

1ª Questão Assinale as alternativas abaixo, com (V) VERDADEIRO ou (F) FALSO, justificando cada resposta dada, Considerando os conjuntos $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{B} = \{a, e, i\}$ e $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cup \mathcal{P}(\mathcal{B})$

- a) () $n(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = 12$ d) () $\{e\} \subset \mathcal{D}$
b) () O número de elementos de $\mathcal{P}(\mathcal{B}) = 9$ e) () $a \notin \mathcal{D}$
c) () \mathcal{A} é subconjunto de \mathcal{D} f) () $\{2, \mathcal{B}\} \subset \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{D})$

2ª Questão Considere a família $I_n = \left[-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$ de intervalos fechados, onde $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Determine os conjuntos $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.

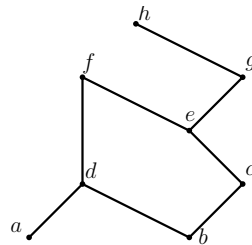
3ª Questão Considere $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e \sim a relação definida por: $a \sim b \Leftrightarrow a - b$ é múltiplo de 3.

- a) A relação \sim é uma relação de equivalência?
b) Quantos e quais são os elementos do conjunto quociente $\mathcal{A}/\sim = \{\bar{x}/x \in \mathcal{A}\}$ onde cada $\bar{x} = \{y \in \mathcal{A}/x \sim y\}$?
c) \mathcal{A}/\sim é uma partição de \mathcal{A} ?

4ª Questão Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x| - 1$ e \sim uma relação de equivalência em \mathbb{R} definida por: $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. Determine as classes de equivalência $\bar{0}$, $\bar{1}$ e $\bar{2}$.

5ª Questão No conjunto $\mathcal{H} = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ considere a relação de ordem parcial \preceq induzida pelo diagrama de Hasse abaixo. Nos subconjuntos \mathcal{H} , $\mathcal{R} = \{a, d, e, f\}$ e $\mathcal{S} = \{b, c, e\}$, determine:

- a) Os menores e maiores elementos;
b) Os elementos minimal e maximal;
c) As cotas inferiores e superiores, ínfimo e supremo;
d) Os conjuntos \mathcal{H} , \mathcal{S} e \mathcal{R} são totalmente ordenado.
e) Os conjuntos \mathcal{H} , \mathcal{S} e \mathcal{R} são bem ordenados.



RESPOSTAS

1ª Questão Dados da questão:

- $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,
- $\mathcal{B} = \{a, e, i\}$ e
- $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cup \mathcal{P}(\mathcal{B})$

a) Falso pois $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ possui 15 elementos, como pode ser visto na tabela abaixo:

$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$	a	e	i
0	(0,a)	(0,e)	(0,i)
1	(1,a)	(1,e)	(1,i)
2	(2,a)	(2,e)	(2,i)
3	(3,a)	(3,e)	(3,i)
4	(4,a)	(4,e)	(4,i)

- b) Falso pois o número de elementos do conjunto das partes¹ de \mathcal{B} é $2^3 = 8$.
c) Verdadeiro pois todos os elementos de \mathcal{A} estão em $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cup \mathcal{P}(\mathcal{B})$.
d) Falso pois $\{e\}$ é um elemento de $\mathcal{P}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{D}$.
e) Verdadeiro pois $a \notin \mathcal{A}$ e $a \notin \mathcal{P}(\mathcal{B})$.
f) Falso pois $\mathcal{B} \cap \mathcal{D} = \emptyset$ e $\mathcal{B} \notin \mathcal{A}$.

2ª Questão Dados da questão:

- $I_n = \left[-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$ e
- $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [0, 1]$, pois $-\frac{1}{n} < 0$ e $1 < 1 + \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ o que nos leva a concluir que $[0, 1] \subset \left[-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = [-1, 2]$, pois $I_1 = [-1, 2] \supset I_2 = \left[-\frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right] \supset I_3 = \left[-\frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}\right] \supset \dots \supset I_n = \left[-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$

3ª Questão Dados da questão:

¹Pelo teorema 3.4.2

- $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
- $a \sim b \Leftrightarrow a - b$ é múltiplo de 3

a) A relação \sim é uma relação de equivalência?

\sim é reflexiva pois se $a \sim a$ implica que $a - a = 0 = 3 \times 0$

\sim é simétrica pois se $a \sim b$ implica que $a - b = 3n$ e como $b - a = 3(-n)$ temos que $b \sim a$

\sim é transitiva pois se $a \sim b$ e $b \sim c$ implica que $a - b = 3n$ e $b - c = 3m$ logo $a - b + (b - c) = 3n + 3m$ e portanto $a - c = 3(n + m)$ ou seja $a \sim c$

b) Quantos e quais são os elementos do conjunto quociente $\mathcal{A}/\sim = \{\bar{x}/x \in \mathcal{A}\}$?

Elementos equivalentes a 0 são 0 e 3, pois $0 - 0 = 0 = 3 \times 0$ e $0 - 3 = -3 = 3 \times (-1)$, logo $\bar{0} = \bar{3} = \{0, 3\}$

Elementos equivalentes a 1 são 1 e 4, pois $1 - 1 = 0 = 3 \times 0$ e $1 - 4 = -3 = 3 \times (-1)$, logo $\bar{1} = \bar{4} = \{1, 4\}$

Elementos equivalentes a 2: 2 pois $2 - 2 = 0 = 3 \times 0$, logo $\bar{2} = \{2\}$

Portanto o conjunto quociente $\mathcal{A}/\sim = \{\{0, 3\}, \{1, 4\}, \{2\}\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ e possui 3 elementos.

c) \mathcal{A}/\sim é uma partição de \mathcal{A} ?

Os subconjuntos $\bar{0}$, $\bar{1}$ e $\bar{2}$ são não vazios; Qualquer interseção entre os conjuntos $\bar{0}$, $\bar{1}$ e $\bar{2}$ é vazio;

A união dos subconjuntos $\bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2} = \mathcal{A}$; Logo é uma partição.

4ª Questão Dados da questão:

- $f(x) = |x| - 1$ e
- $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

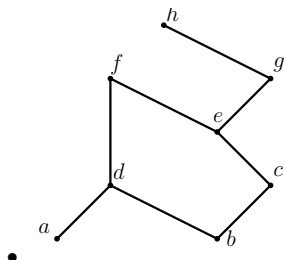
Elementos equivalentes a 0 é apenas o 0, pois $f(0) = -1$ e $|x| - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$, logo $\bar{0} = \{0\}$

Elementos equivalentes a 1 são 1 e -1, pois $f(1) = 0$ e $|x| - 1 = 0 \Rightarrow x \pm 1$, logo $\bar{1} = \bar{-1} = \{-1, 1\}$

Elementos equivalentes a 2 são 2 e -2 , pois $f(2) = 1$ e $|x| - 1 = 1 \Rightarrow x \pm 2$, logo $\bar{2} = -2 = \{-2, 2\}$

5ª Questão Dados da questão:

- $\mathcal{H} = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
- $\mathcal{R} = \{a, d, e, f\}$
- $\mathcal{S} = \{b, c, e\}$



a) Os menores e maiores elementos;

	Menor	Maior
\mathcal{H}	$\{\}$	$\{\}$
\mathcal{R}	$\{\}$	$\{f\}$
\mathcal{S}	$\{b\}$	$\{e\}$

b) Os elementos minimal e maximal;

	Minimal	Maximal
\mathcal{H}	$\{a, b\}$	$\{f, g\}$
\mathcal{R}	$\{a, e\}$	$\{f\}$
\mathcal{S}	$\{b\}$	$\{e\}$

c) As cotas inferiores e superiores, ínfimo e supremo;

Cotas	Inferiores	Superiores
\mathcal{H}	$\{\}$	$\{\}$
\mathcal{R}	$\{\}$	$\{f\}$
\mathcal{S}	$\{b\}$	$\{e, f, g, h\}$

	Ínfimo	Supremo
\mathcal{H}	$\{\}$	$\{\}$
\mathcal{R}	$\{\}$	$\{f\}$
\mathcal{S}	$\{b\}$	$\{e\}$

d) Os conjuntos \mathcal{H} , \mathcal{S} e \mathcal{R} são totalmente ordenado.

\mathcal{H} não é, pois f e h não são comparáveis;

\mathcal{R} não é, pois d e e não são comparáveis;

\mathcal{S} é pois $b \preceq c \preceq e$.

e) Os conjuntos \mathcal{H} , \mathcal{S} e \mathcal{R} são bem ordenados.

\mathcal{H} não é, pois o subconjunto $\{f, h\}$ não possui um menor elemento;

\mathcal{R} não é, pois o subconjunto $\{d, e\}$ não possui um menor elemento;

\mathcal{S} é pois, qualquer subconjunto de \mathcal{S} possui um menor elemento.

Algumas definições: Sejam (A, \preceq) um conjunto parcialmente ordenado e $B \subseteq A$ um subconjunto não-vazio. Diremos que:

1. $b \in B$ é o **menor elemento**² de B se $b \preceq x$ para todo $x \in B$.
2. $b \in B$ é o **maior elemento**³ de B se $x \preceq b$ para todo $x \in B$.
3. $b \in B$ é um **elemento minimal** de B se não existir $x \in B$, tal que $x \preceq b$.
4. $b \in B$ é um **elemento maximal** de B se não existir $x \in B$, tal que $b \preceq x$.
5. $a \in A$ é uma **cota inferior** ou um **minorante** de B se $a \preceq x$, para todo $x \in B$.
6. $a \in A$ é uma **cota superior** ou um **majorante** de B se $x \preceq a$, para todo $x \in B$.
7. $a \in A$ é o **ínfimo** de B se ele for o maior elemento do conjunto das cotas inferiores de B .
8. $a \in A$ é o **supremo** de B se ele for o menor elemento do conjunto das cotas superiores de B .

²Ou elemento mínimo ou primeiro elemento.

³Ou elemento máximo ou último elemento.