UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CCEN - Departamento de Matemática
http://www.mat.ufpb.br/sergio

1ª Prova

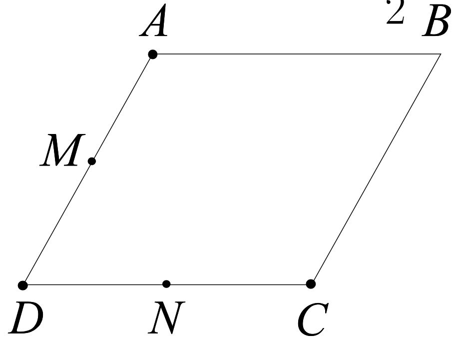
Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Prof.: Data: *29/Mai/2003* Turno: *Noite*
Curso: Nome:

Período: *03.1* Turma(s): Matrícula:

1ª Questão Seja $ABCD$ o paralelogramo abaixo. Sejam M e N os pontos médios de AD e DC, respectivamente. Mostre que:

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$



2ª Questão Os pontos $A = (1, 1, 1)$, $B = (-2, -1, 0)$, $C = (0, 2, -2)$ e $D = (-1, 0, 2)$ são vértices de um paralelepípedo? Em caso afirmativo, determine o volume desse paralelepípedo.

3ª Questão Considere os vetores $\overrightarrow{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\overrightarrow{b} = \vec{j} + 2\vec{k}$ e $\overrightarrow{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

a) $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^3$? JUSTIFIQUE SUA RESPOSTA. Se verdadeiro, esta base é ortogonal?

b) Escreva o vetor $\overrightarrow{v} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$

4ª Questão Sejam $\overrightarrow{v_1} = 2\overrightarrow{a} + 4\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{v_2} = \alpha\overrightarrow{c} - \overrightarrow{d}$ vetores, onde $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ são vetores LI, com $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{d} = 2\overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b}$. Determine o valor de α de modo que $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ sejam LD.

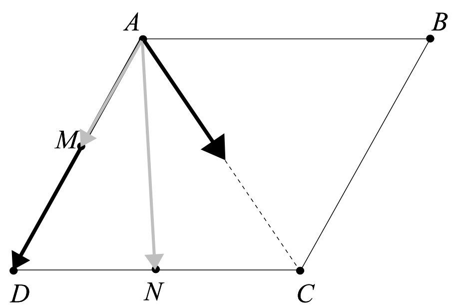
Boa Sorte

R E S P O S T A S

1ª Questão [2,0] Dados da questão:

- $ABCD$ é um paralelogramo,
- M é ponto médio do lado AD e
- N é ponto médio do lado DC.

Na figura abaixo, considere:



$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$ e observe que

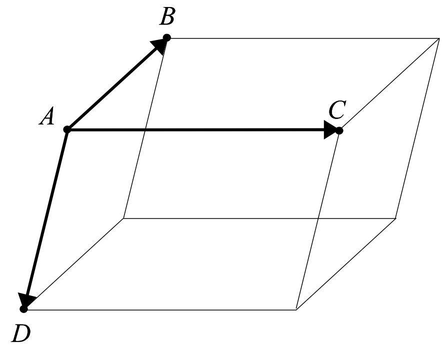
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \\ &= 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{DN} \\ &= 2(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DN}) \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \\ &= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

2ª Questão [3,0] Dados da questão:

- Ponto $A = (1, 1, 1)$,
- Ponto $B = (-2, -1, 0)$,
- Ponto $C = (0, 2, -2)$ e
- Ponto $D = (-1, 0, 2)$.



Considere os vetores:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (-3, -2, -1)$$
$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = (-1, 1, -3)$$
$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD} = (-2, -1, 1)$$

Existem 2 maneiras de verificar se os pontos são vértices de um paralelepípedo:

1. Verificando que os vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são LI.

   De fato, os vetores são LI, pois no calculo do volume abaixo, se verifica esse fato.

2. Calculando o possível volume do paralelepípedo gerado pelos vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$.

   Note que o volume é dado por $V = |[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]|$, ou seja:

   $$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -11$$

   Logo o volume $V = |-11| = 11$ e portanto os vetores são LI.

3ª Questão [3,0] Dados da questão:

- Vetor $\overrightarrow{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$,
- Vetor $\overrightarrow{b} = \vec{j} + 2\vec{k}$,
- Vetor $\overrightarrow{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ e
- Vetor $\overrightarrow{d} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$.

a) $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^3$, pois

- São 3 vetores em $\mathbb{R}^3$ e

- São LI.

  De fato, pelo teorema $x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ se, e somente se, $x = y = z = 0$ for a solução única, ou seja, que o sistema abaixo só possua a solução trivial.

  $$\begin{cases} 2x & + & 0y & + & 1z & = & 0 \\ -1x & + & 1y & + & 2z & = & 0 \\ 0x & + & 2y & - & 1z & = & 0 \end{cases}$$

  e para tanto o determinante da matriz dos coeficientes, deve ser diferente de zero, ou seja:

  $$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$$

- Esta base não é ortogonal, pois $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = -1 \neq 0$ ou seja $\overrightarrow{a}$ não é ortogonal a $\overrightarrow{b}$.

b) Para que o vetor $\overrightarrow{d} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ seja uma combinação dos vetores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$ é preciso encontrar os valores x, y e $z \in \mathbb{R}$, tal que, $x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c} = \overrightarrow{d}$, ou seja, basta resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x & + & 0y & + & 1z & = & 4 \\ -1x & + & 1y & + & 2z & = & 2 \\ 0x & + & 2y & - & 1z & = & -4 \end{cases}$$

tendo como solução $x = 1$, $y = -1$ e $z = 2$, ou seja:

$$\overrightarrow{d} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{c}$$

4ª Questão [2,0] Dados da questão:

- $\overrightarrow{v_1} = 2\overrightarrow{a} + 4\overrightarrow{b}$,
- $\overrightarrow{v_2} = \alpha\overrightarrow{c} - \overrightarrow{d}$,
- $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ são vetores LI,
- $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a}$ e
- $\overrightarrow{d} = 2\overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b}$.

Note que:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v_2} &= \alpha\overrightarrow{c} - \overrightarrow{d} \\ &= \alpha\overrightarrow{a} - (2\overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b}) \\ &= (\alpha - 2)\overrightarrow{a} + 4\overrightarrow{b} \end{aligned}$$

Para que os vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ sejam LD, temos que:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v_1} &= x\overrightarrow{v_2} \\ 2\overrightarrow{a} + 4\overrightarrow{b} &= x(\alpha - 2)\overrightarrow{a} + 4x\overrightarrow{b} \end{aligned}$$

ou seja:

$$\begin{cases} 2 = x(\alpha - 2) \\ 4 = 4x \end{cases}$$

Logo: $x = 1$ e $2 = \alpha - 2$, portanto $\alpha = 4$