UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CCEN - Departamento de Matemática
http://www.mat.ufpb.br/sergio

1ª Prova	Cálculo Vetorial e Geometria Analítica	
Prof.:	Data: *29/Mai/2003*	Turno: *Tarde*
Curso:	Nome:	
Período: *03.1*	Turma(s):	Matrícula:

1ª Questão Num triângulo ABC qualquer, sejam M, N e P os pontos médios dos lados AB, BC e CA, respectivamente. Se Q é um ponto qualquer do interior do triângulo, mostre que:

$$\overrightarrow{QM} + \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC}$$

2ª Questão Encontre o valor $m \in \mathbb{R}$ de modo que os pontos $A = (0, m, 1)$, $B = (1, 1, 1)$ e $C = (-1, 0, -1)$ determinem um paralelogramo de área igual a 3.

3ª Questão Considere os vetores $\overrightarrow{a} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\overrightarrow{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$ e $\overrightarrow{c} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

a) $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^3$? JUSTIFIQUE SUA RESPOSTA. Se verdadeiro, esta base é ortogonal?

b) Escreva o vetor $\overrightarrow{d} = -6\vec{i} + \vec{j}$ como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$

4ª Questão Sejam M, N e P pontos quaisquer no espaço. Seja A o ponto médio de NP. Mostre que:

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP} = ||\overrightarrow{AM}||^2 - ||\overrightarrow{AN}||^2$$

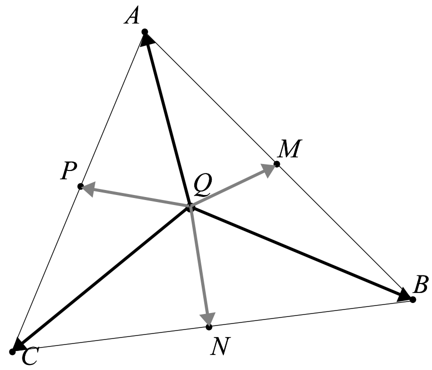
Boa Sorte

R E S P O S T A S

1ª Questão [2,0] Dados da questão:

- ABC é um triângulo,
- M é ponto médio do lado AB,
- N é ponto médio do lado BC,
- P é ponto médio do lado CA e
- Q um ponto no interior do triângulo.

Na figura abaixo, considere:



$\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{QN} = \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BN}$ e $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CP}$ e observe que

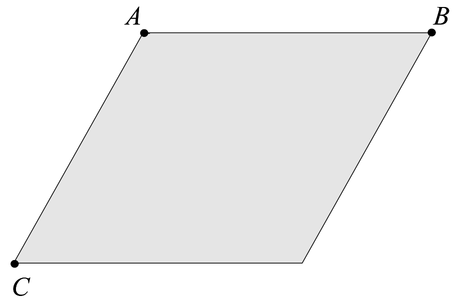
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) \\ &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{QP} &= \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{QB} + \\ &\quad + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CP} \\ &= \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} + \\ &\quad + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} \\ &= \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} \end{aligned}$$

2ª Questão [3,0] Dados da questão:

- Ponto $A = (0, m, 1)$, com $m \in \mathbb{R}$,
- Ponto $B = (1, 1, 1)$ e
- Ponto $C = (-1, 0, -1)$).



Considere os vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (1, 1-m, 0)$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = (-1, -m, -2)$.

Para que os 3 pontos determinem um paralelogramo de área igual a 3, os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ devem satisfazer:

1. O vetor $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ deve ser não nulo.

   De fato, $\forall m \in \mathbb{R}$ temos:

   $$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1-m & 0 \\ -1 & -m & -2 \end{vmatrix}$$

   $$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (2m-2)\vec{i} + 2\vec{j} + (-2m+1)\vec{k} \neq \overrightarrow{0}$$

2. A norma $||\overrightarrow{w}||$ deve ser igual a 3, logo

   $$\sqrt{(2m-2)^2 + 2^2 + (-2m+1)^2} = 3$$

   $$(2m-2)^2 + 2^2 + (-2m+1)^2 = 9$$

   $$8m^2 - 12m + 9 = 9 \Longrightarrow m = 0 \text{ ou } m = \frac{3}{2}$$

3ª Questão [3,0] Dados da questão:

- Vetor $\overrightarrow{a} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$,
- Vetor $\overrightarrow{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$,
- Vetor $\overrightarrow{c} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ e
- Vetor $\overrightarrow{d} = -6\vec{i} + \vec{j}$.

a) $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^3$, pois

- São 3 vetores em $\mathbb{R}^3$ e
- São LI.

De fato, pelo teorema $x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ se, e somente se, $x = y = z = 0$ for a solução única, ou seja, que o sistema abaixo só possua a solução trivial.

$$\begin{cases} -1x & + & 2y & - & 1z & = & 0 \\ 1x & + & 1y & + & 2z & = & 0 \\ 1x & + & 0y & - & 1z & = & 0 \end{cases}$$

e para tanto o determinante da matriz dos coeficientes, deve ser diferente de zero, ou seja:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

- Esta base não é ortogonal, pois $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = -1 \neq 0$ ou seja $\overrightarrow{a}$ não é ortogonal a $\overrightarrow{b}$.

b) Para que o vetor $\overrightarrow{d} = -6\vec{i} + 1\vec{j}$ seja uma combinação dos vetores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$ é preciso encontrar os valores x, y e $z \in \mathbb{R}$, tal que, $x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c} = \overrightarrow{d}$, ou seja, basta resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -1x & + & 2y & - & 1z & = & -6 \\ 1x & + & 1y & + & 2z & = & 1 \\ 1x & + & 0y & - & 1z & = & 0 \end{cases}$$

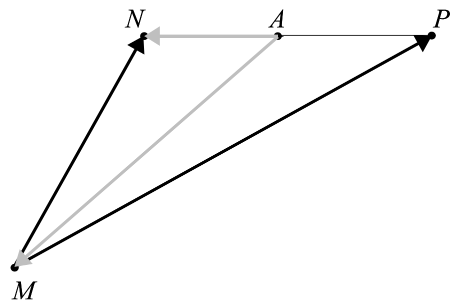
tendo como solução $x = 1$, $y = -2$ e $z = 1$, ou seja:

$$\overrightarrow{d} = \overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$$

4ª Questão [2,0] Dados da questão:

- M, N e P pontos quaisquer e
- A o ponto médio de NP

Na figura abaixo, considere:



Considere $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$ e $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP}$

Calculando o produto interno e considerando que $\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AN}$, temos:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP} &= (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}).(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP}) \\ &= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AP} + \\ &\quad + \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AP} \\ &= ||\overrightarrow{MA}||^2 + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AP} - \\ &\quad - \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AN} \\ &= ||\overrightarrow{MA}||^2 + 0 - ||\overrightarrow{AN}||^2 \\ &= ||\overrightarrow{MA}||^2 - ||\overrightarrow{AN}||^2 \end{aligned}$$