UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
**CCEN - Departamento de Matemática**
Prof. Sérgio (mat.ufpb.br/sergio)

-2ª Lista/Roteiro

# Matemática Elementar

Prof.: *Sérgio* Data: - Turno: *Virtual*
Curso: Nomes:

Período: - Pólo: Matrícula:

**1ª Questão** Use o princípio da indução finita para provar que, para todo número natural $n$, vale a igualdade:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

**2ª Questão** Em relação à conjuntos enumeráveis, assinale as alternativas abaixo, com (**V**) VERDADEIRO ou (**F**) FALSO, **justificando/exemplificando cada resposta dada**.

**a)** ( ) $A$ é dito enumerável quando existir uma bijeção entre $A$ e um subconjunto dos números naturais $\mathbb{N}$.

**b)** ( ) Se $A$ e $B$ são conjuntos enumeráveis então a união $A \cup B$ é não enumerável.

**c)** ( ) Se $A$ é um conjunto não enumerável então todo subconjunto infinito de $A$ é não enumerável.

**d)** ( ) Se o produto cartesiano $A \times B$ é não enumerável, então $A$ e $B$ são conjuntos enumeráveis.

**3ª Questão** Escreva o número $[1234]_5$ na forma decimal (base dez) e o número decimal 1234 na base 5.

**4ª Questão** Dado um número natural $n$, considere os conjuntos $D(n)$ e $M(n)$ como o conjunto dos divisores e dos múltiplos de $n$ respectivamente:

**a)** Determine $MDC(22, 28)$ pelo Algoritmo de Euclides (divisões sucessivas) e $MDC(22, 28, 36)$ como o **maior** elemento do conjunto $D(22) \cap D(28) \cap D(36)$.

**b)** Determine via processo de decomposição simultânea o $MMC(22, 28)$ e $MMC(8, 12, 16)$ como o **menor** elemento do conjunto $M(8) \cap M(12) \cap M(16)$.

**5ª Questão** Dados $a$ e $b$ números inteiros, temos $a \equiv b \mod n$ se, e somente se, $a$ e $b$ possuem o mesmo resto quando divididos por $n$. Verifique as equivalências abaixo são verdadeiras:

**a)** $-2 \equiv 43 \mod 5$

**b)** $2 \equiv 20 \mod 5$

**c)** $12 \equiv 17 \mod 5$

**d)** $-4 \equiv 17 \mod 5$

**6ª Questão** Dados $\overline{a}$ e $\overline{b}$ em $Z_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \cdots, \overline{n-1}\}$, definimos o produto $\overline{a}.\overline{b}$ como sendo a classe de equivalência módulo $n$ do produto (usual) $a.b$ e que $\overline{a}$ é divisível por $\overline{b}$ se existe $\overline{c} \in Z_n$ tal que $\overline{a} = \overline{b}.\overline{c}$. Em $Z_7$ determine:

**a)** $\overline{12} - \overline{2} + \overline{3} + \overline{4}$

**b)** $\overline{5} \times \overline{3}$

**c)** $\overline{8^{12}}$

**d)** a da divisão de $\overline{3}$ por $\overline{4}$

**e)** o inverso multiplicativo de $\overline{3}$

**f)** uma solução para a equação $\overline{x}^2 - \overline{1} = \overline{3}$

**7ª Questão** Mostre que $2^{222} + 2$ é divisível por 3.

# R E S P O S T A S

**1ª Questão** Dados da questão:

- Princípio da indução
- $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Usando o Princípio da indução temos:

- Quando $n = 1$, verifica-se que a fórmula acima é válida pois fica

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

- Suponhamos que a fórmula é verdadeira para $n = k$, ou seja, a soma dos $k$ primeiros números é

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

- Fazendo $n = (k+1)$, e somando aos dois lados da igualdade acima $(k+1)$ obtemos

$$[1 + 2 + 3 + \cdots + k] + (k+1) =$$

$$= \left[\frac{k(k+1)}{2}\right] + (k+1) =$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

isto é, a soma dos $k+1$ primeiros é $\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Provamos assim, por indução, a igualdade desejada.

**2ª Questão** Dados da questão:

- Conjuntos enumeráveis

**a)** Verdadeiro, pois se $A$ é finito basta considerar uma bijeção com um subconjunto finito de $\mathbb{N}$ e se $A$ for infinito basta considerar uma bijeção com o próprio conjunto $\mathbb{N}$.

**b)** Falso, pois se $A$ e $B$ são conjuntos enumeráveis então existem funções bijeção $f_A$ e $f_B$ de $A$ e $B$ em subconjuntos de $\mathbb{N}$, logo a função definida por

$$F(x) = \begin{cases} 2f_A(x) & se\ x \in A \\ 2f_B(x) + 1 & se\ x \in B \end{cases}$$

é uma bijeção com um subconjunto de $\mathbb{N}$.

**c)** Falso, pois considere o conjunto $\mathbb{R}$ não enumerável e o subconjunto infinito $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ que é enumerável.

**d)** Falso, pois se o produto cartesiano $A \times B$ é não enumerável, necessariamente $A$ ou $B$ é não enumerável.

**3ª Questão** Dados da questão:

- $[1234]_5$
- $1234$

Para escrever $[1234]_5$ na base decimal, basta observar a construção deste número que é

$$\begin{aligned} [1234]_5 &= 1 \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 3 \times 5 + 4 \\ &= 125 + 50 + 15 + 4 \\ &= 194 \end{aligned}$$

Para escrever $1234$ na base $5$, usaremos o algoritmo da divisão:

$$\begin{array}{rcrrl} 1234 & = & 246 \times 5 & +4 & resto\ \mathbf{4} \\ 246 & = & 49 \times 5 & +1 & resto\ \mathbf{1} \\ 49 & = & 9 \times 5 & +4 & resto\ \mathbf{4} \\ 9 & = & 1 \times 5 & +4 & resto\ \mathbf{4} \\ 1 & = & 0 \times 5 & +4 & resto\ \mathbf{1} \end{array}$$

Logo $1234 = [14414]_5$

**4ª Questão** Dados da questão:

- $D(n)$ como o conjunto dos divisores $n$
- $M(n)$ como o conjunto dos múltiplos de $n$

**a)** Usando o Algoritmo de Euclides (divisões sucessivas) para determinar $MDC(22, 28)$ temos:

$$\begin{array}{rcrrl} 28 & = & 1 \times 22 & +6 & resto\ 6 \\ 22 & = & 3 \times 6 & +4 & resto\ 4 \\ 6 & = & 1 \times 4 & +2 & resto\ \mathbf{2} \\ 4 & = & 2 \times 2 & +0 & resto\ 0 \end{array}$$

Logo o resultado é o último divisor deste processo, ou seja, $MDC(22, 28) = 2$.

Para determinar $MDC(22, 28, 36)$ como o **maior** elemento do conjunto $D(22) \cap D(28) \cap D(36)$, vamos encontrar esses conjuntos:

$$\begin{aligned} D(22) &= \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, 11, 22\} \\ D(28) &= \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, 4, 7, 14, 28\} \\ D(36) &= \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\} \end{aligned}$$

Logo $D(22) \cap D(28) \cap D(36) = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}$ e portanto $MDC(22, 28, 36) = 2$

**b)** Determinando via processo de decomposição simultânea o $MMC(22,28)$, temos

$$\begin{array}{cc|l} 22 & 28 & \mathbf{2} \\ 11 & 14 & \mathbf{2} \\ 11 & 7 & \mathbf{7} \\ 11 & 1 & \mathbf{11} \\ 1 & 1 & \end{array}$$

Logo

$$MMC(22,28) = \mathbf{2^2 \times 7 \times 11 = 308}$$

Para $MMC(8,12,16)$ como o **menor** elemento do conjunto $M(8) \cap M(12) \cap M(16)$, vamos encontrar esses conjuntos:

$$M(8) = \{8,16,24,32,40,\mathbf{48},56,\dots\}$$
$$M(12) = \{12,24,36,\mathbf{48},60,72,\dots\}$$
$$M(16) = \{16,32,\mathbf{48},64,80,96,\dots\}$$

Logo

$$M(8) \cap M(12) \cap M(16) = \{48,96,\dots\}$$

e portanto $MMC(8,12,16) = 48$

Só para calcular e confirmar o valor do $MMC(8,12,16)$ via processo de decomposição simultânea:

$$\begin{array}{ccc|l} 8 & 12 & 16 & \mathbf{2} \\ 4 & 6 & 8 & \mathbf{2} \\ 2 & 3 & 4 & \mathbf{2} \\ 1 & 3 & 2 & \mathbf{2} \\ 1 & 3 & 1 & \mathbf{3} \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

$$MMC(8,12,16) = \mathbf{2^4 \times 3 = 48}$$

**5ª Questão** Dados da questão:

- Definição de $a \equiv b \mod n$

**a)** A equivalência $-2 \equiv 43 \mod 5$ é verdadeira pois os restos são iguais a $3$:

$$\begin{array}{rcll} -2 & = & -1 \times 5 + 3 & \textit{resto } \mathbf{3} \\ 43 & = & 8 \times 5 + 3 & \textit{resto } \mathbf{3} \end{array}$$

**b)** A equivalência $2 \equiv 20 \mod 5$ é falsa pois os restos são diferentes:

$$\begin{array}{rcll} 2 & = & 0 \times 5 + 2 & \textit{resto } \mathbf{2} \\ 20 & = & 4 \times 5 + 0 & \textit{resto } \mathbf{0} \end{array}$$

**c)** A equivalência $12 \equiv 17 \mod 5$ é verdadeira pois os restos são iguais a $2$:

$$\begin{array}{rcll} 12 & = & 2 \times 5 + 2 & \textit{resto } \mathbf{2} \\ 17 & = & 3 \times 5 + 2 & \textit{resto } \mathbf{2} \end{array}$$

**d)** A equivalência $-4 \equiv 17 \mod 5$ é falsa pois os restos são diferentes:

$$\begin{array}{rcll} -4 & = & -1 \times 5 + 1 & \textit{resto } \mathbf{1} \\ 17 & = & 3 \times 5 + 2 & \textit{resto } \mathbf{2} \end{array}$$

**6ª Questão** Dados da questão:

- Definição de $Z_7 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6}\}$

**a)** $\overline{12} - \overline{2} + \overline{3} + \overline{4} = \overline{12 - 2 + 3 + 4} = \overline{17} = \overline{3}$

**b)** $\overline{5} \times \overline{3} = \overline{5 \times 3} = \overline{15} = \overline{1}$

**c)** $\overline{8^{12}} = \overline{8}^{12} = \overline{1}^{12} = \overline{1}$

**d)** Da divisão de $\overline{3}$ por $\overline{4}$, o que se pede é um número $\overline{X} \in \mathbb{Z}_7$, tal que $\overline{X} \times \overline{4} = \overline{3}$, ou seja, valores para $x \in \mathbb{Z}$ de forma que $4x \div 7$ tenha resto $3$, portanto observe que todos os elementos do conjunto $\overline{6} = \{\dots,-8,-1,6,13,\dots\}$ satisfazem a condição.

Logo a divisão de $\overline{3}$ por $\overline{4}$ é $\overline{6}$

**e)** O inverso multiplicativo de $\overline{3}$ será um $\overline{X} \in \mathbb{Z}_7$, tal que $\overline{X} \times \overline{3} = \overline{3} \times \overline{X} = \overline{1}$, ou seja, valores para $x \in \mathbb{Z}$ de forma que $3x \div 7$ tenha resto $1$, portanto observe que todos os elementos do conjunto $\overline{5} = \{\dots,-9,-2,5,12,\dots\}$ satisfazem a condição.

Logo o inverso multiplicativo de $\overline{3}$ será $\overline{5}$.

**f)** Uma solução para a equação

$$\overline{x}^2 - \overline{1} = \overline{3}$$

será um $\overline{X} \in \mathbb{Z}_7$, tal que $\overline{X}^2 - \overline{1} = \overline{3}$, ou seja, valores para $x \in \mathbb{Z}$ de forma que $(x^2 - 1) \div 7$ tenha resto $3$, portanto observe que todos os elementos dos conjuntos $\overline{2} = \{\dots,-12,-5,2,9,\dots\}$ e $\overline{5} = \{\dots,-9,-2,5,12,\dots\}$ satisfazem a condição.

Logo as soluções para a equação

$$\overline{x}^2 - \overline{1} = \overline{3}$$

são $\overline{2}$ e $\overline{5}$.

**7ª Questão** Dados da questão:

- $2^{222} + 2$

Lembrando que se $a \equiv b \mod c$, então $a^n \equiv b^n \mod c$ e $(a+d) \equiv (b+d) \mod c$.

Além disso, dados $a$ e $b$ inteiros, temos que $a$ é divisível por $b$ se, e somente se, $a \equiv 0 \mod b$. Por exemplo $6 \equiv 0 \mod 3$.

Como $2 \equiv -1 \mod 3$, então $2^{222} \equiv 1 \mod 3$.

Agora basta somar $2$ e obtemos $(2^{222} + 2) \equiv (1 + 2) \mod 3) \equiv 0 \mod 3$, o que significa que $2^{222} + 2$ é divisível por $3$