UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CCEN - Departamento de Matemática
http://www.mat.ufpb.br/sergio

1ª Prova — Cálculo Vetorial e Geometria Analática

Prof.: Data: *29/Mai/2003* Turno: *Manhã*
Curso: Nome:

Período: *03.1* Turma(s): Matrícula:

1ª Questão Em um paralelogramo $ABCD$ qualquer, sejam M e N os pontos médios dos lados AB e AD, respectivamente. Mostre que:

$$\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$$

2ª Questão Dados os pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (3, 0, 1)$ e $C = (1, 0, 3)$.

a) Verifique se A, B e C so vrtices de um tringulo.

b) Esse tringulo retngulo?

c) Determine a rea desse tringulo.

3ª Questão Considere os vetores $\overrightarrow{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\overrightarrow{b} = \vec{j} + 2\vec{k}$ e $\overrightarrow{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

a) $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$ uma base para o $\mathbb{R}^3$? JUSTIFIQUE SUA RESPOSTA. Se verdadeiro, esta base ortogonal?

b) Escreva o vetor $\overrightarrow{d} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ como combinao linear dos vetores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$

4ª Questão Sabendo que $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{3}$, $||\overrightarrow{v}|| = 1$ e que 30^o medida do ngulo entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, determine o ngulo entre $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.

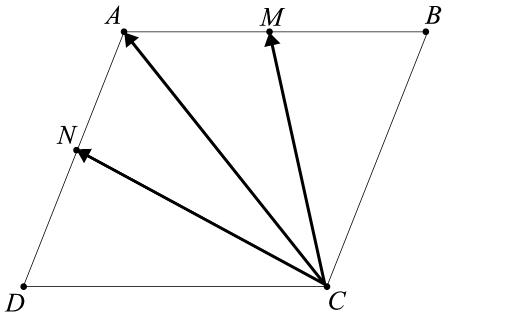
Boa Sorte

R E S P O S T A S

1ª Questão [2,0] Dados da questão:

- $ABCD$ é um paralelogramo,
- M é ponto médio do lado AB e
- N é ponto médio do lado AD.

Na figura abaixo, considere:



$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN}$ e observe que

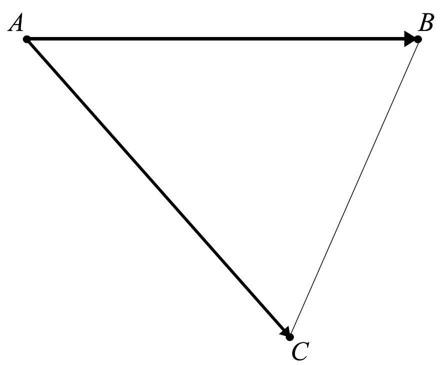
$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = -2\overrightarrow{AN} - 2\overrightarrow{AM}$$
$$\overrightarrow{CA} = -2(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN})$$

logo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CN} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN} \\ &= 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} \\ &= 2\overrightarrow{CA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}\end{aligned}$$

2ª Questão [3,0] Dados da questão:

- Ponto $A = (1, 0, 1)$,
- Ponto $B = (3, 0, 1)$ e
- Ponto $C = (1, 0, 3)$.



Considere os vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (2, 0, 0)$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = (0, 0, 2)$.

a) Existem 3 maneiras de verificar se os pontos são vértices de um triângulo:

1. Verificando que os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são LI.

   De fato, os vetores são LI, pois é impossível que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{v}$ com $x \in \mathbb{R}$.

2. Calculando o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

   Note que nesse caso, os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são perpendiculares, pois $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 2.0 + 0.0 + 0.2 = 0$, logo são perpendiculares.

3. Verificando que os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ formam um paralelogramo, para tanto, verificaremos que a área é diferente de zero, ou seja, que o produto vetorial é não nulo.

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{j} \neq \overrightarrow{0}$$

b) Esse triângulo é retângulo, veja letra a) ítem 2.

c) A área desse triângulo é igual a:

$$A_{\triangleleft} = \frac{||\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}||}{2} = \frac{\sqrt{(-4)^2}}{2} = \frac{4}{2} = 2ua$$

3ª Questão [3,0] Dados da questão:

- Vetor $\overrightarrow{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$,
- Vetor $\overrightarrow{b} = \vec{j} + 2\vec{k}$,
- Vetor $\overrightarrow{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ e
- Vetor $\overrightarrow{d} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$.

a) $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^3$, pois

- São 3 vetores em $\mathbb{R}^3$ e
- São LI.

De fato, pelo teorema $x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ se, e somente se, $x = y = z = 0$ for a solução única, ou seja, que o sistema abaixo só possua a solução trivial.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 0y & + & 1z & = & 0 \\ -1x & + & 1y & + & 2z & = & 0 \\ 0x & + & 2y & - & 1z & = & 0 \end{array}\right.$$

e para tanto o determinante da matriz dos coeficientes, deve ser diferente de zero, ou seja:

$$\left|\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{array}\right| = -12 \neq 0$$

• Esta base não é ortogonal, pois $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = -1 \neq 0$ ou seja $\overrightarrow{a}$ não é ortogonal a $\overrightarrow{b}$.

b) Para que o vetor $\overrightarrow{d} = 4\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$ seja uma combinação dos vetores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$ é preciso encontrar os valores x, y e $z \in \mathbb{R}$, tal que, $x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}+z\overrightarrow{c} = \overrightarrow{d}$, ou seja, basta resolver o seguinte sistema:

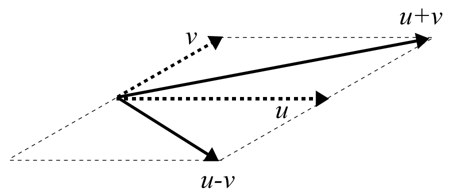
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 0y & + & 1z & = & 4 \\ -1x & + & 1y & + & 2z & = & 2 \\ 0x & + & 2y & - & 1z & = & -4 \end{array}\right.$$

tendo como solução $x = 1$, $y = -1$ e $z = 2$, ou seja:

$$\overrightarrow{d} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{c}$$

4ª Questão [2,0] Dados da questão:

- $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{3}$,
- $||\overrightarrow{v}|| = 1$ e
- $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 30^o$



Considere $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$

Para calcular o ângulo entre $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$, usaremos os seguinte fatos:

• Os vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ são não nulos, pois

$$||\overrightarrow{a}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2$$

$$||\overrightarrow{a}||^2 = (\sqrt{3})^2 + 2.\frac{3}{2} + 1^2 = 3 + 3 + 1 = 7$$

e

$$||\overrightarrow{b}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2$$

$$||\overrightarrow{b}||^2 = (\sqrt{3})^2 - 2.\frac{3}{2} + 1^2 = 3 - 3 + 1 = 1$$

onde

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||.\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \sqrt{3}.1.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$$

Como $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$

$$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2 = 3 - 1 = 2$$

temos $\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \dfrac{\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}}{||\overrightarrow{a}||.||\overrightarrow{b}||}$

$$\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{2}{\sqrt{7}.\sqrt{1}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

Ou seja

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \arccos(\frac{2\sqrt{7}}{7})$$