

- Centro: $C = (0, 2\mathcal{K}, 0)$
- $a = 4$
- $b = 3$
- $c = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$
- Eixo focal: z
- Vértices: $A_1 = (0, 2\mathcal{K}, 4)$ e $A_2 = (0, -4, 2\mathcal{K})$
- Focos: $F_1 = (0, 2\mathcal{K}, \sqrt{7})$ e $F_2 = (0, 2\mathcal{K}, -\sqrt{7})$
- Eixo menor: $B_1 = (0, 2\mathcal{K}+3, 0)$ e $B_2 = (0, 2\mathcal{K}-3, 0)$

Na interseção da superfície S_2 com o plano $\boxed{\gamma : y = 2\mathcal{K}}$, temos a seguinte equação da **hipérbole**:

$$-\frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1$$

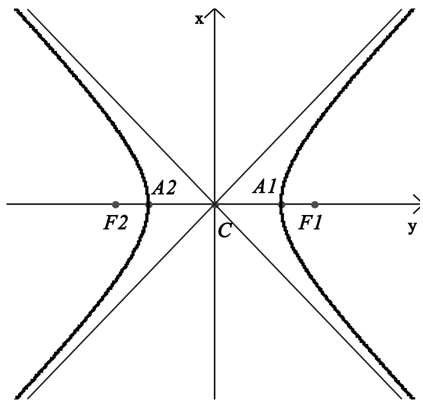


Donde:

- Centro: $C = (0, 2\mathcal{K}, 0)$
- $a = 4$
- $b = 4$
- $c = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$
- Eixo focal: z
- Vértices: $A_1 = (0, 2\mathcal{K}, 4)$ e $A_2 = (0, 2\mathcal{K}, -4)$
- Focos: $F_1 = (0, 2\mathcal{K}, 4\sqrt{2})$ e $F_2 = (0, 2\mathcal{K}, -4\sqrt{2})$
- Assíntotas: $x = \pm z$

Na interseção da superfície S_2 com o plano $\boxed{\beta : z = 0}$, temos a seguinte equação da **hipérbole**:

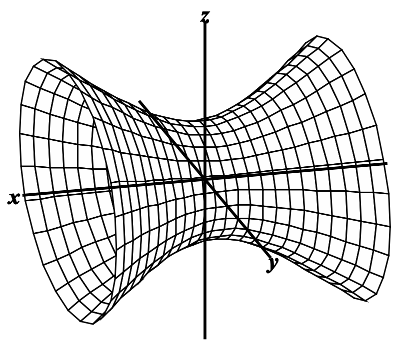
$$-\frac{x^2}{16} + \frac{(y - 2\mathcal{K})^2}{9} = 1$$



Donde:

- Centro: $C = (0, 2\mathcal{K}, 0)$
- $a = 3$
- $b = 4$
- $c = \sqrt{16 + 9} = 5$
- Eixo focal: y
- Vértices: $A_1 = (0, 2\mathcal{K} + 3, 0)$ e $A_2 = (0, 2\mathcal{K} - 3, 0)$
- Focos: $F_1 = (0, 2\mathcal{K} - 5, 0)$ e $F_2 = (0, 2\mathcal{K} + 5, 0)$
- Assíntotas: $z = \pm\frac{4}{3}y$

Portanto a superfície S_2 é uma



Hiperbolóide Elíptica de uma folha