



2ª Prova

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Prof.: Data: 08/Jul/2003

Turno: Manhã

Curso: Nome:

Período: 03.1

Turma(s):

Matrícula:

1ª Questão Determinar a equação cartesiana no plano π que passa pelo ponto $A = (1, -1, 2)$ e é paralelo ao plano γ cujas

equações paramétricas são $\gamma : \begin{cases} x = 2 - 3p + 2q \\ y = 1 - 3p + q \\ z = 3 + p + 3q \end{cases}$

2ª Questão Determine a equação normal do plano α que contém

as retas $r_1 : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ e $r_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{-y-1}{2} = \frac{z}{-3}$

3ª Questão Determine o valor de m para que a reta determinada pelos pontos $A = (1, 5, 0)$ e $B = (m, -1, 2)$ seja paralela ao plano

$\gamma : \begin{cases} x = 1 + 3p \\ y = 1 + 2p + q \\ z = 3 + 3q \end{cases}$

4ª Questão Sejam r_1 uma reta que passa pelo ponto $A = (1, 1, 1)$ e é perpendicular à reta $y = 2x - 3$, $z = -x$ e r_2 a reta que passa pelos pontos $B = (1, 0, -1)$ e $C = (2, 1, -2)$. Determine a posição relativa entre r_1 e r_2 .

5ª Questão Calcule a distância e o ângulo entre as retas

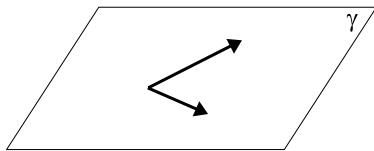
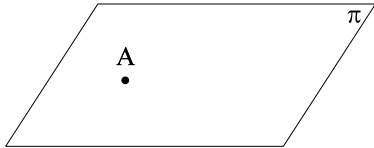
$r_1 : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3 - t \\ z = -4 - t \end{cases}$ e $r_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{-y-1}{2} = \frac{z}{-3}$

RESPOSTAS

1ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Ponto $A = (1, -1, 2)$

- Plano $\gamma : \begin{cases} x = 2 - 3p + 2q \\ y = 1 - 3p + q \\ z = 3 + p + 3q \end{cases}$



Para determinar o vetor normal do plano π , vamos utilizar dois vetores paralelos ao plano γ , ou seja $\vec{v}_1 = (-3, -3, 1)$ e $\vec{v}_2 = (2, 1, 3)$, logo

$$\vec{n}_\pi = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n}_\pi = -10\vec{i} - 11\vec{j} + 3\vec{k}$$

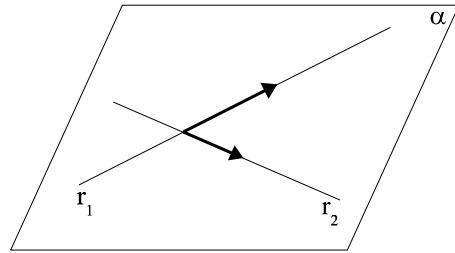
Para determinar a equação do plano π vamos utilizar o fato que os vetores \vec{AP} e \vec{n}_π são perpendiculares, ou seja, $\vec{AP} \cdot \vec{n}_\pi = 0$

$$(x - 1, y + 1, z - 2) \cdot (-10, -11, 3) = 0$$

$$\boxed{\pi : -10x + 11y + 3z + 15 = 0}$$

2ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Reta $r_1 : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ e
- Reta $r_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{-y-1}{2} = \frac{z}{-3}$.



Considere $\vec{u} = (1, -1, -3)$ e $\vec{v} = (1, -2, -3)$ os vetores diretores das retas r_1 e r_2 e o ponto $A = (-1, 2, 2)$ da reta r_1 , logo o plano α procurado é definido pelo ponto A e pelos vetores \vec{u} e \vec{v} .

Para determinar o vetor normal do plano α , vamos utilizar os vetores \vec{u} e \vec{v} , logo

$$\vec{n}_\alpha = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n}_\alpha = -3\vec{i} - \vec{k}$$

Para determinar a equação do plano π vamos utilizar o fato que os vetores \vec{AP} e \vec{n}_π são perpendiculares, ou seja, $\vec{AP} \cdot \vec{n}_\alpha = 0$

$$(x + 1, y - 2, z - 2) \cdot (-3, 0, -1) = 0$$

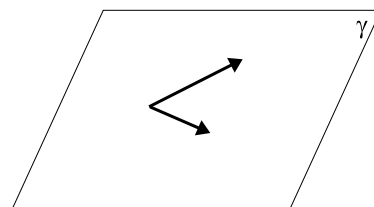
$$\boxed{\alpha : -3x - z - 1 = 0}$$

3ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Pontos $A = (1, 5, 0)$ e

$$B = (m, -1, 2)$$

- Plano $\gamma : \begin{cases} x = 1 + 3p \\ y = 1 + 2p + q \\ z = 3 + 3q \end{cases}$



Para determinar a reta definida pelos ponto A e B paralela ao plano γ , o vetor diretor $\overrightarrow{AB} = (m-1, -6, 2)$ deve ser perpendicular ao vetor \vec{n}_γ .

Para determinar o vetor normal do plano γ , vamos utilizar dois vetores paralelos ao plano, ou seja $\vec{v}_1 = (3, 2, 0)$ e $\vec{v}_2 = (0, 1, 3)$, logo

$$\vec{n}_\gamma = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n}_\gamma = 6\vec{i} - 9\vec{j} + 3\vec{k}$$

Como $\vec{n}_\gamma \perp \overrightarrow{AB}$, temos $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_\gamma = 0$

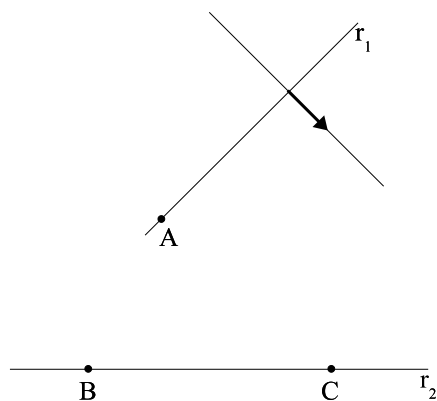
$$(m-1, -6, 2) \cdot (6, -9, 3) = 0$$

$$6m - 6 + 54 + 6 = 0$$

$$m = -\frac{54}{6} = -9$$

4ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Pontos $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 0, -1)$ e $C = (2, 1, -2)$
- Reta $y = 2x - 3$, $z = -x$



A reta r_1 é definida pelo ponto A e pela escolha do vetor $\vec{v}_1 = (1, 0, 1)$, onde \vec{v}_1 é perpendicular ao vetor $\vec{v} = (1, 2, -1)$ da reta dada, pois $\vec{v} \cdot \vec{v}_1 = 0$.

Logo a reta é definida como:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases}$$

A reta r_2 é definida pelo ponto B e pelo vetor $\vec{v}_2 = \overrightarrow{BC} = (1, 1, -1)$, ou seja,

$$r_2 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

Como os vetores \vec{v}_1 e \vec{v}_2 são claramente LI, temos duas possibilidades para a posição relativa entre as retas, ou seja, reversas ou concorrentes.

Para diferenciar retas reversas das concorrentes, basta calcular o volume do paralelepípedo gerado pelos vetores \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e $\overrightarrow{AB} = (0, -1, -2)$, se o volume for positivo, as retas são reversas, se igual a zero, são concorrentes.

$$Volume = |[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{AB}]| = 0$$

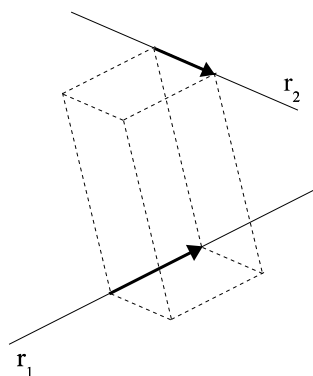
$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{AB}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$Volume = |-4| = 4 \neq 0$$

Logo as retas são **reversas**.

5ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Reta $r_1 : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3 + t \\ z = -4 - t \end{cases}$ e
- Reta $r_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{-y-1}{2} = \frac{z}{-3}$



Como os vetores diretores $\vec{v}_1 = (-2, -1, -1)$ e $\vec{v}_2 = (1, -2, -3)$ das retas r_1 e r_2 , respectivamente, são claramente LI, temos duas possibilidades para a posição relativa entre as retas, ou seja, reversas ou concorrentes.

Para diferenciar retas reversas das concorrentes, basta calcular o volume do paralelepípedo gerado pelos vetores \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e $\overrightarrow{AB} = (-2, 2, 4)$, se o volume for positivo,

as retas são reversas, se igual a zero, são concorrentes.

$$Volume = |[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{AB}]| = 0$$

$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{AB}] = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = |4| = 4$$

logo são reversas.

• A distância entre as retas será obtida através de: $Volume = A_{base} \times h$, onde $A_{base} = ||\vec{v}_1 \times \vec{v}_2||$ e $h = d(r_1, r_2)$.

Como

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i} - 7\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$A_{base} = \sqrt{1^2 + (-7)^2 + 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

logo,

$$d(r_1, r_2) = \frac{4}{5\sqrt{3}} = \frac{4}{15}\sqrt{3}$$

• O ângulo formado pelas retas, será calculado, como sendo o ângulo entre os vetores \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , ou seja,

$$\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{||\vec{v}_1|| ||\vec{v}_2||}$$

$$\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{14}}$$

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{14}}\right)$$